

離散的絵有又黒写像

9 大 6 本松 数理 吉田正章 (Masaaki Yoshida)

Department of Mathematics Kyushu University

超幾何微分方程式：

$$E(\mu_0, \mu_1, \mu_\infty) : u'' + q(x)u = 0,$$

$$4q = \frac{1 - \mu_0^2}{x^2} + \frac{1 - \mu_1^2}{(1-x)^2} + \frac{1 - \mu_\infty^2 + \mu_0^2 + \mu_1^2}{x(1-x)}$$

より見慣れた形：

$$x(1-x)u'' + \{c - (a+b+1)x\}u' - abu = 0$$

指数差： $\mu_0 = 1 - c$, $\mu_1 = c - a - b$, $\mu_\infty = a - b$.

0 での局所解の例：

$$u = 1 + O(x), \quad v = x^{\mu_0}(1 + O(x)).$$

黒写像 (的は理満球面)

$$X := \mathbf{C} - \{0, 1\} \longrightarrow \mathbf{P}^1 = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$$

$$x \longmapsto u(x) : v(x)$$

- 局所双正則なれども多価
- (射影的) 測多価群 $\subset \mathrm{PGL}_2(\mathbf{C})$: 一次分数変換

局所指数 μ_0, μ_1, μ_∞ が実なら

- $(-\infty, 0)$ で実数値の 2 独立解あり。この区間の像は線分
- $(0, 1), (1, \infty)$ でも同様、解は同じでない
- 2 組の独立解は線形に関係、故に 2 黒写像は一次分数で関係
- 一次分数変換で円は円に移る

$X_+(X \text{ の上半分})$ の黒像は円弧三角形 (黒三角形)

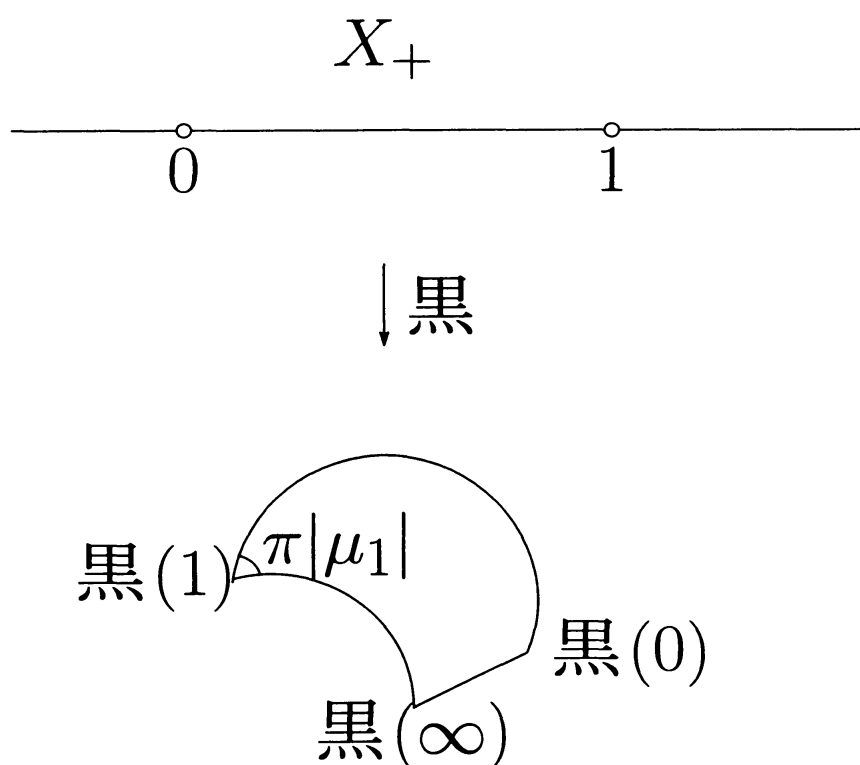


図 1: 黒三角形

全体像は黒鏡像原理を使う。一般には像は混沌

だが

$$|\mu_j| = \frac{1}{k_j}, \quad j = 0, 1, \infty, \quad k_j \in \{2, 3, \dots, \infty\}$$

なら、像は

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_\infty} > 1 & \text{の時} & \mathbf{P}^1 \\ & = 1 & \text{の時} & \mathbf{C} \\ & < 1 & \text{の時} & \mathbf{B}_1 : \text{単位円盤} \end{array}$$

を隈なく一様に覆う.

例えば $k_0 = k_1 = k_\infty = \infty$ の時に全ての黒三角形を描いて見ると

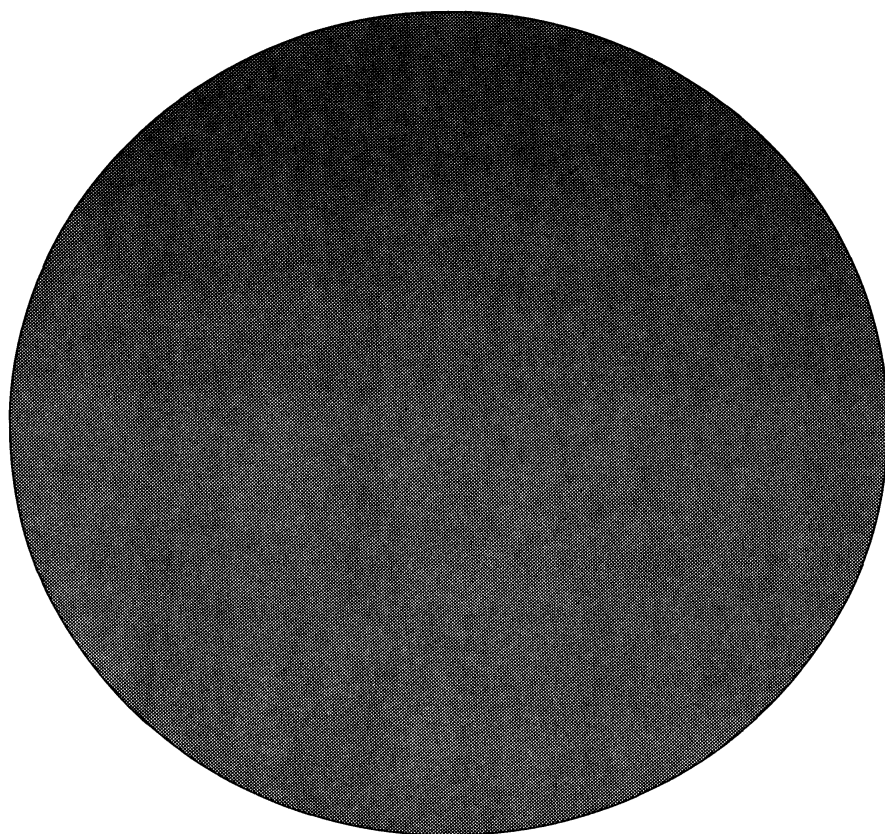


図 2: B_1 を隈なく覆っている 闇夜に烏

一つ置きに

黒三角形、白三角形

と塗り分けることが肝心。すると、世界数学会議だかの紋章のようになる。

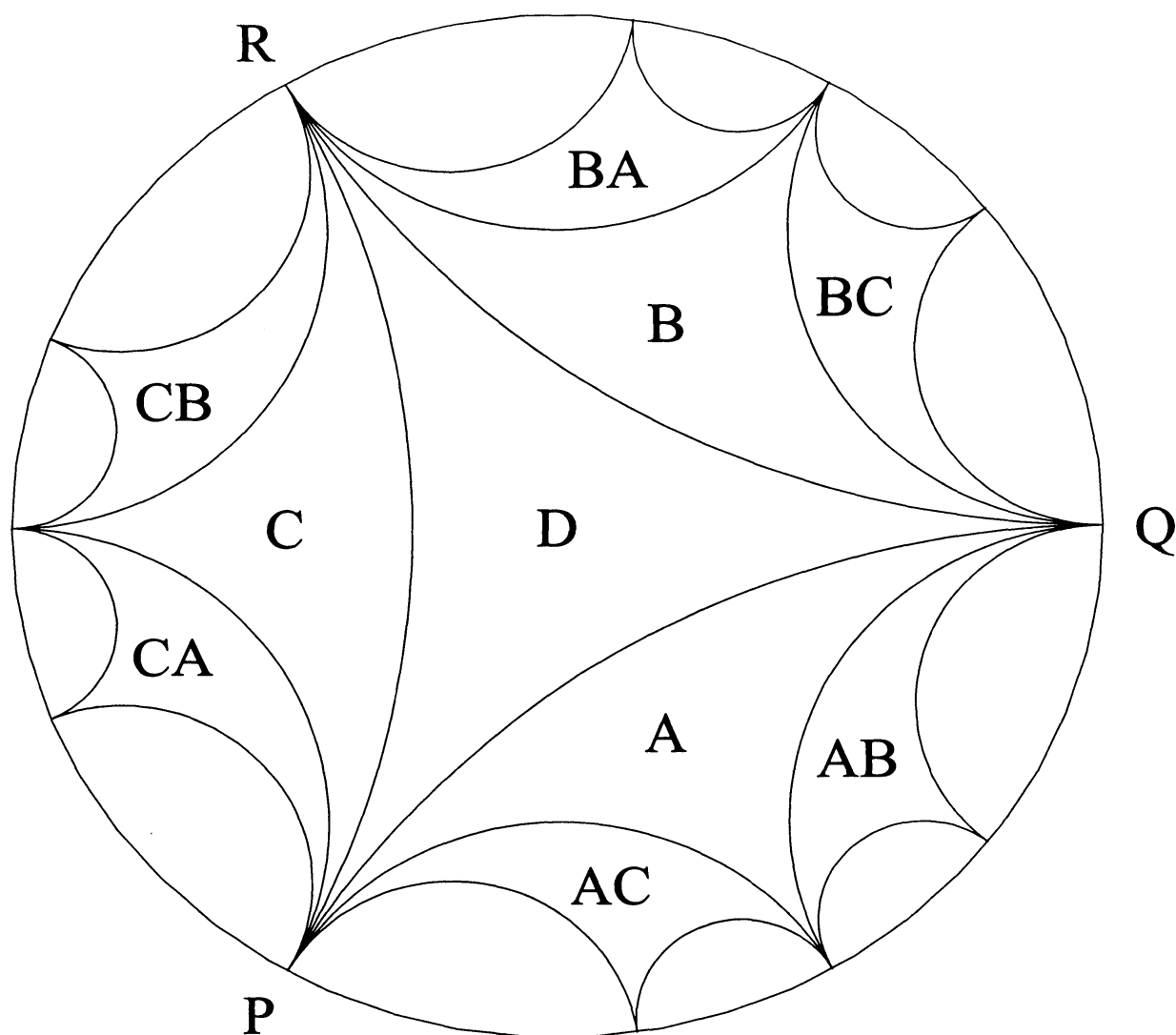


図 3: $\Gamma(2)$: 黒白三角形

高次元的一般化が絵見る光°、寺田俊明、他によって
なされたが、

百年前に戻って反省

黒の的がおかしくないか？

合流型超幾何方程式の黒写像は混沌。

測多価群 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ の自然な働き場は

球面でなく、その中だろうが。

理満球面の中は**又曲 3-空間** $\mathbf{H}^3$ 。

注：「双曲」は間違い。一方の葉しか使わない場合は「又曲」とすべき。

自己同型は以下のもの：

$$H \longrightarrow MHM^*, \quad M \in \mathrm{PGL}_2(\mathbf{C}), \quad H \in \mathbf{H}^3$$

又黒写像の定義：

(「又曲黒」は発音し難いので、「又黒」と命名)

$$X \ni x \mapsto H(x)H(x)^* \in \mathbf{H}^3, \quad H = \begin{pmatrix} u & u' \\ v & v' \end{pmatrix}.$$

像は的 $\mathbf{H}^3$ 内の曲面 (**平前曲面**)。これは、何のことはない、方程式を行列型

$$(u, u')' = (u, u') \begin{pmatrix} 0 & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

に書き換えただけです。

ここからは、神戸の佐々木武さんとの仕事です。

局所的性質

方程式

$$E : u'' - q(x)u = 0$$

の又黒写像は、曲線

$$C : |q(x)| = 1$$

に沿って特異（歓迎すべき事）

C やその像を**尖端曲線**と言う。又黒像がこの曲線に沿って大体、尖端的特異点を有するからである

大域的性質

黒と又黒の測多価群は同じ:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rightarrow M \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad H \rightarrow MHM^*$$

$\mathrm{PGL}_2(\mathbf{C})$ は $\mathbf{H}^3$ に、より自然に働く

例を観察する（図4－図8）:

- $\mu = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ 測多価群が2面体群（図4）
- $\mu = (0, 0, 0)$ 同群が**楕円芋蔓群** $\Gamma(2)$ （図5）
- 究極的合流：**絵有**： $q(x) = x$ （図6，7，8）

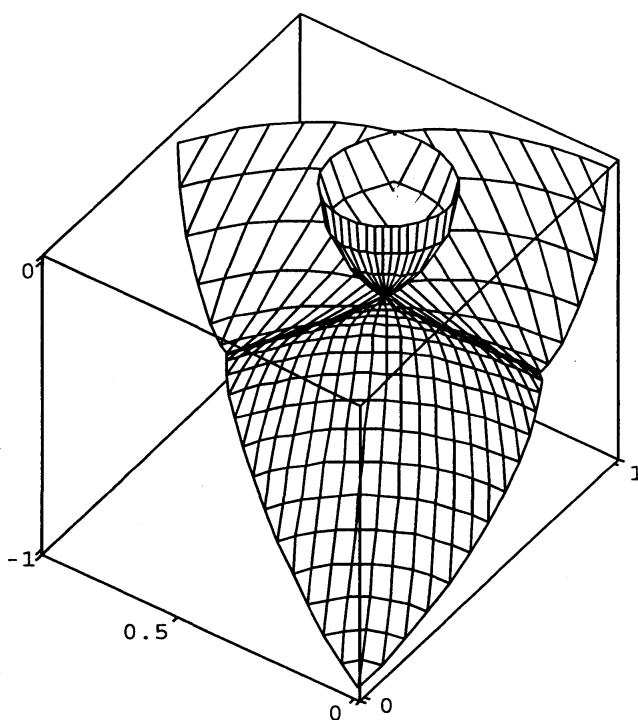


図 4: X_+ の像: 燕尾あり

ひよんなことから

去年の 4 月に Tim Hoffmann というのが伯林から 9 大に就任。煙草の煙の運動の離散化等の絵を見せて闇雲にでなく、大事と思うものを保つ賢い離散化が大切等と講釈を垂れたので、**絵有的又黒の離散化**で

- 局所的には燕尾を 3 つ持ち、
- 大域的には Stokes 現象を持つ

ものは出来るかいと挑発したら、それらしいものを作ってきたのです。

以下は Tim Hoffmann と Wayne Rossman のやったことです。

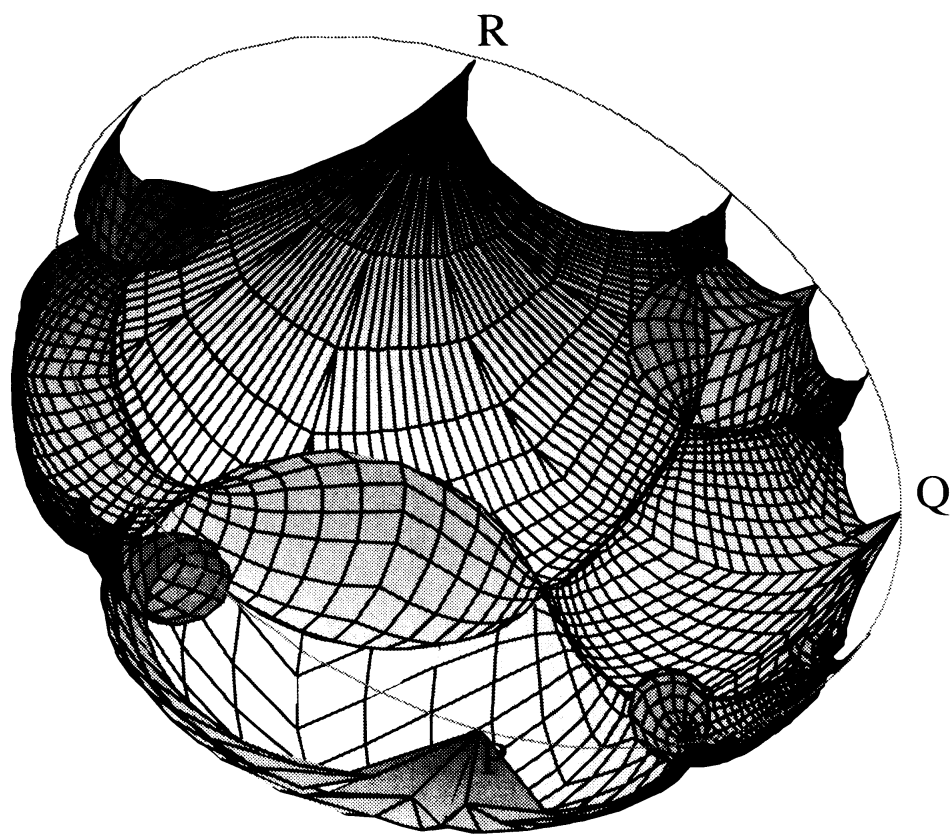


図 5: $\Gamma(2)$: 又黒、燕尾沢山

$\mathbf{H}^3$ 内の曲面の微分幾何

極小曲面の（正則関数による）Weierstrass 表示のように、

又曲空間内の**平均曲率一定曲面**にも (Bryant) 表示あり：

$$dF = F \begin{pmatrix} g & -g^2 \\ 1 & -g \end{pmatrix} \frac{dz}{g'},$$

$g(z)$ は正則関数、写像は $z \mapsto F(z)F(z)^*$.

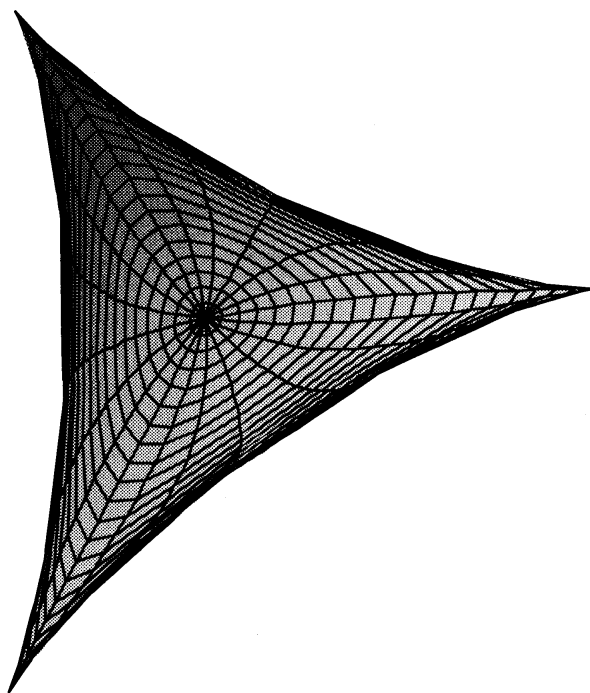


図 6: 絵有的黒による単位円盤の像：3 燕尾

さて、

$$E := F \begin{pmatrix} 1 & g \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と置くと、 $z \mapsto E(z)E(z)^*$ は平前曲面で、

$$dE = E \begin{pmatrix} 0 & g' \\ 1/g' & 0 \end{pmatrix} dz.$$

ここで、

$$dx = \frac{dz}{g'}$$

という妙な変数変換をすると

$$dE = E \begin{pmatrix} 0 & q(x) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} dx, \quad q(x) = (g'(z))^2,$$

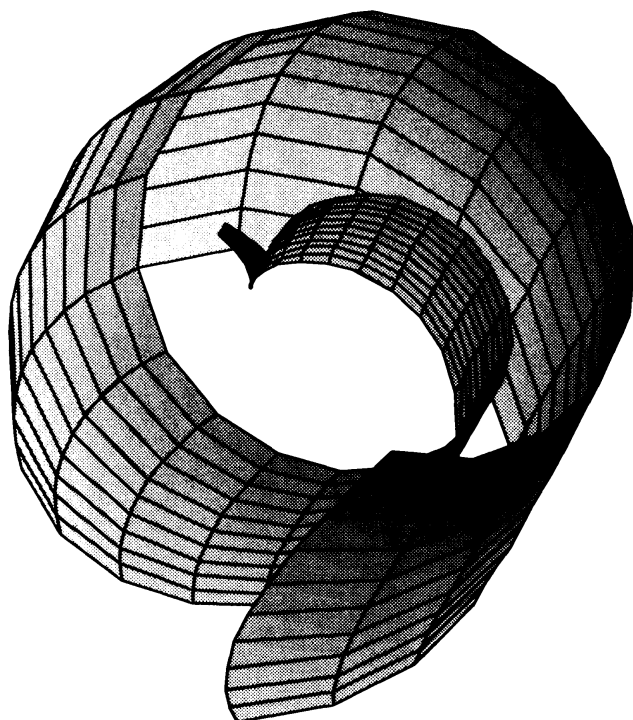


図 7: 半直線 $\arg x = \pi/3$ の周りの扇の像
となる。兎も角

$$x \mapsto E(x)E(x)^*$$

は $u'' - qu = 0$ の又黒だ。

$q(x)$ と $g(z)$ の関係は、例えば

$$\begin{array}{ll} q(x) & g(z) \\ x^n & \longleftrightarrow z^{(2n+2)/(n+2)} \quad n \neq -1, -2 \\ x^{-1} & \longleftrightarrow \log z \\ x^{-2} & \longleftrightarrow e^z \end{array}$$

特に

$$x \longleftrightarrow z^{4/3}.$$

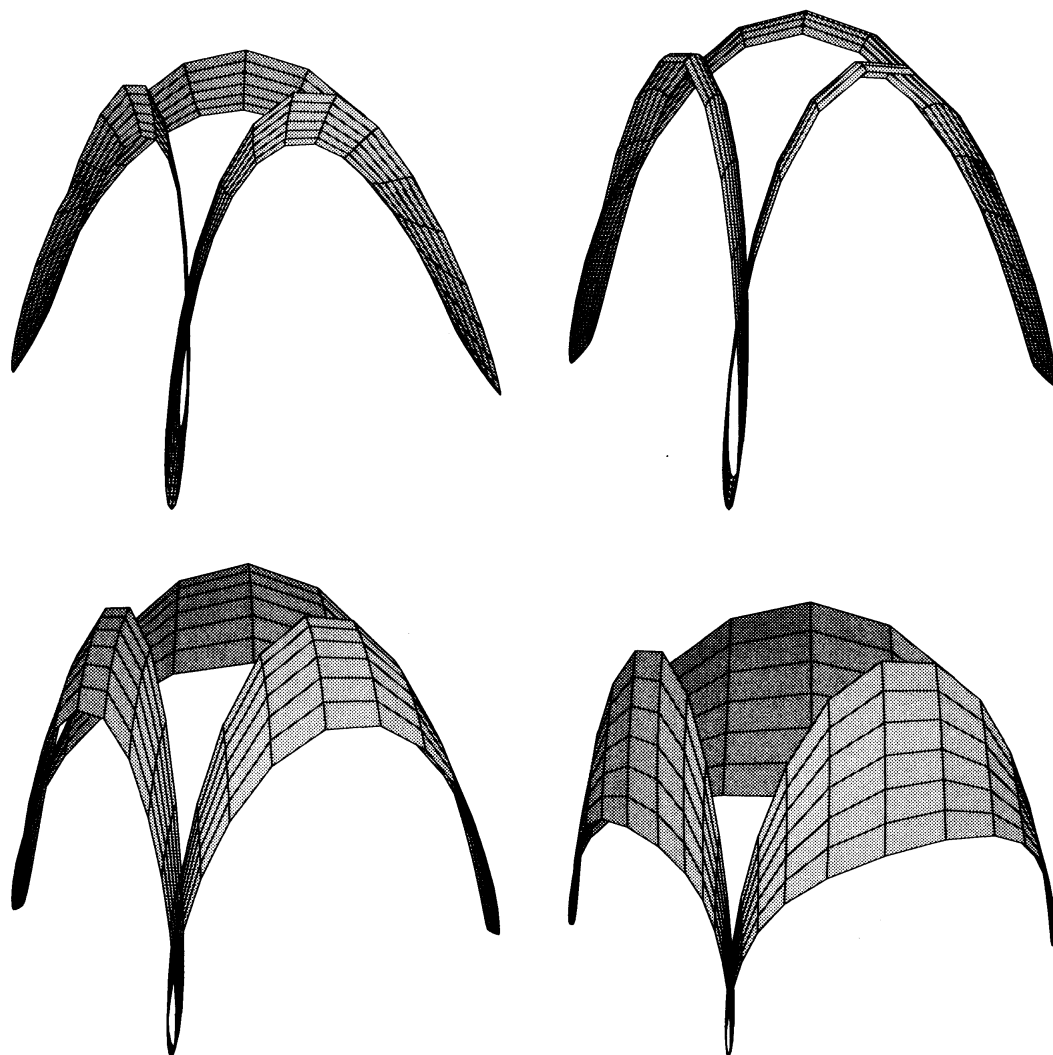


図 8: 原点中心の円環の像各種

離散正則関数を

$$g : \mathbf{Z}^2 \supset D \longrightarrow \mathbf{C},$$

で、基本正方形で複比が -1 なるものと定義してみる；
多少条件を緩めることもある：

$$cr(g)_{mn} = \frac{g_1 - g}{g_{12} - g_1} \frac{g_2 - g_{12}}{g - g_2} = \frac{\alpha_{(m,n)(m+1,n)}}{\alpha_{(m,n)(m,n+1)}},$$

$\alpha_{(m,n)(m+1,n)}$ は n に依らない、 $\alpha_{(m,n)(m,n+1)}$ は m に依らない実数で符号違い。

離散平均曲率一定曲面を Bryant

$$dF = F \begin{pmatrix} g & -g^2 \\ 1 & -g \end{pmatrix} \frac{dz}{g'},$$

を真似て

$$F_q - F_p = F_q \begin{pmatrix} g_p & -g_p g_q \\ 1 & -g_q \end{pmatrix} \frac{\lambda \alpha_{pq}}{g_q - g_p}$$

としてみるとうまいと Udo Hertrich-Jeromin が言っている。

離散の世界では、正しいか否でなく、うまいか否か

そこで Hoffmann と Rossman は平前

$$dE = E \begin{pmatrix} 0 & g' \\ 1/g' & 0 \end{pmatrix} dz$$

を真似て、**離散平前**として

$$E_q - E_p = E_p \begin{pmatrix} 0 & g_q - g_p \\ \frac{\lambda \alpha_{pq}}{g_q - g_p} & 0 \end{pmatrix}$$

はどうかと言ってきた。

基本的四格子点が同一円周上にある他、いい性質を有する (Hoffmann) ことが分かる。

離散正則関数の例は、驚くことに、(ほぼ自明な)

$$1, \quad z, \quad , e^z$$

の離散化と Schramm の定義した**冪関数** z^a (及びその極限としての $\log z$) の離散化しかしられていない。

$0 < a < 2$ に対して z^a の離散化 g の定義：

$$\begin{aligned} ag_{m,n} = & 2m \frac{(g_{m+1,n} - g_{m,n})(g_{m,n} - g_{m-1,n})}{g_{m+1,n} - g_{m-1,n}} \\ & + 2n \frac{(g_{m,n+1} - g_{m,n})(g_{m,n} - g_{m,n-1})}{g_{m,n+1} - g_{m,n-1}}, \end{aligned}$$

$$m, n \in \mathbf{Z}_{\geq 0},$$

$$g_{0,0} = 0, \quad g_{1,0} = 1, \quad g_{0,1} = i^a.$$

まあ、

$$az^a = z(z^a)'$$

の離散化ではあります。

絵有 ($q = x, g = z^{4/3}$) の時これが使えるからやってみた：

離散絵有的又黒像 をご鑑賞下さい(図9)。

よさそうでしょ、

燕尾 (っぽい) のが3つ見えるし、

酢と楠現象も継承しているみたい。

離散平前関係で

現在進行していること

- 離散的曲面の特異点の定義（離散的焦曲面の活用）
及び基本事項の確立
- Schramm の冪関数のよりよい理解

何とかしたいこと

- 正則関数の例を増やすこと：超幾何関数など
- 超幾何関数等を取り込むには正則関数の定義を変える必要あり？

参考文献

- [1] S. I. Agafonov, *Discrete Riccati equation, hypergeometric functions and circle patterns of Schramm type*, Glasgow Math. J. 47A (2005), 1-16.
- [2] T. HOFFMANN, W. ROSSMAN, T. SASAKI AND M. YOSHIDA, *Discrete flat front in hyperbolic 3-space: their Schwarzian and singularities*, in preparation.
- [3] T. SASAKI AND M. YOSHIDA, *Hyperbolic Schwarz map for the Airy equation*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 15(2008), 195–218.

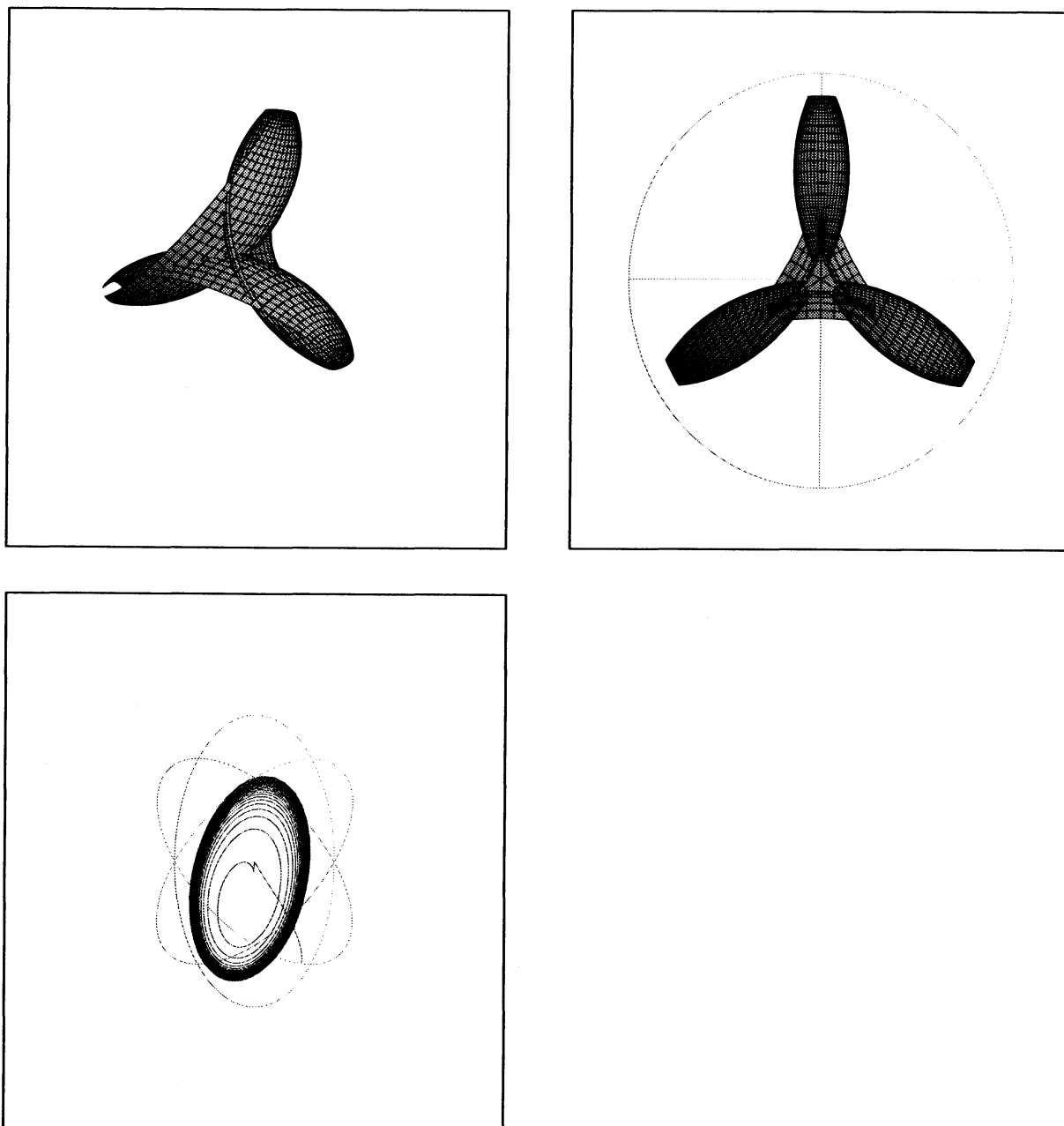


図 9: 離散的絵有又黒像 $N = 20, 30$ 及び遠くでの漸近的振る舞い