

3変数クリモナ群について

名大 理 梅村 浩

代数多様体, 写像等はすべて $\mathbb{C}$ 上定義されているものとし,
代数群はすべて連結線型であるとする [7]. n 次元射影空間
 $\mathbb{P}^n$ の双有理自己同型全体のなす群を n 変数クリモナ群と呼び,
 C_n で表わす. C_n に含まれる極大連結代数群を分類するのが目
的である [7]. [7]で述べた結果に, 添字の動く範囲の不注意から
生じる誤りがあるので訂正させて頂く. p 49-52 [7]で (8) が他
の の変換群 に入ると言っているが, そうならば (5) の添字に $m > 0 > n$ も含
めなければならぬ. もし (5) を $m \geq n \geq 1$ の場合と, $m > 0 > n$
の場合の 2 つに分けると, 結局 Enriques, Fano の結果が正し
いことがわかる. 定義等についで [7] も, 詳しく証明につい
ては [3], [4], [5] を参照されたい.

§ 1. Enriques-Fano の定理

まず代数群がクリモナ群に含まれるとらえることを定式化す

3. その為には、次の定理が基本的である。

定理 (Weil). G を代数群, X を代数多様体, (G, X) を pseudo operation, つまり G の X への有理的な作用とする。そのとき, algebraic operation (G, X') で pseudo operation として (G, X) と同型なものか存在する。

Weil の定理を用いると次は同値である (2) と (1) の定義と見えてよい):

(1) C_m に含まれる代数群 G を与える,

(2) G の $\mathbb{P}^n$ への有理的かつ効果的な作用, つまり効果的な pseudo operation $(G, \mathbb{P}^n)$ を与える,

(3) G の多様体 X への効果的な作用 (G, X) および双有理同型 $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^n$ を与える。

以上のことから, G と共役な C_m の部分群には (3) でちとちり換えたものが対応している。したがって共役を無視すれば C_m に含まれる代数群 G と, n 次元有理多様体への G の効果的な作用が 1:1 に対応する。一方 C_m に含まれる代数群は線型であることも証明される。

次に Enriques-Fano の定理を述べる。定理の中に表われる記号は、定理の後で説明する。

定理 (Enriques, Fano). (I) $G \in C_3$ に含まれる代数群とする。そのとき、 G は其役を除いて次の作用の決める C_3 の代数部分群に含まれる。

$$(P-1) (PGL_4, \mathbb{P}^3).$$

$$(P-2) (PSO_5, \text{2次曲面 } \subset \mathbb{P}^4).$$

$$(E-1) (PGL_2, PGL_2/\Gamma), \Gamma \text{ は正8面体群}.$$

$$(E-2) (PGL_2, PGL_2/\Gamma), \Gamma \text{ は正20面体群}.$$

$$(1) (PGL_3 \times PGL_2, \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1).$$

$$(2) (PGL_2 \times PGL_2 \times PGL_2, \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1).$$

$$(3) (PGL_2 \times \text{Aut}^0 F'_m, \mathbb{P}^1 \times F'_m), \text{ ここで } m \geq 2 \text{ なる整数}.$$

$$(4) (PGL_3, PGL_3/B), B \text{ は } PGL_3 \text{ の Borel 部分群}.$$

$$(5) (PGL_2, PGL_2/D_{2m}), \text{ 这里 } D_{2m} \text{ は位数が } 2m \text{ の dihedral 群, } m \geq 2 \text{ なる整数, 但し } 3 \text{ はのぞく}.$$

$$(6) (G, G/H_{m,n}), \text{ ここで } G = G_m \times SL_2 \times SL_2, H_{m,n} = \{ (t_1^m t_2^n, \begin{pmatrix} t_1 & x \\ & t_1^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_2 & y \\ & t_2^{-1} \end{pmatrix}) \in G \mid t_1, t_2 \in \mathbb{C}^*, x, y \in \mathbb{C} \}, m, n \text{ は } m > 0 > n \text{ をみたす整数 (正確にはこれから定まる効果的な作用)}.$$

$$(7) (\text{Aut}^0 J'_m, J'_m), \text{ ここで } m \geq 2 \text{ なる整数}.$$

$$(8) (\text{Aut}^0 L'_{m,n}, L'_{m,n}), \text{ ここで } m, n \text{ は } m \geq n > 0 \text{ なる整数}.$$

$$(9) (\text{Aut}^0 F'_{m,n}, F'_{m,n}), \text{ ここで } m, n \text{ は } m > n \geq 2 \text{ なる整数}.$$

(10) $(\text{Aut}^0 F'_{m,m}, F'_{m,m})$, ここで $m \geq 1$ なる整数.

(11) $(\text{Aut}^0 E'^l_m, E'^l_m)$, ここで m, l は整数であり, $m \geq 2$ か $l \geq 0$ であるか, 又は $m=1$, かつ $l \geq 2$ である.

(12) PGL_2 の一般化的にも非推移な作用で, 各 orbit は $(\text{PGL}_2, \text{PGL}_2/G_m)$ と同型である. これらの部分群は種数 $g \geq 1$ の超楕円曲線の moduli 空間によつてパラメーターが与えられる.

(II) 上に定義した作用 (P-1), (P-2), (E-1), (E-2), (1), $\dots$, (12) の定める G_3 の部分代数群は G_3 の部分代数群として極大である.

定理に現われた記号を説明する. (P-1), (P-2), (E-1), (E-2), (1), (2), (4), (5), (6) は説明の必要がないと思^われる. $F'_m = \text{Spec}(\bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{O}(-km))$, つまり $\mathbb{P}^1$ 上の line bundle $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)$ である. $F'_{m,m}$ は $\mathbb{P}$ 上の vector bundle $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)$ の $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n)$ である, $\mathbb{RP} \ni F'_{m,m} = \text{Spec}(\bigoplus_{k \geq 0} S^k(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-m) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n)))$ である. $L'_{m,m}$ は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の line bundle $p_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-m) \otimes p_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$, ここで p_i ($i=1, 2$) は projection である, つまり, $L'_{m,m} = \text{Spec}(\bigoplus_{k \geq 0} p_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-km) \otimes p_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-km))$. E'^l_m は

次の exact sequence を定^める $\sqrt[m]{F'_m}$ 上の $\text{Aut}^0(F'_m)$ -homogeneous A^1 -bundle (Aut^0 は後で説明する),

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{F'_m} \rightarrow E \rightarrow \mathcal{O}_{F'_m}(2-lm) \rightarrow 0.$$

ここで $\mathcal{O}_{F'_m}(2-lm) = \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2-lm)$, $\pi: F'_m \rightarrow \mathbb{P}^1$ は自然な写像.

則の作用の定義に関しては [5], [7] を参照されたい。最後に $\text{Aut}^0(\quad)$ について述べる。 X を非特異であるが、必ずしも完備でない代数多様体とする。 X の *tangent bundle* を T であらわす。もし、 $H^0(X, T_X)$ の次元が有限であれば、 X に効果的に作用する最大の連結、 *reduced* 代数群を考えることができる [5], その代数群を $\text{Aut}^0 X$ であらわす。定理にあらわある、 Aut^0 とする代数多様体はすべて、 $H^0(X, T_X)$ が有限次元であることが示される。

§2. Equivariant completion についで.

有理曲面の相対極小モデルと C_2 に含まれる極大(連結)代数群が 1:1 に対応していた。つまり、 C_2 の極大部分代数群は、相対極小有理曲面 X があって、 $(\text{Aut}^0 X, X)$ として表わせるのであった。3次元有理多様体の相対極小モデルの定義をさぐうために、定理の作用の *equivariant completion* を調べるのは極めて興味のあることである。大部分のものは自然な *equivariant compactification* をもつ。まず問題になるのは (E-1), (E-2), (5) の場合である。 (5) の場合より、 (E-1), (E-2) の方が易いようにある。 (E-1) と (E-2) はどちらも似ている。 (E-1) をやってみよう。 $(\text{PGL}_2, \text{PGL}_2/P)$ より換りが簡単なので $(\text{SL}_2, \text{SL}_2/P)$ を考察する、ここで $\pi: \text{SL}_2 \rightarrow \text{PGL}_2$ は自然な写像、 $P' = \pi^{-1}(P)$ である。

$SL_2 \rightarrow GL(E)$ を表現とし, $v \in E$ を Γ の固有ベクトルとする.
 さらに v は SL_2 の固有ベクトルと仮定する. Γ' は SL_2 の部分代
 数群として極大であるので, $\Gamma' = \{g \in SL_2 \mid v \in P(E) \text{ かつ } gv = v\}$
 となる. SL_2/Γ' の閉包 $\overline{SL_2/\Gamma'}$ に SL_2 は作用する. つまり,
 equivariant compact 化 $(SL_2, \overline{SL_2/\Gamma'}) = (SL_2, (E, v))$ がえら
 れた. 射影的な equivariant compact 化はすべて, この方法でえ
 られる. 特に E として, SL_2 の既約表現をと, てみよう. 即ち
 V を SL_2 の 2 次の既約表現とすれば, $E = S^m(V) = \{V \text{ 上の } m \text{ 次}$
 $\text{斉次多項式全体}\}$ となる.

$$\text{Pic}(E, \mathcal{O}(1)) \cong \mathbb{Z} \langle \mathcal{O}(1) \rangle, \text{ したがって}$$

定理 (白井). E が既約であり, $(E, \mathcal{O}(1))$ が非特異ならば $(E, \mathcal{O}(1))$ は
 Fano である.

この定理は森理論の応用として証明される. Γ が正 8 面体
 群であるという仮定の場合, Γ の半不変式は $f(x_1, x_2) = x_1^8 x_2^8 - x_1^{12} - x_2^{12}$,
 f の Hessian $W(x_1, x_2) = x_1^8 + 14x_1^4 x_2^4 + x_2^8$, f と W の Jacobian
 $K = x_1^{12} - 33x_1^8 x_2^4 - 33x_1^4 x_2^8 + x_2^{12}$ で表わされる. $(S^4(V), f)$ は非特異
 であることがわかる. $(S^8(V), W)$, $(S^{12}(V), K)$ も非特異であるう
 かと講演では言ったが, そうではなく両方とも特異である.
 $(S^6(V), f) = SL_2/\Gamma' \cup SL_2/\Gamma_m \cup SL_2/B$ と SL_2 -orbit に分かれた.
 $(S^8(V), W)$ は $(S^6(V), f)$ を SL_2/B を中心として blow-up (SL_2/Γ_m)

$\triangle \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ を $\mathbb{P}^2$ に縮めたものである. $(S^6(V), W) = SL_2/P' \cup SL_2/G_m \cup SL_2/B$ と SL_2 -orbit に分解する. $(S^{12}(V), K)$ は $(S^6(W), \dagger)$ を 2 回 $\mathbb{P}^1$ で blow-up し, 2つの $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ を $\mathbb{P}^2$ に縮むことにより得られる. $(S^{12}(V), K) \neq SL_2/P' \cup SL_2/G_m \cup SL_2/B$ と SL_2 -orbit に分解する. 以上 compact 化の研究は向井氏との共同研究による.

問 $(SL_2, SL_2/P)$ の equivariant compact 化 $(SL_2, (S^6(V), h))$ が non-singular になれば $(SL_2, (S^6(V), \dagger))$ と同型か?

向井氏の上の結果を伏せば, 問の仮定があれば $(SL_2, (S^6(V), h))$ は $\text{Pic} \simeq \mathbb{Z}$, Fano であるので, Ishikowski の分類を伏せても解答が出せようであるが, 後の分類の過程には論理的欠陥があるのが発見されたので使用しなう方がよい. 何かある case は生じなうと主張しているが, それが正しくなりこゝか向井氏によって示された. 我々は実に $SL_2/\text{Icosahedral}$ の 12 次式による equivariant compactification によって与えられる (森-向井氏による).

参考文献

- [1] Enriques, F. e Fano, G.: Sui gruppi di trasformazioni cremoniane dello spazio, Annali di Matematica pura ed applicata, s. 2^a, tom. 15, 1897, 59-98.
- [2] Fano, G.: I gruppi di Jonquieres generalizzati, Atti della R.

Acc. di Torino, vol. 33°, 1898, 221-271.

- [3] Umemura, H.: Sur les sous-groupes algébriques primitifs du groupe de Cremona à trois variables, Nagoya Math. J. vol. , 198, .
- [4] ———: Maximal algebraic subgroups of the Cremona group of three variables, Nagoya Math. J. vol. , 198
- [5] ———: de Jonquières 変換の分類(準備中).
- [6] Weber, H.: Lehrbuch der Algebra II, Reprinted by Chelsea Publishing comp. , New York.
- [7] 植村 浩: 3変数 Cremona 群に含まれる連結代数群について, 第3回代数セミナー報告集, 1981.