

一階の擬微分作用素連立 Lie 環に持つ無限次元 Lie 群と Schrödinger の相対論的量子力学

都立大・理 大森 英樹

まず、物理学を離れて、純粹数学的に、一般相対論の方が Newton 力学よりも無限次元 Lie 群論的に究じた体系であることを示す。次にこれを量子化した場合どういう問題が生ずるの
かと論ずる。量子化したものが表題で述べたものとなるのだが、完全にはできていない。

§1 Hamilton 力学

Hamilton 力学とは古典力学の持つ数学的側面を非常に美しく述べたものであり、これまで表れたすべての力学はこの中に包括されてしまうので、今日ではかなり原理的なものと解
釈されているものである。細部を無視して公理臭く述べれば、
次のようになる：

- (1) 考察されている力学系に対応して、相空間と呼ばれるシンプレクティック多様体 (M, Ω) が定まる。
- (2) 考察されている力学系に対応して、Hamiltonian と呼ばれ

るある函数 H が存在する。

(3) 上の Hamiltonian H によって統括される力学的運動は、 X_H なる Hamiltonian vector field の積分曲線として記述される。但し X_H は $dH = \Omega \lrcorner X_H$ で定義される M 上の vector field である。

さて、 M 内の点は、力学系の状態を表わす。従って、力学的に閉じている系を考えている限り、 X_H の積分曲線はすべての時刻で定義できていはいと困るだろう。従って、

(a) X_H は完備なベクトル場である。

と仮定するのは自然であろう。

一方、Hamilton 力学と同値なものに、Poisson 力学というのが
ある。これは次のように述べられる。 f は M 上の任意函数、 φ_t は X_H より生成される one parameter 群とする。このとき、 $f_t = \varphi_t^* f$ は f の時間発展という。

$$\frac{d}{dt} \varphi_t(x) = X_H(\varphi_t(x)) \iff \frac{d}{dt} f_t = -\{H, f_t\}.$$

但し、 $\{, \}$ Poisson 括弧積である。

古典的 Poisson 力学では f は M 上の任意函数であるが、量子論からの影響を考慮して、 f に 'Observable (観測可能量)' という意味をつけよう。そうすれば、任意の函数が Observable とは考えにくいから、 M 上の C^∞ 函数全体の中の部分集合として、Observable $\mathcal{O}$ という集合があるものと考えてみよう。

ところで、Observable という概念は Hamiltonian と同様、数学

的には無定義語である。しかし、力学系を考える以上、次の事は約束されねばならない:

(b) Hamiltonian と称する函数 H は $\mathcal{O}$ の元である。

しかし、Hamiltonian の定義はほいのだから、次もしうがめらまい:

(b') $\mathcal{O}$ の元はすべて Hamiltonian になり得る。

このように考察を進めていけば、 $\mathcal{O}$ としては次の性質はどうしても仮定しなければならなくならないと思われる:

(A,1) $\mathcal{O}$ は Poisson 括弧積に関して Lie 環と成す。

(A,2) $\forall f \in \mathcal{O}$ に対し、 X_f は完備なベクトル場となる。但し、 X_f は $df = \Omega - X_f$ で定義される。

(A,3) $(\exp t X_f)^* \mathcal{O} = \mathcal{O}$ 但し、 $\exp t X_f$ は X_f により生成される one parameter 群。

《注》一寸した仮定があれば (A,1) $\Leftrightarrow$ (A,3) だが一般にはこの二つは独立である。(A,3) は、 $f \in \mathcal{O}$ の時間発展 f_t があつて突然 Observable でなくなるのは不自然という理由による。

《注》 M がコンパクトの場合は、 $\mathcal{O} = C^\infty(M)$ (C^∞ 函数全体) とすれば (A,1) $\sim$ (A,3) がみたされる。

§2 Newton 力学

M がコンパクトでないとき様々なることが起きる。一例として、

M として、配位空間 N の余接空間 T^*N ととて考えよう。 $M = T^*N$ は自然にシンプレクティック形式 Ω を持つ。また、 N には C^∞ の計量 g_{ij} (この逆行列を g^{ij} と記す) が定義されているものとする。さて、Newton 力学とは、Hamiltonian として

$$H = \frac{1}{2} g^{ij} p_i p_j + V \quad \dots (*)$$

の形の函数をとった Hamilton 力学である。但し、 V は N 上の C^∞ 函数を自然に $M = T^*N$ 上のそれと思い直したもので、Newton 力学の形式だけを論ずる時には任意にとつておまわれない。ところから次の奇妙な定理が証明されてしまうのである：

〈定理〉 $\mathcal{O}$ を (T^*N, Ω) 上の Observable 全体とし、 $(A, 1), (A, 2)$ とみているものとする。更に $\mathcal{O}$ は Newton 力学の Hamiltonian $H(*)$ を一つでも含んでいるものとする。このとき、次が成立つ： $f \in C^\infty(N) \cap \mathcal{O}$ かつ 真 $x \in N$ で $j_x^2 f = 0$ ならば、すべての $k \geq 2$ で $j_x^k f = 0$ 。従つて、 N 上 $g_{ij} \in C^\infty$ のときには $\dim C^\infty(N) \cap \mathcal{O} \leq \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ $n = \dim N$ 。

この定理は、 $j_x^2 f = 0$ で $j_x^k f \neq 0$ $k \geq 3$ とすると、 $\mathcal{O}$ は必ずある函数 g で X_g が完備ではないものを含むことと証明するのである。証明法の系として、

〈系〉 $N = \mathbb{R}^n$ のとき、 $T^*N = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上の自然な座標に戻する 2 次式の全体を P_2 とすると、 P_2 は $(A, 1) \sim (A, 3)$ とみたすが、 P_2 を真に含むような $\mathcal{O}$ で $(A, 1), (A, 2)$ とみたものは無い。

ことがわかる。ちなみに P_2 は調和振動子を含んでいる。

§3 相対論的 Hamiltonian

上の奇妙さを救う為には相対論と考えると良い。以下では簡単の為には N (配位空間) はコンパクトとする。 $\mathbb{R} \times N$ を時空と考え。そこに次のような Lorentzian metric を入れる:

$$dt^2 = c(x)^2 dt^2 - g_{ij}(x) dx^i dx^j$$

dt^2 は t と陽に含まぬので、静線素と呼ばれる。このような時空のモデルは相対論に於てはそれほど特殊なものではない。この時空で測地線の方程式 (特に時局的 x は null 測地線) を扱う事は、 T^*N 上で

$$H = c(x) \sqrt{1 + g^{ij} p_i p_j} \quad \dots (**)$$

を Hamiltonian として X_H の積分曲線を扱うことが同等であることが良く知られている。(**) を相対論的 Hamiltonian と呼ぶことにしよう。上のよう静線素で考える限り、一般相対論的力学とは、Hamiltonian として (**) の形のものをとった Hamilton 力学と同じものである。(Hamilton 力学は相対論とも許容しているのである。) Newton 力学では (*) のうち potential V はほぼ自由にとれた。相対論的 Hamiltonian (**) に於ては、 g_{ij} がほぼ自由にとれるのである。

(**) に於ける $H = H(x, p)$ がどのような函数か調べる為

に、 N に計量 g_{ij} を一つ固定し、 $r = \sqrt{g^{ij} p_i p_j}$ とする。

〈Lemma〉 すべての相対論的 Hamiltonian は次のような漸近展開を持つ:

$$H(x, p) \sim a_{-1} r + a_0 + a_1 r^{-1} + a_2 r^{-2} + \dots + a_m r^{-m} + \dots$$

但し、 a_j は g_{ij} を計った単位余接球 bundle 上の C^∞ 函数である。

$\mathcal{H}$ を上のような漸近展開を持つ T^*N 上の函数全体とする。

〈定理〉 $\mathcal{H}$ は (A,1) ~ (A,3) を満たす。即ち、相対論的 Hamiltonian と考えている限り、Newton 力学のような困難は生じない。

§4 Regular Fréchet-Lie groups

前章の定理は実はもっと強い形で書くことができる。即ち、 $\mathcal{H}$ は、ある種の無限次元 Lie 群の Lie 環になっているのである。この事は、相対論の方が Newton 力学よりも群論的に閉じた形をしていることを示している。その "ある種の Lie 群" というものを定義しよう。その為には少し、Lie 群論の現情と見ることから始めよう。

有限次元 Lie 群論・Lie 環論は今日の幾何学にとって必要不可欠の概念であるが、それとは別に無限次元 Lie 環論の方は数学や、数理物理学のあちこちに存在している。微分幾何学に

於ては、ベクトル場の芽の作る無限次元単純 Lie 環の分類理論が E. Cartan によって行われた。([18], [10], [5], [9], [17]) 代数の中では non-associative algebra に関連して Lie 環の代数的側面が Amayo-Stewart の本 [1] に詳しく論じられている。作用素解析に於ては、様々な条件下での単純 Banach-Lie 環の分類論が P. de la Harpe [3] によって論じられている。物理数学に於ては、無限次元 Lie 環の物理への応用が Joseph [6] によって論じられている。

このような Lie 環論を見ていると当然わいてくる疑問は、
 “上で扱われているような Lie 環は全部何れある“Lie 群”の Lie 環であろうか？”
 ということであろう。これに対する答は、残念ないう no である。Van Est-Kontrhagen [19] によって、
 “Banach-Lie 環であって、いかなる Banach-Lie 群の Lie 環にもならないものが存在する」が知られている。従って、次なる疑問は当然、“Lie 群に対応しないような Lie 環に、幾何学的又は物理的な意味があるのであろうか？”であろう。幾何学に於てはむしろ Lie 群の方が“実在”として、Lie 環の方は、それを調べる為の代数的手段と理解されて来たのであり、物理に於てもそうであろう。従って、上のようなことを疑問として持てば、Lie 環論ではなく、Lie 群論を作る必要とわいてくるのである。

ところで、最初から大域的な群として考察されたものがあ
る。それは Banach-Lie 群である。([4], [2] 参照) しか
し、極めて残念な事に、Banach-Lie 群は有限次元多様体に極めて作
用しにくいのである。([11], [12] 参照。作用する例は非常に
少ない。) この理由によって、Banach-Lie 群よりもっと広い概
念で、かつ扱いやすい対象が要求される。筆者が、肯定義
に強 ILB-Lie 群の概念はこの要求とある程度みたものであ
った。これによって、Cartan のリストにある変換群はすべて
含まれることになった。但し、考える多様体は全部コンパクト
にしている。(この辺については [13] 参照。) 副産物として、
コンパクト多様体上の C^∞ 同相の群の様々な部分群が強 ILB-Lie
群となることもわかった。

しかし、一方、non-compact 多様体上の変換群と扱うには、
強 ILB-Lie 群の概念では狭すぎる場合も沢山出て来た。特に
特異点集合を不変にするような群の場合にそうである。([14]
[15] 参照。) 例えば §2 の記号を使って、 $\mathcal{Q}_\alpha(\overline{T^*N})$ なる群と考
えよう。これは、 T^*N から自身への symplectic diffeomorphism
であって、 T^*N の無限遠方にある余接球バンドル上に接触変
換を引き起すもの全体の集合である。この群と扱うのは、 $\mathcal{Q}$ が無
限遠方の余接球バンドル上にはまだ拡張できない為、[13] で
扱ったような楕円型複体の枠で扱うことができないので難し

い。そこで、 $\mathcal{Q}_\alpha(T^*N)$ のような群はもう少し広い枠で扱った方が利口であろうという結論になるのである。

《定理》 $\mathcal{Q}_\alpha(T^*N)$ は regular Fréchet-Lie 群である。前章の $\mathfrak{g}$ は、上の群の Lie 環 $\mathfrak{L}_\alpha$ の余次元有限の閉 ideal に同形となる。

前章の定理は実は上の定理の系である。

さて、regular Fréchet-Lie 群の定義を始めよう。

Fréchet-Lie 群というのは、Fréchet 多様体と位相群の結合された概念であるのだから、これを定義するには写像の微分可能性の定義さえあれば良い。以下では Fréchet 空間 といえば、すべて局所凸性のあるものと仮定する。

E, F と Fréchet 空間、 U と E の開集合とする。 $f: U \rightarrow F$ が C^r 写像 ($r > 0$) であるとは、(C^0 とは連続ということに) して

(1) f は C^{r-1} 写像である。

(2) 各 $x \in U$ に対し、 r -線形で連続な写像 $(D^r f)(x): E \times \cdots \times E \rightarrow F$ があり、

$$F(v) = f(x+v) - f(x) - (Df)(x)v - \frac{1}{r!} (D^r f)(x)(v, \dots, v)$$

とすると、

(2, i) $R(t, v) = \begin{cases} F(tv)/t^r, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$ は $\mathbb{R} \times E$ の点 $(0, 0)$ で連続。

(2, ii) $D^r f: U \times E \times \cdots \times E \rightarrow F$ が連続。

となる場合を云う。

この微分可能性の定義で大体並通の場合と同様の計算ができる事がわかる。([7], [8]) Fréchet Lie 群の概念はやはり広いのでこの辺まで概念を広げておけば十分のようは元があるであろうが、Fréchet-Lie 群には一つ重大な欠点がある。それは Lie 環 $\mathfrak{g}$ から Lie 群 G の exponential map の存在が保証されていないという事である。(これは、多分一般の Fréchet-Lie 群では反例があるだろうと思われる。) そこで、次の性質 (P.1) ~ (P.4) をみたすような Fréchet-Lie 群を regular Fréchet-Lie 群と呼んで特別扱いをすることにしよう: G を Fréchet-Lie 群とする。

(P.1) G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ から G の中への exponential map と呼ぶ C^∞ 写像 $\exp$ があって、 $(d\exp)_0: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ は恒等写像、かつ $\exp tu$ は $\forall u \in \mathfrak{g}$ に対して G の one parameter subgroup である。

(P.2) G 内の C^∞ 曲線 $c(t)$, $t \in [0, \infty)$, $c(0) = e$ (単位元) とするものに対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} c(t/n)^n$ は $\exp t \dot{c}(0)$ に右一様位相に依りて広義一様収束する。

(P.3) $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ を区間 $[a, b]$ の分割とする。 $v \in [a, b]$ から $\mathfrak{g}$ への C^∞ 写像とする。このとき積 $g_m(t)$ と

$$g_m(t) = \exp(t - t_{k-1})v(t_{k-1}) \cdots \exp(t_2 - t_1)v(t_1) \exp(t_1 - t_0)v(t_0)$$

と定義する。但、 k は $t_{k-1} < t \leq t_k$ とする数である。この

$g_m(t)$ は $\Delta_m = \max |t_{j+1} - t_j|$ が 0 に行くとき、一様に収束する。

極限を、 $\int_a^t (1 + v(s)ds)$ と書き、積々分と呼ぶ。

(P.4) $P(\mathcal{G}) \in [0,1]$ から $\mathcal{G}$ 上の C^∞ 写像全体とする。 $\mathcal{G}$ は locally convex Fréchet space だったから、 $P(\mathcal{G})$ は C^∞ -uniform topology で再び locally convex Fréchet space となる。 $\prod_0^t (1+v(t))dt$ は $[0,1] \times P(\mathcal{G})$ から $\mathcal{G}$ への C^∞ 写像となる。 かつ、 $g(t) = \prod_0^t (1+v(t))dt$ は、微分方程式 $\frac{d}{dt} g(t) = v(t) \cdot g(t)$ ($= dR_{g(t)} v(t)$) の一意的解である。

(P.1) ~ (P.4) は、大体、非常に調子の良い性質をみたす exponential map の存在を要求しているのである。 $\mathcal{Q}_a(T^*N)$ のような群は、強 ILB-Lie 群でないが、やはり調子が良いのである。次に regular Fréchet-Lie group でどんな事がいえるかを見てみよう。

(1) 有限次元 Lie 群、Banach-Lie 群、強 ILH-Lie 群、強 ILB-Lie 群は regular Fréchet Lie 群である。(しかし、すべての Fréchet-Lie 群が regular であるとははいと思われない。)

(2) regular Fréchet Lie 群の局所構造は、その Lie 環 (位相もこめて) により決定される。(しかし、いかなる位相 Lie 環が regular Fréchet Lie 群の Lie 環であるかという特徴づけは何かをいっていない。)

(3) G は regular Fréchet-Lie 群、 $\mathcal{G}$ はその Lie 環、 $\mathfrak{g}$ は $\mathcal{G}$ の余次元有限の部分環とする。 そうすれば、 $\mathfrak{g}$ は Lie 環として再び regular Fréchet Lie 群が G の中に作れる。

(4) G は regular Fréchet-Lie 群とし、 H は G の Fréchet-Lie

部分群 (部分群を Frechet submanifold とするもの) とすれば、

H は regular Fréchet-Lie 群である。

(5) $G \in$ regular Fréchet-Lie group, H を閉部分群とする。このとき、 $\mathfrak{g} = \{u \in \mathfrak{g}; \exp tu \in H, \forall t \in \mathbb{R}\}$ とすれば $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}$ の閉部分環となる。

(6) (5) に於て、 $\text{codim } \mathfrak{g} < \infty$ ならば H は regular Fréchet-Lie 群である。

(注意) factor group に関しては、Lie 環の部分環に対して、位相線形空間として直和因子があるかという問題と関連して一概に云えはいが、一寸面白いような問題が沢山みつかる。

この章の定理の証明は長くなるので別の機会にやる。

§5 量子化.

§3 の $\mathcal{S}$ が N 上の擬微分作用素の表束の空間であることに注目する。(作用素の order は 1 階である。) $\mathcal{S} = \mathcal{S}^{(1)}$ とし、

$\mathcal{S}^{(k)}, k \leq 0$, と

$$\mathcal{S}^{(k)} = \{f(x, p) \in \mathcal{S}; f \sim a_k r^{-k} + a_{k+1} r^{-k-1} + \dots\}$$

と定義し、 $\mathcal{S}^{(k)}$ の複素化を $\tilde{\mathcal{S}}^{(k)}$ とする。 $\{\tilde{\mathcal{S}}^{(k)}, \tilde{\mathcal{S}}^{(l)}\} \subset \tilde{\mathcal{S}}^{(k+l-1)}$

である。 $C^\infty(S_N^*)$ と N の単位余接環バンドル S_N^* 上の実数値 C^∞ 函数の全体とする。 $\mathcal{S} = C^\infty(S_N^*) \mathbb{R} \oplus \mathcal{S}^{(0)}$ に注意する。更に、

$$\mathcal{S}^\# = C^\infty(S_N^*) \mathbb{R} \oplus \tilde{\mathcal{S}}^{(0)}$$

と置く。 $a \in \mathcal{S}^\#$ に対して、 N 上の作用素 $P_\phi(a)$ を

$$(P_\phi(a)f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T_x^*} \int_{T_x} a(x, p) e^{-i\langle p, g \rangle} \phi(g) f(\text{Exp}_x g) dg dp$$

で定義し、 a を表象とする擬微分作用素と呼ぶ。 f は N 上の複素数値函数、 Exp_x は N 上の C^∞ 接続 π を与える exponential map $g \in T_x$ (M の x に於ける接空間) ϕ は $|g| \gg 0$ のとき 0 となる cut off 函数で、 $|g| \equiv 0$ では $\phi \equiv 1$ とするもの。 $p \in T_x^*$ (T_x の dual space) で、 $\langle p, g \rangle$ は自然な内積、 dg, dp は T_x, T_x^* 上の自然な体積要素である。

$L_{-\infty} \in C^\infty$ は核 $K(x, y)$ で核表示された smoothing operator

$$(Kf)(x) = \int K(x, y) f(y) dv_y \quad (dv_y \text{ は } N \text{ 上の体積要素})$$

の全体とする。上の $P_\phi(a)$ の定義は ϕ のとり方に依存しているが、実は、別の ϕ' を使っても

◀ Lemma ▶ $P_\phi(a) - P_{\phi'}(a) \in L_{-\infty}$

が成立する。一方 $\{P_\phi(a); a \in \mathcal{S}^\#\} \supset L_{-\infty}$ は云々正しいので、階数 1 の擬微分作用素という時には、 $\{P_\phi(a); a \in \mathcal{S}^\#\} + L_{-\infty}$ の元のことだと定義する。これを $\mathcal{O}^{(1)}$ と書く。

◀ Lemma ▶ $\mathcal{O}^{(1)}$ は次の括弧積に関して Lie 環と成す。

$$\{A, B\} = \frac{1}{\sqrt{-1}} [FA, FB], \quad ([,] \text{ は普通の交換子積})$$

$\mathcal{O}^{(0)} \in \mathcal{O}^{(1)}$ の元で、特に $\{P_\phi(a); a \in \mathcal{S}^{(0)}\} + L_{-\infty}$ の元であるもの (階数 0) の全体とする。 $\mathcal{O}^{(0)}$ は $\mathcal{O}^{(1)}$ の中の ideal である。

◀ Lemma ▶ $\mathfrak{g}^{(1)}/\mathfrak{g}^{(0)}$ は S_N^* (単位余接球バンドル) 上の接触変換群の Lie 環と同形である。従って、 $\mathfrak{g}^{(1)}/\mathfrak{g}^{(0)}$ は Lie 環に持つ regular Fréchet-Lie group は存在する。

さて、 $\mathcal{H}$ が相対論的 Hamiltonian を含んでいたように、 $\mathfrak{g}^{(1)}$ は Schrödinger の相対論的量子力学に出てくる Hamiltonian

$$c(x) \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \Delta}$$

を含んでいる。そこで、相対論の場合と同様、 $\mathfrak{g}^{(1)}$ は Lie 環に持つ regular Fréchet-Lie group は存在する、という事実が問題となる。この問題を考えてみよう。

まず、 $\mathfrak{g}^{(1)}$ に Fréchet space としての構造を入れねばならない。その為、 $\mathcal{C}^\infty(S_N^*)$ を S_N^* 上の複素数値函数とし、 $\mathfrak{g}^{(-l)}$ を階数 $-l$ の擬微分作用素とする。 $\mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{g}_l \oplus \mathfrak{g}^{(-l)}$ 且、 $\mathfrak{g}_l$ は $\{P_\phi(a); a \in \mathcal{C}^\infty(S_N^*) \oplus \mathcal{C}^\infty(S_N^*) \oplus \dots \oplus \mathcal{C}^\infty(S_N^*) \oplus \dots\}$ である。 l が十分大きければ、 $\mathfrak{g}^{(-l)}$ の元は、連続な核で核表示されるものと思われ ($l \geq [\frac{n}{2}] + 1$ で良い筈)。 $\mathfrak{g}^{(-l)}$ にはこの核を使って位相を導入する。 $\mathfrak{g}_l$ の方は、表核 a を使って位相を入れる方が良い。

次に、 $\mathfrak{g}^{(-l)}$ を Lie 環に持つ regular Fréchet-Lie 群を構成する必要がある。更に $\mathfrak{g}^{(0)}$ を Lie 環に持つ regular Fréchet-Lie 群を構成する。これ等はすべて、 $I + \mathfrak{g}^{(0)}$ の形の作用素として実現できる筈だからさほど問題は無いと思われる。

問題は、この事と上の Lemma から $\mathcal{S}^{(1)}$ と Lie 環に属する Lie 群と構成することである。この場合その Lie 群は Fourier 積分作用素で階数 $\mathcal{A}$ のものの中に含まれてしまう筈であることに注目しておく必要がある。多様体上で Fourier 積分作用素を書くには、その phase からきまる S_N^* 上の接触変換が十分単位元に近い時には一定のやり方がある。まず母函数なるものを件介として。

◀ Lemma ▶ S_N^* 上の接触変換で単位元に近いものと、0 に近い $C^\infty(S_N^*)$ の元の間には 1:1 対応がある。

$f(x, p) = a(x, z) \mathbb{I}$, $a \in C^\infty(S_N^*)$ とし、 T^*N 上の函数と見る。 f は positively homogeneous degree 1 だから、必ず、 $\langle p, A(x, p) \rangle$ ($A(x, p) \in T_x^*N$) の形に書ける。 a は十分 0 に近いものとする。又、上の a より定まる接触変換を φ とする。Fourier integral operator order 0 と、 $b \in \mathcal{S}^{(0)}$ に対して。

$(F_\varphi(\varphi, b))_h(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T_x^*} \int_{T_x} b(x, p) e^{-i\langle p, q \rangle + i f(x, p)} \phi(q) h(\text{Exp}_x q) dq dp$ と定義する。この場合、 $\phi \equiv 1$ となっている範囲が、 $\max \text{dist}(x, \varphi(x))$ よりも大きいとしておかねばならない。(従って φ は非常に単位元に近い。) $b \equiv 1$ としたものを $F_\varphi(\varphi)$ と書く。

次の分解定理が重要である。

◀ Lemma ▶ $F_\varphi(\varphi, b) = P \cdot F_\varphi(\varphi)$ と一意的に分解できる。但

P は 0 階の擬微分作用素である。

この事を頭に於いて、構成すべき regular Fredhet Lie 群の単位元の近傍は、 $P \cdot F_\phi(\varphi)$ の形で、 P は 1 に近い擬微分作用素、 φ は単位元に近い S_N^* 上の接触変換、の形に書けるとして良いと思われる。

今のところ、計算がうまくいかないのは、 φ, φ' が十分単位元に近いとき、 $F_\phi(\varphi) \cdot F_\phi(\varphi') = P \cdot F_\phi(\varphi\varphi')$ の形に書き、 P が、 φ, φ' のどのような函数として表わされるかを書き下す方法が難しいのである。予想としては当然 φ, φ' の函数として C^∞ であると思われる。こゝで言えば、 $P \cdot F_\phi(\varphi) \cdot P' \cdot F_\phi(\varphi')$ とか $(P \cdot F_\phi(\varphi))^{-1}$ とかも、 $P'' \cdot F_\phi(\varphi\varphi')$, $P''' \cdot F_\phi(\varphi')$ の形に書き下して微分可能性を見るのは楽だし、(P.1) ~ (P.4) の性質は、こゝまで擬微分作用素についてやられている解析学からの一瞥に應用であると思われる。

こゝ等の問題は、近い将来論じたいと思う。群が構成できれば、次の問題は、その群の表現である。こゝは、場の量子論とかより深い関係を持つ筈である。

参考文献

[1] Amayo, R., Stewart, I., Infinite dimensional Lie algebras, Noordhoff International Publ. 1974

[2] Birkhoff, G. Analytical groups, Trans. AMS. 43 (1938) 61 -

101.

- [3] de la Harpe, P. Classical Banach-Lie algebras and Banach-Lie groups of operators in Hilbert spaces. LN-Springer 285, 1972.
- [4] Delsarte, J. Les groupes de transformations linéaires dans l'espace de Hilbert, Mem. des Sc. Math. LVII. Gauthiers-Villars 1932.
- [5] Guillemin, V. Infinite dimensional primitive Lie algebras, J. Diff. Geom. 4, (1970) 257-282.
- [6] Joseph, A. Infinite dimensional Lie algebras in mathematics and physics, Lecture Note, IHES. 1974.
- [7] Leslie, J. On a differential structure for the group of diffeomorphisms, Topology 6 (1967) 263-271
- [8] Leslie, J. Some Frobenius theorems in global analysis, J. Diff. Geom. 2. (1968) 279-297.
- [9] Morimoto, T., Tanaka, N., The classification of the real primitive Lie algebras, J. Math. Kyoto Univ. 10 (1970) 207-243.
- [10] Nagano, T., Kobayashi, S. On filtered Lie algebras and geometric structures I. II. III IV. V. J. Math. Mech. 13 (1964) 875-908, 14 (1964) 513-521, 14 (1964) 679-700, 15 (1966) 163-171, 15 (1966) 315-328.
- [11] Onori, H., de la Harpe, P. About interactions between Banach-Lie groups and finite dimensional manifolds, J. Math. Kyoto Univ. 12 (1972) 543-570.

- [12] Omoni, H. On Banach-Lie groups acting on finite dimensional manifold, Tohoku Math. J. 30 (1978) 223-250.
- [13] 大森英樹, 無限次元 Lie 群論, 紀伊国屋数学叢書, 1978.
- [14] Omoni, H, A method of classifying expansive singularities, to appear
- [15] Omoni, H, On the volume elements on an expansive sets, Tokyo, J. Math. 1. (1978) 21-39.
- [16] Omoni, H, Infinite dimensional Lie groups and general relativity, to appear.
- [17] Shnider, S. The classification of real primitive Lie algebras, J. Diff. Geom. 4 (1970) 81-89.
- [18] Singer, I. Sternberg, S. On the infinite groups of Lie and Cartan, J. Analyse Math. 15 (1965) 1-114
- [19] Van Est, Konthagen, Non-enlargable Lie algebras, Indag. Math. 26 (1964) 15-31.