

回転半球面上の西岸強化流の安定性

京都大学・数理解析研究所 谷口 由紀 (Yuki Taniguchi)

Research Institute for Mathematical Sciences,

Kyoto University

京都大学・数理解析研究所 山田 道夫 (Michio Yamada)

Research Institute for Mathematical Sciences,

Kyoto University

京都大学・大学院理学研究科 石岡 圭一 (Keiichi Ishioka)

Graduate School of Science, Kyoto University

1 はじめに

3次元乱流では、大スケールの渦から小スケールの渦へとエネルギーが伝達するのに対し、2次元乱流ではエネルギーは逆向きに伝わる。このようなエネルギー逆カスケードに伴い、2次元乱流がどのような運動を示すかについては多くの研究が行われている。

1978年に Williams が南北対称性や波数 8 対称性を課した強制乱流実験で球面上に縞状構造が出現することを示した。このときの数値実験では人為的対称性を仮定していた。その後、1993年になり Yoden and Yamada が減衰乱流では自転速度が十分に速いと極域に東風ジェットを形成することや帯状の縞構造が出現することを数値計算から示した。この Yoden らの数値実験については、1998年-2000年に石岡、山田、林、余田が高解像度数値計算を行い詳細に調べた。その結果、減衰系で球自転角速度が速い場合に極域で東風ジェットが出現するのは、初期に与える条件に依存しないことや、初期エネルギーを十分小さなスケールに与えておくと、帯状の縞構造が出現することを確認した。またこの間、1997年に Nozawa and Yoden が2次元強制乱流においても帯状縞構造が形成されることを示している。また、浅水系でも数値実験が行われており、1996年に Cho and Polvani が減衰乱流から帯状縞構造が出現することを報告している。

我々は、このような全球面上での結果を踏まえて、球面上で円形の粘着境界を持つ領域について、2次元非圧縮性流体の流れパターンの形成について調べてきた。円領域の大きさや位置を変化させた一連の数値実験から、円領域が縦半球(半球の境界が経度線と一致)のときには、初期場の流線が同心円上の場合では流れのパターンが東から西へと移動すること、周期的に西側で流れが強くなる西岸強化流を見出している。また、円領域が南半球(境界が赤道と一致)のときには、初期乱流場から南極付近に西風周極流が形成されることも見出している。この南極付近の西風周極流は、円領域の中心が南極にあれば、円領域の大きさや初期条件に依らず形成されるようである。また、南半球で

stress free 境界条件をもつ場合、一様に広がる初期乱流場に対しては東風周極流が形成される。これらの周極流の向きの違いは、粘着境界条件では境界における角運動量の選択的散逸と、また、stress free 境界条件 (角運動量保存) では角運動量の緯度再分配とそれぞれ関係する。

ここでは、丸池が縦半球の場合に、海洋の風成循環を意識した2次元強制運動を数値的に調べるため、Stommel による西岸強化流を念頭において、北半球で西風、南半球で東風になるような東西風強制項 $u = \frac{C}{2} \sin 2\theta$ (θ は余緯度, C は定数) を加えて数値実験を行う。強制の強さを変えた場合における流れの安定性について議論する。

2 数値計算法

ここでは縦半球の場合についてのみ数値計算を行うが、我々の一連の数値計算に関しては、流れのパターンは球面上の丸い池の大きさと位置に依存する (丸池が球面の半分以上を占める場合もあり得る)。そこで丸池の大きさと位置を任意に設定できるように、数値計算に当たっては、まず球面上の丸池の中心が球の頂点となるよう球面を回転した後、その頂点を基準とする等角写像によって丸池を平面単位円板に写し、この単位円板上で Navier-Stokes 方程式を解いた。変数変換後の単位円板上の渦度方程式は以下のようになる (ここでは丸池の大きさが半球の場合のみを示す)。

$$\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t} + \frac{(1+r^2)^2}{4r} \frac{\partial (\Psi, \Delta \Psi)}{\partial (r, \psi)} + \Omega \left\{ - (1+r^2) \sin \Theta \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \left(2 \cos \Theta - \frac{1-r^2}{r} \sin \Theta \cos \psi \right) \frac{\partial \Psi}{\partial \psi} \right\} = F + \nu (\Delta + 2) \Delta \Psi.$$

ここで、 $r = \sin \theta / (1 - \cos \theta)$ は半径、 ψ は円板上の方位角を表し、

$$\Delta_{sphere} = \frac{(1+r^2)^2}{4} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right),$$

である。また、 F は強制項を示す。この変数変換の利点は、渦度方程式の非線形項とラプラシアンが類似の形式で変換され、写像後の方程式が流体方程式に近い形になることである。境界条件は no slip 条件 ($\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0$ ($r = 1$)) を用いた。単位円板上では極座標を用いて角度方向にフーリエ展開

$$\Psi(r, \psi, t) = \sum_n R_n(r) e^{-in\psi},$$

を、動径方向にはチェビシェフ多項式展開を行った。このときの展開形は

$$R_0(r, t) = (x-1)^2 (x+2) a_0^{(0)}(t) + (x-1)^2 (x+1)^2 \sum_{m=1}^M a_m^{(0)}(t) T_{m-1}(x),$$

$$R_1(r, t) = (x-1)^2(x+1)(x+2)a_0^{(1)}(t) + (x-1)^2(x+1)^3 \sum_{m=1}^M a_m^{(1)}(t)T_{m-1}(x),$$

$$R_n(r, t) = (x-1)^2(x+1)^2 \sum_{m=0}^M a_m^{(n)}(t)T_m(x), \quad n \geq 2,$$

である。これは境界条件を満たし、中心($r=0$)で特異性を持たないように決めている。展開係数は選点法により求めた。時間積分については Crank-Nicolson 法と 2 次の Runge-Kutta 法を用い、粘性係数と球自転角速度はそれぞれ $\nu = 10^{-2}$, $\Omega = 400$ (木星相当) とした。

3 数値実験

我々は、縦半球における減衰系で初期の流れ場が同心円状の場合について数値実験を行ったところ、時間発展と共に南北対称の流れのパターンが東から西に移動していく様子が観察され西岸において周期的に流れが速くなることを確認している。このときの実験はロスビー波の影響で流れのパターンが非定常で、 β 面上で Stommel が得たような定常な西岸強化流は得られない。

そこでここでは、このような結果を踏まえて、北半球で西風、南半球で東風になるような強制項を加えて、数値実験を行った。本研究では、全球において

$$u = \frac{C}{2} \sin 2\theta,$$

のような一定の風を与えている (図 1)。ここで、 θ は余緯度を示し、定数 C により強制の強さを変化させて数値実験を行った。

$C = 68.0$ の強制を与えたとき、静止していた流れ場は図 2 のような定常で安定な西岸強化流で落ち着く。図 2 を見ると、流れ場は、反時計回り (北半球高緯度)、時計回り (北半球中緯度 ~ 南半球中緯度)、反時計回り (南半球高緯度) の 3 つの部分に分かれていることがわかる。これは与えた強制関数 u の *rotation* がゼロになる点が 2 つ存在するためである。また、2 つの反時計回りの流れ場は非線型項の影響のため等しくはない。このように回転球面上の縦半球において、安定な西岸強化流の存在が確認された。

次に、強制の強さを $68.0 \leq C \leq 72$ で変化させ、流れ場の安定性を調べた。ここでは、主に 0.2 刻みで強制の強さを変えて $t = 90.0$ まで同様の数値実験を行い、エネルギーの振幅の変化から流れ場の安定性を調べた。 $t = 85.5 \sim 90.0$ における $\langle(\text{振幅})\rangle$ と $\langle(\text{振幅})^2\rangle$ を計算した結果が図 3 である。ここで $\langle \cdot \rangle$ は時間平均を示す。この結果は、強制の強さが 69.4 付近で流れの安定性が変化している可能性を示唆している。そこで、強制の強さが 69.4 と 69.6 におけるエネルギーの時間変化を調べた結果、強さが 69.6 で

はほとんど変化しないのに対し、69.4 の場合は非常にゆっくりだが単調に減少している様子が観察される (図 4). そこで、強制の強さ毎にエネルギー振幅の収束値 a を、時刻 $t = 78.0, 84.0, 90.0$ を用いて振幅 A は指数的に収束するとして

$$A = a + b \exp(-ct),$$

から求めた。その結果は図 5 であり、強制の強さが 69.4 から 69.5 の間で解が分岐して、流れの安定性が変化していることがわかる。分岐後の振幅のパラメータ依存性、及び、エネルギー変化が周期的であることから、この分岐はホップ分岐であると考えられる。

この分岐後の流れ場の振動部分を抜き出して求めた固有関数を $f(r, \psi), g(r, \psi)$ とする。

$$\begin{aligned} F(r, \psi, t) &= \Psi(r, \psi, t) - [\Psi(r, \psi, t)], \\ F(r, \psi, t) &= \operatorname{Re}[(f(r, \psi) + ig(r, \psi)) \exp(i\omega t)]. \end{aligned}$$

強制力が $C = 70.0$ の場合に固有関数 $f(r, \psi), g(r, \psi)$ を図示したところ (図 6), 振幅の空間的局在が認められることから、この不安定は流れ場の局所不安定であると考えられる。実際に数値計算の結果から、東西方向 (東向きが正の x 軸) と南北方向 (北向きが正の y 軸) の位相速度と群速度を求めたところ、 $(c_x, c_y) = (-4.787, 3.685)$, $(c_{gx}, c_{gy}) = (0.2715, -6.571)$ となり、局所不安定性の発生場所は北西の端にあることが確認される。ここでは、ロスビーの分散関係式

$$\omega = Uk_x - \frac{\beta k_x}{k_x^2 + k_y^2},$$

ω : 角振動数, U : 平均速度, k_x, k_y : 波数

を用いた。

そこで、強制力の大きさを更に大きくし、その変化と共に局所不安定の発生域を調べた。その結果、強制力が小さいときは局所不安定性は北西端でのみ発生したのに対し、大きな強制力では北西端と南西端の 2 箇所で発生する (図 7)。従って、強制力の大きさの変化に伴い、局所不安定性の発生域も変化するようである。そこで我々は、現在の強制風 u を微妙に変化させた場合に、強制力の大きさの変化が局所不安定性の発生に影響を及ぼすかどうかを調べるために、強制風を東西風の変曲点が赤道または両極に移動するように変化させて (図 8)、同様な数値実験を行った。その結果、東西風の変曲点が両極に移動するにつれ、局所不安定性の発生域が西端 (領域 B)、北西端 (領域 A)、南西端 (領域 C) の順に変化している。各強制風について見てみると、強制力の大きさの増加に伴い、東西風の変曲点が赤道から遠ざかるにつれ、局所不安定性の発生域は、領域 B のみ、領

域 B から領域 A, 領域 A から領域 B, 領域 A のみ, 領域 A から領域 C, 領域 C から領域 A, 領域 C のみに変化する. また, 流線の各格子点における時系列データの周波数スペクトルを調べたところ, 局所不安定性の発生域は次のような特有な周波数帯で分離できることがわかった. 領域 A: $4.88 - 6.18 Hz$, 領域 B: $8.79 - 10.42 Hz$, 領域 C: $7.49 - 9.44 Hz$. 従って, 強制関数が増加すると, 局所不安定は, 流線の各格子点における時系列データの周波数スペクトルによって分離でき, かつ, その発生域を特定することができる (図 9).

4 まとめ

以上の結果をまとめると次のようになる.

- 北半球で西風, 南半球で東風の東西風強制を与えた場合, 強制力が小さいときは, 静止していた流体から定常で安定な西岸強化の流れ場が得られる.
- 強制力が大きくなると, 西岸強化流はホップ分岐によって不安定化する.
- 分岐後の流れ場の振動部分から流れ場に局所不安定が生じ, その発生域は強制力の大きさの変化と共に変化する.
- 強制風を変化させたときの局所不安定は, 流線の各格子点における時系列データの周波数スペクトルによって分離・特定できる.

5 謝辞

本研究にあたり貴重なご助言をいただきました, 岡山大の柳瀬眞一郎先生, 東京農工大の佐野理先生, 北大の林祥介先生, 京大の余田成男先生, 同じく京大の酒井敏先生, 同じく京大の竹広真一先生に深く感謝申し上げます. なお, 数値計算には京大の大型計算機 VPP800 を, またグラフには地球電脳倶楽部の DCL を使用しました.

6 参考文献

- P. B. Rhines, 1975, "Waves and turbulence on a beta-plane", *J. Fluid Mech.*, 69 (1975), pp.417-443.
- G. P. Williams, "Planetary circulations: 1. Barotropic representation of Jovian and terrestrial turbulence", *J. Atmos. Sci.*, 35 (1978), pp.1399-1426.

- S. Yoden and M. Yamada, "A numerical experiment on two-dimensional decaying turbulence on a rotating sphere", *J. Atmos. Sci.*, 50 (1993), pp.631-643.
- T. Nozawa and S. Yoden, "Spectral anisotropy in forced two-dimensional turbulence on a rotating sphere", *Phys. Fluids*, 9 (1997), pp.3834-3842.
- Y.-Y. Hayashi, K. Ishioka, M. Yamada and S. Yoden, "Emergence of circumpolar vortex in two dimensional turbulence on a rotating sphere", *Proceedings of the IUTAM/IUGG Symposium on "Developments in Geophysical Turbulence", Boulder 1998*, edited by R.M.Keer and Y.Kimura.
- S. Yoden, K. Ishioka, Y.-Y. Hayashi and M. Yamada, "A further experiment on two-dimensional decaying turbulence on a rotating sphere", *Nouvo Cimento C*, 22 (1999), pp.803-812.
- K. Ishioka, M. Yamada, Y.-Y. Hayashi and S. Yoden, "Technical approach for the design of a high-resolution spectral model on a sphere: Application to decaying turbulence", *Nonlinear Processes in Geophysics*, 7 (2000), pp.105-110.
- Y. Taniguchi, M. Yamada and K. Ishioka, "Flow pattern formation in a two-dimensional flow on the rotating hemisphere bounded by the meridional line", *Proceedings of the 51st Japan National Congress for Theoretical and Applied Mechanics*, edited by Koji Uetani, 51 (2002), pp.217-223.
- Y. Taniguchi, M. Yamada and K. Ishioka, "Spontaneous formation of zonal currents in two-dimensional Navier-Stokes flow on a rotating hemisphere", submitted.
- S. Li, D.Montgomery and W.B.Jones, "Inverse, cascades of angular momentum", *J. Plasma Physics*, 56, 3 (1996), pp.615-639.
- Li, S., and D.Montgomery, "Decaying two-dimensional turbulence with rigid walls", *Physics Letters A*, 218 (1996), pp.281-291.
- Li, S., and D.Montgomery, "Two-Dimensional Turbulence with Rigid Circular Walls", *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, 9 (1997), pp.167-181.
- K. Yamamoto, S. Yanase and R. Jiang, "Stability of the flow in a helical tube", *Fluid Dynamics Research*, 22 (1998), pp.153-170.

- S. Yanase, N. Goto and K. Yamamoto, "Dual solutions of the flow through a curved tube", *Fluid Dynamics Research*, 5 (1989), pp.191-201.
- S. Yanase and M. Mizuguchi, "Rotating magnetohydrodynamic free-shear flows. I. Linear stability analysis", *Physics of Fluids*, 13 (2001), pp.1946-1955.
- J. Y.-K. Cho and L. M. Polvani, "The emergence of jets and vortices in freely evolving, shallow-water turbulence on a sphere", *Physics of Fluids*, 8 (1996), pp.1531-1552.

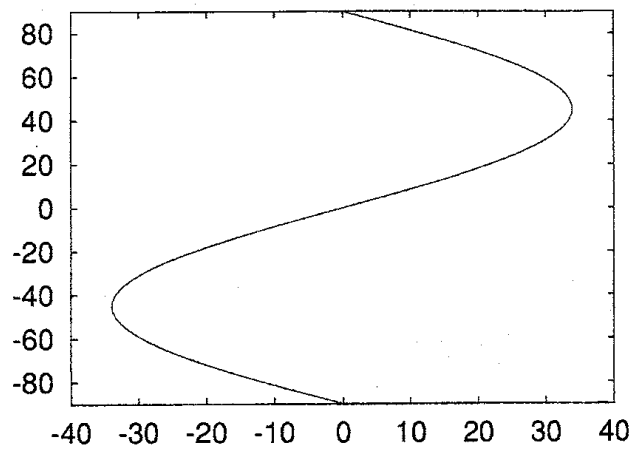


図 1: 東西風強制項 $u = \frac{C}{2} \sin 2\theta$.

(a)

(b)

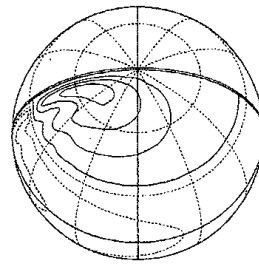
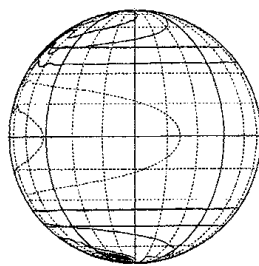


図 2: $C = 68.0$ に強制力に対する $t = 60.0$ の流線を, (a) は赤道上空から, (b) は北極側から見た図.

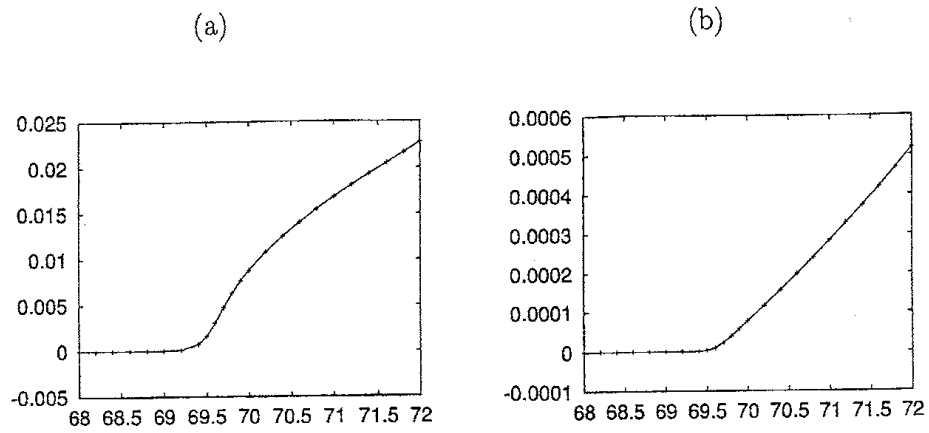


図3: 強制的強さに対し, (a) は (エネルギー振幅) の時間平均, (b) は (エネルギー振幅)² の時間平均.

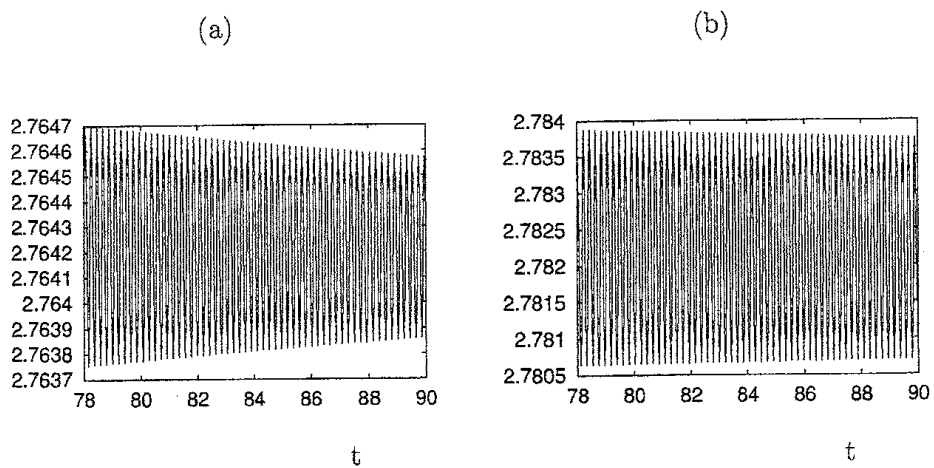


図4: エネルギーの時間変化. (a) $C = 69.4$, (b): $C = 69.6$.

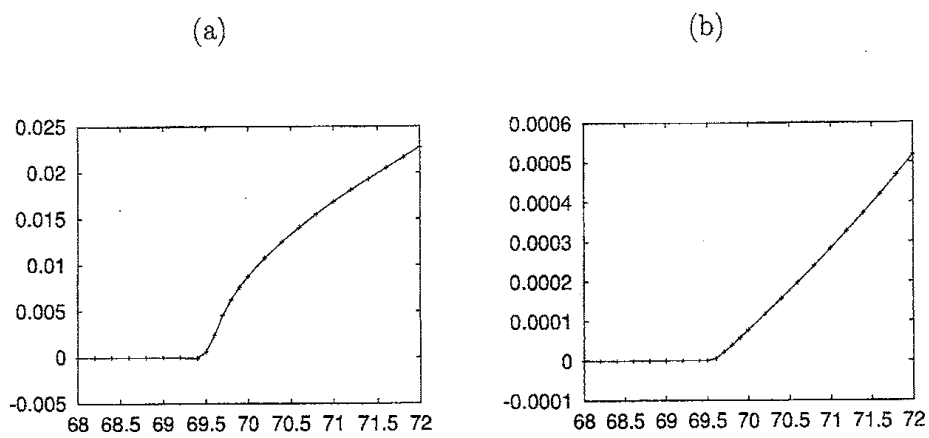


図5: エネルギー振幅の収束値. (a) は a , (b) は a^2 を示す.

(a)

(b)

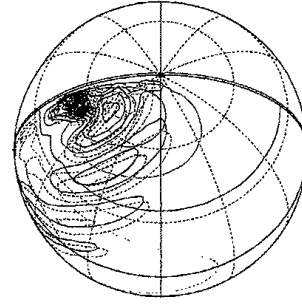
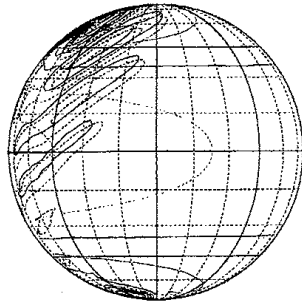


図6: $C = 70.0$, $t = 84.0$. (a): 赤道上空, (b): 北極側. 実線は $f(r, \psi)$, 点線は $g(r, \psi)$. 一点鎖線は流線.

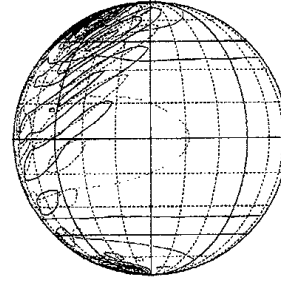
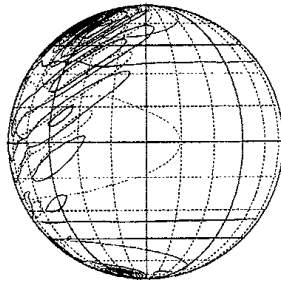
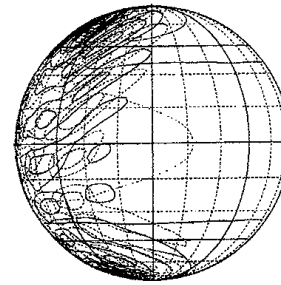
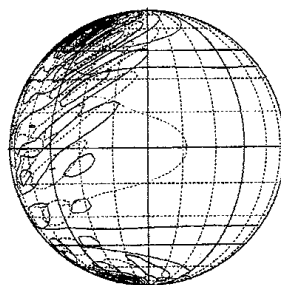
 $C = 74.0$ $C = 76.0$  $C = 76.2$ $C = 76.4$ 

図7: 実線は $f(r, \psi)$, 点線は $g(r, \psi)$. 一点鎖線は流線.

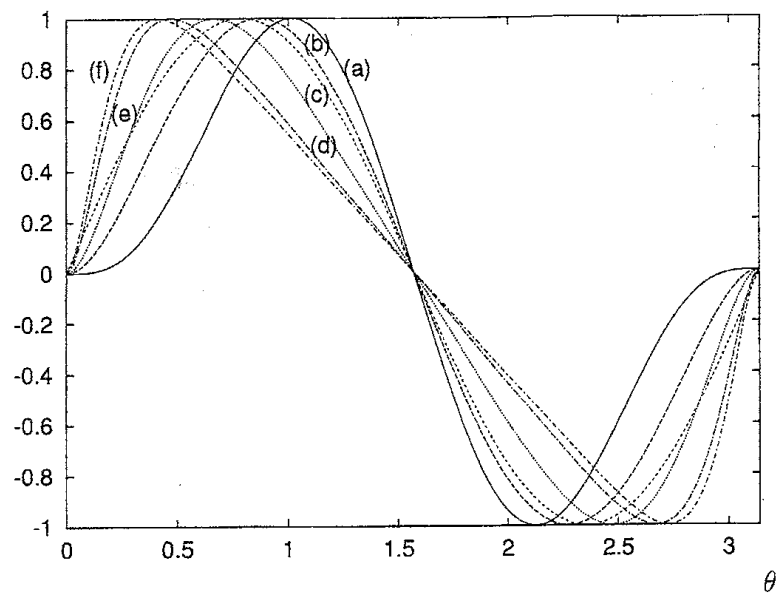


図 8: 色々な強制関数.

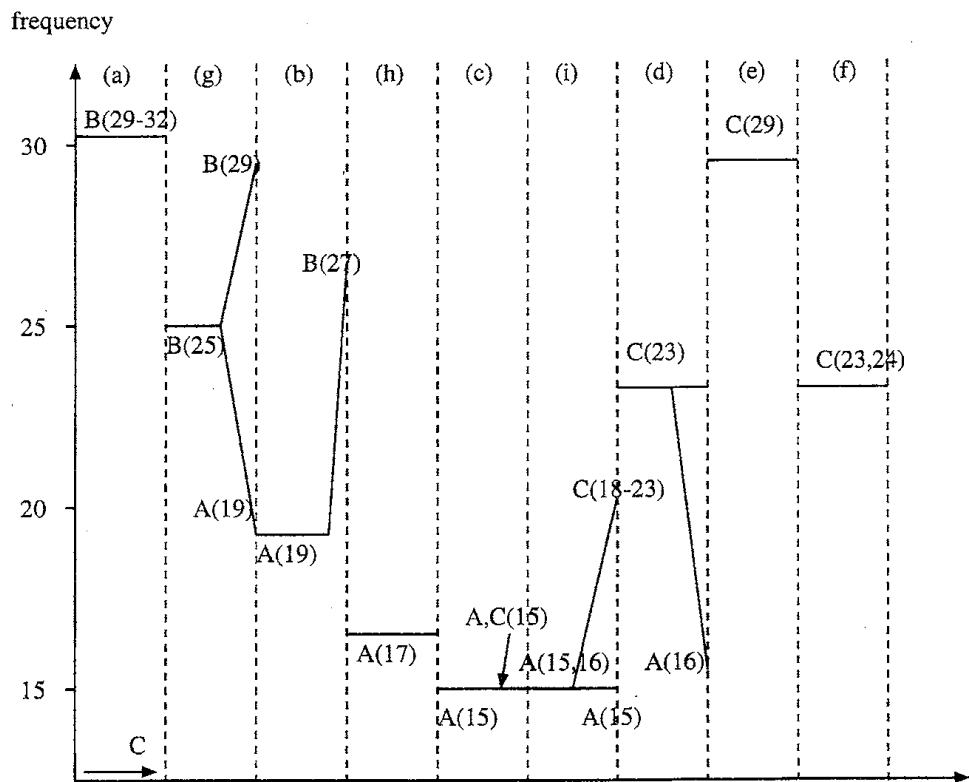


図 9: 各強制関数に対する局所不安定性の発生域. 横軸は変曲点が両端に移動する方向. 各レンジの横軸は強制力の増加.