

代数的方法による命題論理の研究

静岡大 理学部 古森 雄一

命題論理の研究はある種の代数系の研究と密接に結びついている。古典論理はブール代数と、直観主義論理は擬ブール代数と、Łukasiewicz の多値論理は Chang [1][2] によって定義された MV 代数とそれぞれ関係している。代数系に興味をもっている研究者は、論理の方から発生した代数の問題を考え、論理の方に関心のある研究者は、論理研究の手段として代数系の構造を調べる、というように、問題意識に違いがあるにしても、内容的には同じことを研究していることがよくある。本稿では、論理研究の手段として代数的手法を用いた最近の結果を紹介する。

ところで、数学的な論理研究の立場にも色々あるが、大きく分けると、次の2つがある。オ1のものは"正しき(モデル)"の概念が基本にあって、その公理化の問題や種々の論理演算間の関係を調べるものである。一つの論理演

算ですべての可能な論理演算を表わす、Scheffer Stroke の一般化の話や、他の論理演算子を使つてなるべく能率よくある論理演算子を表わす論理設計の話等は、このオイの立場上にある。オ2のものは、証明可能性(形式的体系)の概念が基本にあり、その後、"正しい"をどのように考えと、正しい論理式と証明可能な論理式が同じものになるかを調べる(すなわち、モデルをみつける)ことや、種々の体系間の関係も問題にするものである。

直観主義論理が Heyting (1930) により形式化されたときには、そのモデルはなかった(直観主義者の頭の中にはあったかもしれないか?) ので、まず擬ブール代数によるモデルが考えられ、その後 Kripke (1965) により全く別のモデルが考えられた。この歴史の流れは、オ2の立場上にあるといつてよい。このオ2の立場を更に極端化し、論理の定義を代入と modus ponens (この二つは、ほとんどすべての形式化された論理体系で認められてゐる推論規則である。) に限して閉じたものと考え、研究が進められてきた分野が1960年以降にかなり研究されはじめた中間命題論理である。

一方、Łukasiewicz 論理の方は、まず1920年に Łukasiewicz により3値論理(つまり3値モデル)が提出されたのです。この論理には、Wajsberg が1931年に公理化を与えてゐる。

また、1930年には Łukasiewicz は Tarski と共同で、3 値論理を一般化し、 m (m は自然数か ∞) 値論理を考えた。その時、Łukasiewicz は 1 つの公理系を提出し、それが m 値論理の公理化になっていることを予想した。 m が自然数の (すなわち ∞ でない) ときの m 値論理の公理化は Rosser と Turquette により、1945 年に行なわれている [12]。前述の Łukasiewicz の予想は 1958 年に Rose と Rosser により、正しいことが証明された [11]。また、その後、 m 値論理の Scheffer Stroke の問題や論理設計的な問題も研究されてきた。このように、Łukasiewicz 流の論理は、主として、才 1 番目の立場に基づいて研究されてきた。

そこで、私は今までとは立場を変えてみて、論文 [4] [5] [6] [7] で Łukasiewicz 流の論理の研究を才 2 の立場に立って、行なってみました。その結果、Łukasiewicz の提出した 5 つの公理を含む論理のモデルによる完全な特徴づけが得られました。

本稿では、まず Maksimova による代数的手法による中間命題論理の最近の結果を簡単に紹介し、次に、超 Łukasiewicz 命題論理についての私の結果を述べつもりでいます。

最後に、数学的な論理研究の立場としては、前に述べた 2 つの立場とは、全く異なった意味での立場の違いがあるこ

とを注意しておきます。一方は、数学の基礎としての論理の研究ということも強く意識し、定理の証明には、ある種の立場（例えば、有限の立場）で認められる論法しか認めないものです。もう一方は、研究対象となっている形式的体系の性質を知るためには、数学で普通に使われている方法はもちろんのこと、すでに得られている数学の成果も使用してよいとするものです。これから紹介する2つの話は、後者の立場に立っているものです。また、本稿では、命題論理しか扱わないので、以後超直観主義命題論理と超Łukasiewicz命題論理をそれぞれ単に、超直観主義論理、超Łukasiewicz論理ということにします。

§1. 超直観主義論理

（命題）論理式とは、4つの論理記号 $\neg$ （ならば）、 $\vee$ （または）、 $\wedge$ （かつ）、 $\rightarrow$ （でない）と命題変数 $p, q, r, \dots$ を使ってふつうに作られたものです。命題変数は可算個だけ用意されているものと考えますので、論理式全体の集合 W の濃度は高々（というよりちょうど）可算個です。直観主義論理（又は古典論理）で証明可能な論理式全体の集合を L_I （又は L_K ）と書えます。超直観主義論理を次の

ように定義します。

定義 1.1. 論理式の集合 L が次の3つの条件を満たすとき、 L を超直観主義論理という：

- (1) 代入に関して閉じている。すなわち、 $A \in L$ で A' を A のある命題変数を現れるすべてのところで、ある1つの論理式で置きかえて得られるものとするとき、 $A' \in L$ 。
- (2) modus ponens に関して閉じている。すなわち、 $A \supset B \in L$ かつ $A \in L$ ならば $B \in L$ 。
- (3) $LJ \subseteq L$ 。■

この定義の(3)を $LJ \subseteq L \subseteq LK$ と変えると、中間論理 (intermediate logic) の定義となります。その場合、論理式全体の集合 W が除かれるだけです。日本では、中間論理という言葉が古くから使われ、ソ連の方では、超直観主義論理 (superintuitionistic logic) という言葉が多く使われているようです。中間論理の日本における初期の研究のようすや問題意識等に興味のある方は、細井氏による解説[3]がありますので参考にしてください。

Maksimova の結果について述べるためには、Craig's interpolation theorem (CIT) について説明しなければなりません。CIT は最初 Craig により 1957 年に古典論理で

成り立っていることが示されたものです。

定義 1.2. CIT が論理 L で成り立っているとは、任意の論理式 A, B に対して、 $A \supset B \in L$ ならば次のような論理式 C が存在することである： $A \supset C \in L$ かつ $C \supset B \in L$ かつ C の中には A と B に共通に現れる命題変数しか現れない。■

定理 1.3 (Maksimova [10]). CIT が成り立つ超直観主義論理は $LJ, LQ, LP_2, J_2, S_2, Sw, LK, W$ の8つだけである。

ここで、
 $LQ = LJ + \neg p \vee \neg \neg p,$
 $LP_2 = LJ + p \vee (p \supset (q \vee \neg q)),$
 $J_2 = LP_2 + (p \supset q) \vee (q \supset p) \vee ((p \supset \neg q) \wedge (\neg q \supset p)),$
 $S_2 = LP_2 + \neg p \vee \neg \neg p,$
 $Sw = (p \supset q) \vee (q \supset p)$ である。■

$LQ = LJ + \neg p \vee \neg \neg p$ の意味は、 LQ は LJ に $\neg p \vee \neg \neg p$ を公理としてつけ加えた論理であることを表わしている。すなわち、 LQ は LJ に $\neg p \vee \neg \neg p$ をつけ加えて、代入と *modus ponens* に関して閉じた論理式の集合であります。

Jankov [9] は 1968 年に超直観主義論理全体の集合の濃度が連続濃度であることを示しています。ですから、連続濃度ある論理のうちで8つしか CIT が成り立つものが

ないということです。この問題に関しては、私が1976年11月頃に、スライス（この言葉の定義は[3]にある） $\mathcal{S}_n$ （ $3 \leq n < \omega$ ）に属する論理では CIT が成り立たない、という結果を得ている。この結果の発表はやや遅れて[8]でしています。 $\mathcal{L}_J, \mathcal{L}_Q, \mathcal{S}_\omega$ は $\mathcal{S}_\omega$ に、 $\mathcal{L}_{P_2}, \mathcal{J}_2, \mathcal{S}_2$ は $\mathcal{S}_2$ に、 $\mathcal{L}_K$ は $\mathcal{S}_1$ に、 $\mathcal{W}$ は $\mathcal{S}_0$ にそれぞれ属しています。

Maksimova の定理1.3の証明は次のようであります。超直観主義論理全体の集合と擬ガール代数のバラエティー (variety) 全体の集合との間に自然な1対1対応があることが知られています。そこでまず、論理 $\mathcal{L}$ で CIT が成り立つことと、それに対応するバラエティー $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ が amalgamable であることが同値であることを示します。次に、amalgamable なバラエティーは先程の8つの論理に対応するバラエティーしかないことを示すのです。このように全く代数的な方法による証明です。

§2. 超 Łukasiewicz 論理

この節では、論理式とは、2つの論理記号 $\neg$ (ならば), $\rightarrow$ (でない) と命題変数 $p, q, r, \dots$ を使ってふつうに作られたものとしします。前節との違いは、論理記号として

$\vee$, $\wedge$ の 2 つがなりことです。 $\vee$ と $\wedge$ は $\neg$ と $\supset$ を使って定義されるのです。

定義 2.1. 論理式の集合 L が次の 3 つの条件を満たすとき、 L を超 Łukasiewicz 論理という：

- (1) 代入に関して閉じている,
- (2) modus ponens に閉じている,
- (3) 次の 5 つの公理を含え

1. $p \supset (q \supset p)$,
2. $(p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))$,
3. $(p \supset q) \supset (q \supset ((q \supset p) \supset p))$,
4. $(p \supset q) \supset ((q \supset p) \supset (q \supset p))$,
5. $(\neg p \supset \neg q) \supset (q \supset p)$.■

この 5 つの公理は Łukasiewicz が多値論理の公理化であろうと予想し提出したものです。このように定義すると、Łukasiewicz の多値論理はもちろんのこと、 m のすべての値に対して、Łukasiewicz の m 値論理は超 Łukasiewicz 論理となります。そこで次のような問題が考えられます。

超 Łukasiewicz 論理は Łukasiewicz の m 値論理以外にどんなものがあるのだろうか？

論理記号として $\neg$ を含まない場合は超 Łukasiewicz 論理は

Lukasiewicz の m 値論理しかない、というのが [5] の結論であります。論理記号 $\neg$ を含む場合の結論を述べるためには、モデル S_n と S_n^ω の定義を必要とします。

定義 2.2. 集合 $S_n = \{0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$ に対して、演算 $\cap$, $\neg$ をつぎのように定義する:

$$x \cap y = \min(1, 1 - x + y), \quad \neg x = 1 - x.$$

また、閉区間 $[0, 1]$ に含まれる有理数全体の集合 S_ω に、同様に演算 $\cap$, $\neg$ を定義する。■

定義 2.3. 集合 $S_n^\omega = \{(x, y) \mid x \in S_n, y \in \mathbb{Z}\} - \{(0, -y) \mid y \in \{0, 1, 2, \dots\}\} - \{(1, y) \mid y \in \{0, 1, 2, \dots\}\}$ に対して、演算 $\cap$, $\neg$ をつぎのように定義する:

$$(x, y) \cap (z, u) = \begin{cases} (1, 0) & \text{if } z > x, \\ (1, \min(0, u - y)) & \text{if } z = x, \\ (1 - x + z, u - y) & \text{その他,} \end{cases}$$

$$\neg(x, y) = (1 - x, -y). \quad \blacksquare$$

以上のモデルでは 1 や $(1, 0)$ を真と考えています。これらのモデルで恒真となる論理式全体の集合をモデルを表わす S_n , S_n^ω を混用して表わすことにします。すなわち、 S_n はモデルを表わすとともに、命題変数のそれぞれに S_n のどの

元を割り当てて計算してもその結果が1となる論理式全体の集合を表わします。また、 S_n はŁukasiewiczの $(n+1)$ 値論理となっています。

このとき、次の定理が得られます。

定理 2.4 (古森 [7])。任意の超Łukasiewicz 論理 L に対して、自然数の集合 I, J が存在して、

$$L = \bigcap_{i \in I} S_i \cap \bigcap_{j \in J} S_j^\omega$$

と表わすことができる。しかも L が最小の超Łukasiewicz 論理 L_u でなければ、 I も J も有限集合となる。■

もちろん、最小の超Łukasiewicz 論理とは前述の5つの公理による公理化される論理であり、 $L_u = \bigcap_{i \in N} S_i$ となっています。この定理の証明の概観を簡単に説明することはむずかしい。まず、ある順序可換群の形式的理論の完全性（その理論からは、任意の命題の肯定か否定のどちらかが必ず証明できること）を証明する[6]。次にそれを使って、任意のirreducible なモデルは定義 2.2, 2.3 で定義されたモデルのどれかと、モデルとして同じ（恒真な論理式全体の集合が同じ）であることを示すのです。やはり代数的手法をさかんに用います。

定理 2.4 を使うと、様々な結果が得られます。例えば

、超Łukasiewicz 論理全体の集合の濃度は可算であることなどはすぐに分ります。また、前節の CIT に関しては、CIT の成り立つ超Łukasiewicz 論理は論理式全体の集合 W と S_1 (実は LK) しかないことも分ります。

参考文献

- [1] C. C. Chang, Algebraic analysis of many valued logics, Trans. Amer. Math. Soc., 88 (1958), 467-490.
- [2] C. C. Chang, A new proof of the completeness of the Łukasiewicz axioms, Trans. Amer. Math. Soc., 93 (1959), 74-80.
- [3] 細井 勉, 中間命題論理とはじめ, 月刊マセマティクス (海洋出版), 2 (1980), 169-175.
- [4] Y. Komori, The separation theorem of the π_0 -valued Łukasiewicz propositional logic, Rep. Fac. Sci., Shizuoka Univ., 12 (1978), 1-5.
- [5] Y. Komori, Super-Łukasiewicz implicational logics, Nagoya Math. J., 72 (1978), 127-133.
- [6] Y. Komori, Completeness of two theories on ordered abelian groups and embedding relations, Nagoya Math. J.,

77 (1980), 33-39.

- [7] Y. Komori, Super-Lukasiewicz propositional logics, Nagoya Math. J., (to appear).
- [8] Y. Komori, Logics without Craig's interpolation property, Proc. Japan Acad., Ser. A, 54 (1978), 46-48.
- [9] V. A. Jankov, Constructing a sequence of strongly independent superintuitionistic propositional calculi, Soviet Math. Dokl., 9 (1968), 806-807.
- [10] L. L. Maksimova, Craig's theorem in superintuitionistic logics and amalgamable varieties of pseudo-Boolean algebras, Algebra i Logika, 16 (1977), 643-681.
- [11] A. Rose and J. B. Rosser, Fragments of many-valued statement calculi, Trans. Amer. Math. Soc., 87 (1958), 1-53.
- [12] J. B. Rosser and A. R. Turquette, Axiom schemes for m -valued propositional calculi, J. S. L., 10 (1945), 61-82.