

3 次精度上流差分による乱流遷移の数値シミュレーション

鳥取大学工学部 河村 哲也 (Tetuya Kawamura)
計算流体力学研究所 岩津 玲磨 (Reima Iwatsu)

§ 1. はじめに

層流から乱流への遷移には大別して二つの型がある。一つは "突発型" と呼ばれるもので、微小擾乱に対して流れは安定であるが十分高いレイノルズ数では乱流となり中間のレイノルズ数では乱流と層流の入り混った状態が存在するといふもので、円筒内 Poiseuille 流、回転同軸円筒内の Couette 流 (Taylor-Couette 流) で外円筒の回転速度が卓越した場合などの乱流遷移がその代表的な例になっている。もう一つは "スペクトル遷移型" と呼ばれるもので、微小擾乱の出現後種々の流れを経て最終的に乱流に移行するもので、自由せん断流や Taylor-Couette 流で内円筒の回転速度が卓越した場合の遷移などが代表例である。一方、二次元 Poiseuille 流や平板境界層の遷移はその中間的なタイプと見ることが出来る。

本研究の目的は、乱流への遷移を三次精度の上流差分を用いてどの程度シミュレート可能なかを調べることであるが、中間型である二次元 Poiseuille 流の遷移に対してはある程度の成果をうる事ができた¹⁾ ので、本研究ではスペクトル遷移型の代表例である Taylor-Couette 流の外円筒静止の場合を調べる。

Taylor-Couette 流は、Taylor の先駆的な研究²⁾ の後、種々の理論的・実験的な研究が行われてきた流れであるが、最近の電子計算機の進歩により、数値的な研究も増加しつつある。その中で Moser et al³⁾ や Marcus⁴⁾ はスペクトル法を用いた三次元計算を行い、Taylor 渦が不安定となって方位角方向に進行する波をともし "Wavy" な流れを数値的に得ることに成功している。一方、これらの論文では無限に長い円筒を仮定し、軸方向に基本波数 α に関する周期性を課しているため、計算では一対の Taylor 渦の挙動を調べていることになっている。

本研究でも軸方向に周期境界条件を課しているが一周期内に 10 対程度の Taylor 渦がはいることのできる長さであるため、周期内では渦の大きさが異なっ

た流れも取り扱うことができ、周期性に少し乱れが生じた流れ（図 6 (a)）や、周期内での渦の個数の変化も取り扱えるため、より実験条件に近い計算になっている。

§ 2. 基礎方程式と計算方法

基礎方程式は連続の式(1)と Navier-Stokes 方程式(2)である：

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0 \quad (1)$$

$$\partial \mathbf{V} / \partial t + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\operatorname{grad} p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{V} \quad (2)$$

ここで $\mathbf{V}$ は流速、 P は圧力、 Re はレイノルズ数を表す。この計算では MAC 法⁵⁾に従って、(1)(2)を連立させて解くかわりに、(2)の発散をとって(1)式を考慮して得られる圧力に関する Poisson 方程式(3)、(2)を連立させて解を求める：

$$\Delta P = -\operatorname{div}(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \frac{D}{\Delta t} \quad (3)$$

ここで右辺第2項の Δt は(2)を時間積分する時の時間きざみで D は着目している時間における $\operatorname{div} \mathbf{V}$ の差分近似値（したがってゼロではない）である。この項は、(2)、(3)式を差分近似して解いて得られる $\mathbf{V}$ が、常に(1)を近似していることを保証する補正項となっている。

同軸二重円筒間の流れを問題とするため(3)、(2)に円柱座標系 (r, θ, z) を用いるのが便利である(図1)。このとき(3)、(2)式は次のようになる：

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} \\ = & -\frac{\partial}{\partial z} \left(V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left(V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^2}{r} \right) \right\} \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r V_\theta}{r} \right) + \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (3)' \end{aligned}$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial Z} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} = -\frac{\partial P}{\partial Z} + \frac{1}{Re} \Delta V_z \quad (2a)'$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial Z} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^2}{r} = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left(\Delta V_r - \frac{V_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (2b)'$$

$$\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial Z} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r V_\theta}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{1}{Re} \left(\Delta V_\theta - \frac{V_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \quad (2c)'$$

ただし A を V_z または V_r または V_θ として

$$\Delta A = \partial^2 A / \partial Z^2 + (1/r) \times \partial(r \partial A / \partial r) / \partial r + (1/r^2) \times \partial^2 A / \partial \theta^2$$

である。壁 ($r = r_a$, $r = r_b$) の近くでは差分格子を細かくとる必要があるため半径方向に次の変換をおこなう:

$$r = r_a + (r_b - r_a) \times \left(1 + \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right) \times \frac{1}{2} \quad (4)$$

ただし $-c \leq x \leq c$ で C は格子の集中度をきめるパラメータでたとえば $\log(1 + 0.95) / (1 - 0.95)$ ととる。(0.95を1に近づけばより集中する。) なお r_a は内円筒の半径である。

(3) 式はすべて2次精度中心差分で近似した。一方(2) 式は、空間微分は非線形項を除き、2次精度中心差分で近似し非線形項は3次精度上流差分

$$f \frac{\partial U}{\partial X} = f \frac{-U_{i+2} + 8(U_{i+1} - U_{i-1}) + U_{i-2}}{12\Delta X} + |f| \frac{U_{i+2} - 4U_{i+1} + 6U_i - 4U_{i-1} + U_{i-2}}{12\Delta X} \quad (5)$$

で近似した。また時間積分は2次精度は Adams-Bashforth法を用いて行った。すなわち $\alpha u / \alpha t = f(u)$ に対して

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t(3f(u^n) - f(u^{n-1}))/2 \quad (6)$$

を用いる。

解を求める手順は、まず初期条件または前の時間ステップでの速度より(3)の近似式の右辺を計算し、S.O.R.法により圧力の Poisson方程式を解き、圧力を求める。次の時間ステップでの速度は、得られた圧力と現在の速度より(6)を参照して得られる(2)の近似式より求める。この手続きを必要な時間ステップ繰り返す。なお、時間発展させるときに2次精度の Adams-Bashforth法を用いたため(6)よりわかるように一つ前の時間ステップでの f を記憶しておく必要がある。また最初のステップではこの方法は使えないため、このときに限り Euler 前進差分を用いた。格子システムは、速度と圧力を同一点で評価する通常格子(図1)を用いた。

壁面での境界条件は、速度に対しては粘着条件 ($V =$ 回転速度)、圧力に対しては粘着条件を Navier-Stokes方程式に代入して得られる

$$\partial P / \partial r = V\theta^2 / r - 1 / Re \times \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) \quad (7)$$

を差分近似した式より壁面での圧力を求める。ただし(7)で2階微分を求めるとき仮想点での値を決める必要がおこるので図1のように決めた。非線形項に3次精度の差分を用いたため、やはり仮想点を必要とするのでこの場合も図1のように決めた。

他の面での境界条件は周期条件を課し、また初期条件としては Couette 流の厳密解(8)を用いた。

$$\begin{aligned} V_r = V_z = 0 \\ V_\theta = \frac{(V_{\theta a} - V_{\theta b})r_a^2 r_b^2}{r_b^2 - r_a^2} \frac{1}{r} + \frac{V_{\theta b} r_b^2 - V_{\theta a} r_a^2}{r_b^2 - r_a^2} r \end{aligned} \quad (8)$$

ただし $V_{\theta a}$, $V_{\theta b}$ 内外円筒の回転速度である。

§ 3. 計算結果

Taylor-Couette流の流れのパターンを決めるパラメータは多数ありすべてを変化させて調べることは現実的でないため、本研究では内円筒回転、外円筒静止の場合のみ取り扱う。これは、理論的にも実験的にも数値的にも最もよく研究されているケースである。この場合、流れの支配パラメータは内円筒と外円筒の半径比 r_b / r_a 、円筒間のギャップと円筒の高さ h の比 $h / (r_b - r_a)$ およびレイノルズ数 $Re = r_a \omega_a (r_b - r_a) / \nu$ (ν : 動粘性係数) である。本研究では Fenstermacher et al.⁶⁾ の実験に従い、 $r_b / r_a = 1.14$ 、 $h / (r_b - r_a) = 20$ に固定し、レイノルズ数を変化させて計算を行った。ただし、本計算では軸方向にも周期条件を課しているため、実験とは完全な対応はついていない。底面をつけた計算を行うことは、境界条件を少し修正すれば可能であるが、周期条件を選んだ理由として (i) 実験的に知られているように流れのパターンは履歴 (ヒステリシス) にもよるので完全に対応した計算が困難であること (ii) 周期条件を課したため一応無限の長さの計算になっているがひとつの周期内に 10 対程度の Taylor 渦がはいるので、1 対の Taylor 渦のみの挙動を調べる計算よりは実験に近くなっていること (iii) 底面の影響を調べる場合の比較データになること、そして現実的だが重要な理由として、(iv) 経験的事実として、本計算法で最も計算時間のかかる圧力の Poisson 方程式の収束が、周期条件を課した法がはやいため、同じ計算時間が許されているとき、より多くの格子点をとった計算ができることなどである。なお有限長の円筒を用いた影響は実験的に Cole⁷⁾ により調べられ、Wavy な Taylor 渦が発生する臨界レイノルズ数が、無限長とした理論計算の予測値に比べ $h = (r_b - r_a) = 20$ のとき 13% ほど高くなることがわかっている。

計算に用いた格子数は仮想点まで含めると軸方向に 203、周方向に 64、半径方向に 23 点である。(ただしレイノルズ数が 110 の場合のみ、それぞれ 43, 45, 23 である。) 計算はレイノルズ数が 110, 238, 476, 1904 の場合を行った。なお理論的に予測される Critical なレイノルズ数 (Taylor 渦が発生するレイノルズ数) Re は 119 であるので上記の値は Re の 0.92, 2, 4, 16 倍となっている。(なお Δt は $Re = 110, 238$ のとき $1/1000$ それ以外は $2.5/1000$ である。)

Taylor 渦や Wavy な Taylor 渦をわかりやすく表示するため、外円筒近く (表面より 3 メッシュ内側) の $r = \text{const.}$ の面内で V_r を無視した場合の Particle Path を可視化に用いた。ただし流速はある特定の時間のものを固定し

て使った。このようにすると図2より、もし Taylor渦があれば、流れが内側にひきこまれる線に沿って粒子が集まり、黒い筋ができると考えられる。そして筋と筋の間に一对の Taylor渦が存在することになる。流れが Wavy になれば筋も波うつと考えられる。（これが実験で撮られる可視化写真に最も近いと思われる。）なお、 V_r まで含めて Particle Path をつくと定常な Taylor渦の場合でも、ら線軌道を描くため、2次元的に表示すると波うって見える。Wavy な Taylor渦の存在をよりはっきり示すため、流れの中に特定の点を指定して、その点での半径方向の速度の Time history も合わせ表示した。本研究では R, θ は同じで z の値が異なる3点での V_r を表示した。もし定常な Taylor渦が存在すれば、 V_r はそれぞれの3点で時間的に変化しないある一定値をとるが、もし Wavy になっていたとすると V_r はある周期的に変化する値をとることになる。またその図より進行波の速度も計算することができる。

最初にテスト計算として Re より低いレイノルズ数で、格子数も少ない計算をおこなった。この場合に限り初期条件は静止とした。図3に軸に垂直なある面での速度ベクトルを示すが、予想どおり Couette流が実現されている。このことは、図には示されていないが、 V_z も V_r もゼロであることや、どの断面でも速度分布が同じであることからわかる。

図4にレイノルズ数 $Re = 238$ の場合の計算結果を示す。図4(a)は Particle Path で、図の左側は $\theta = \text{const.}$ の面で切った切口で $V_\theta = 0$ としたときの Particle Path である。この図より 11対 (22個) の Taylor渦ができていること、各 Taylor渦はほぼ同一の大きさであるが、中央付近のものが若干大きくなっていることがわかる。図4(b)は r, θ が一定で z の異なる3点での V_r の値を各時間ごとに表示したもので、この図より $T = 15$ ($T = 2\pi$ で内円筒が一回転する) あたりまでは $V_r = 0$ であるが、それ以降、0でない値をもち $T = 80$ 程度で一定値をもつようになり、定常な Taylor渦ができていくことがわかる。なお、図には示さなかったが $Re = 131$ の場合 ($= 1.1 Re$) も計算をおこない $T = 40$ あたりまでは $V_r = 0$ であるが、それ以後値をもつようになり Taylor渦になることがわかった。（ただし両ケースとも初期 ($T=0$) に内円筒の回転速度の 2.5% の大きさの攪乱を一様乱数で与え、Couette流と重ね合わせている。）次にこの計算で得られた Taylor渦流を初期条件にとり、同じレイノルズ数であるが、これに上と

同じ 2.5% の攪乱を加えた場合の計算結果を図 5 に示す。図 5 (a) は攪乱を加えてから $T = 240$ 経た時間での Particle Path で, Wavy な Taylor 渦の存在がわかる。(なお $Re = 131$ の場合は Wavy にならない) 図 5 (b), (c) は r, θ 一定で z の異なる 3 点 (図 4 (6) と同じ点ではない) での V_r の時間変化を示したもので $T = 50$ 以降周期的に速度が変化して, Wavy になっていることを裏付けている。この進行波の進行速度は図より計算でき $T = 170$ から 180 の間でおおよそその値を見積ると内円筒の回転速度の $1/2$ 程度になっている。図 5 (6), (7) で $T = 120$ より以前と $T = 160$ 以降では波形が異なっている。図には示さなかったが, $T = 120$ と $T = 160$ の Particle Path を比較すると $T = 120$ のとき 11 対あった Taylor 渦が $T = 160$ のとき 9 対 (図 5 (a) と同じ) になっているのでこの間で渦の融合と再配列がおこっていることになる。

Taylor 渦はいったんできるとかなり安定で, この計算でおこなったように攪乱を加えない限り早い時間内で Wavy にはならない。図 6 (a) は $Re = 476$ の結果であるが Couette 流を初期条件に用いると, Taylor 渦ができ攪乱を加えずに計算を続けると図 6 (a) に見られるように周期性にところどころ乱れが出てくるが, それ以降, 渦が融合してまた Taylor 渦流にもどる傾向がある。しかし攪乱を加えると図 6 (b) に見られるように Wavy な流れとなる。

さらに高いレイノルズ数の計算をおこなうためには, 格子数を増加させる必要があると思われるが定性的な議論だけなら可能と思われるので, 同じ格子数で $Re = 1904$ の場合の計算をおこなった。結果を図 7 に示す。図 7 (a) より Wavy な構造は残っているものの, 図 5 (a) や図 6 (b) に比べてかなり乱れたものになっている。また V_r も図 7 (b) に見られるように周期構造よりかなりへだたっている。このことは計算を長時間続けても同じで, 別の流れに移る過渡的な状態ではないことを示している。

§ 4. まとめ

3次精度の上流差分を用いて Taylor-Couette流で外円筒静止, 内円筒回転の場合の数値シミュレーションをおこなった. その結果, レイノルズ数の値に応じて, Couette流, Taylor渦流, Wavy な Taylor 渦流を数値的に得ることができた. 計算結果を用いたより詳しい解析 (たとえば V_r の波形のスペクトル分析) は別の機会に行う予定である. なお計算には, 計算流体力学研究所の NEC SX-2 を用いた. 計算時間は 10万ステップ ($T = 100$ または 250) で約3時間であった.

引用文献

- 1) Kawamura, T. & Kuwahara, K. 1985: Direct Simulation of a Turbulent Inner Flow by Finite-Difference Method, AIAA paper 85-0376
- 2) Taylor, G. I. 1923: Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders, Phil. Trans. Roy. Soc. A 223 289-343
- 3) Moser, R. D., Moin, P. & Leonard, A. 1983: A spectral numerical method for the Navier-Stokes Eq. with application to Taylor-Couette flow, J. compt. phys. 52 524-544
- 4) Marcus, P. S. 1984b: Simulation of Taylor-Couette flow, Part 2. Numerical results for wavy vortex flow with one travelling wave, J. Fluid Mech. 146, 65
- 5) Harlow, F. H. & Welch, J. E.: Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface, Phys. Fluid 8 (1965) 2182-2189

- 6) Fenstermacher, P. R., Swinney, H. L. & Gollub, J. P. 1979: Dynamical instabilities and the transition to chaotic Taylor vortex flow, J. Fluid Mech. 94 103-128
- 7) Cole, J. A. 1976: Taylor-vortex instability and annulus-length effects, J. Fluid Mech. 75, 1-15.

203 × 64 × 23 GRIDS

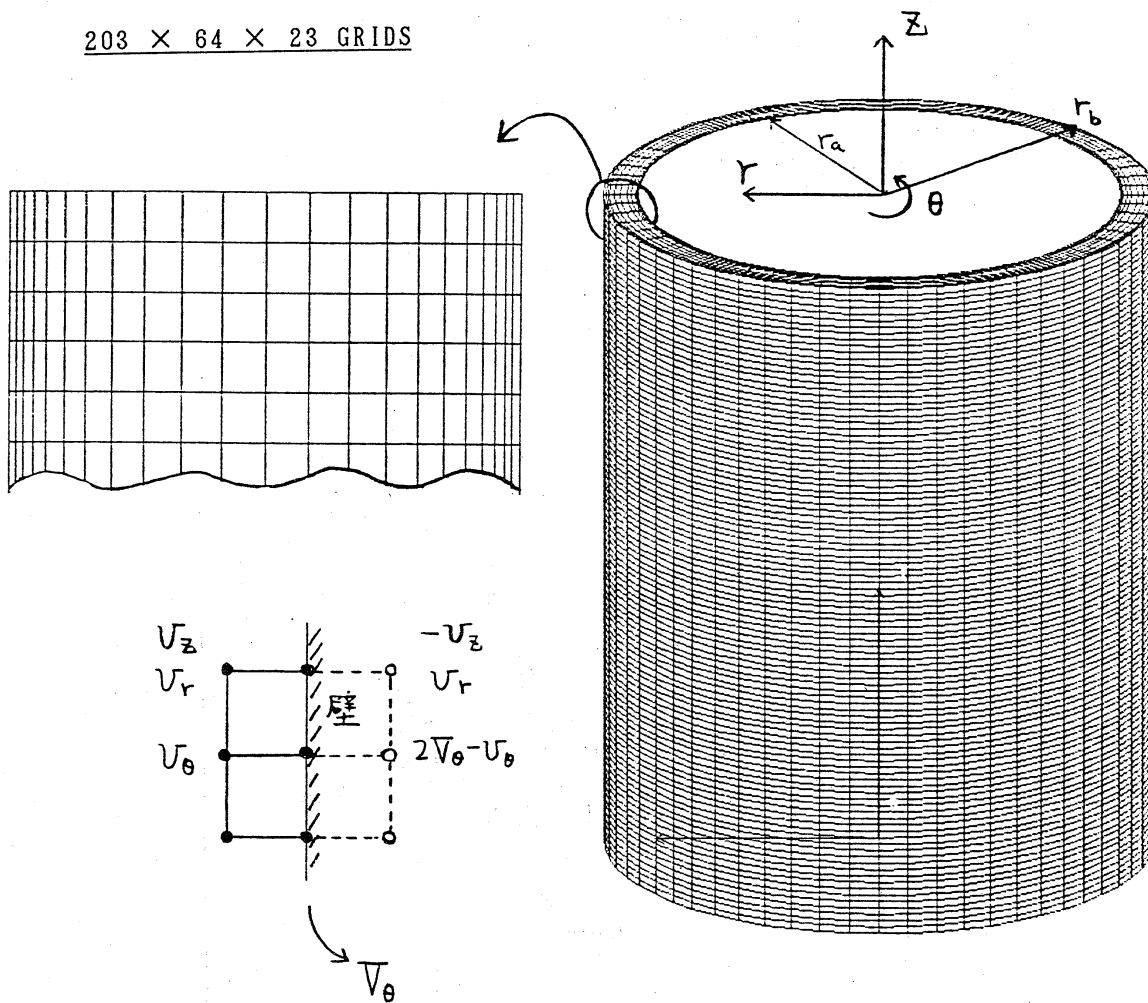


図1 格子システムと境界条件

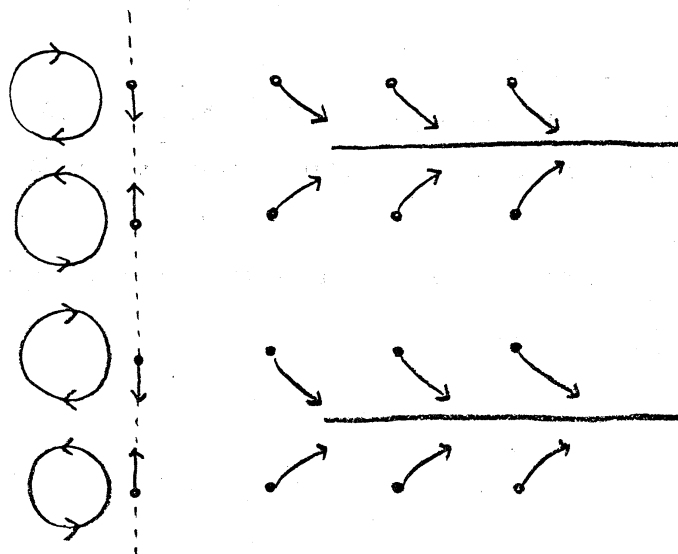
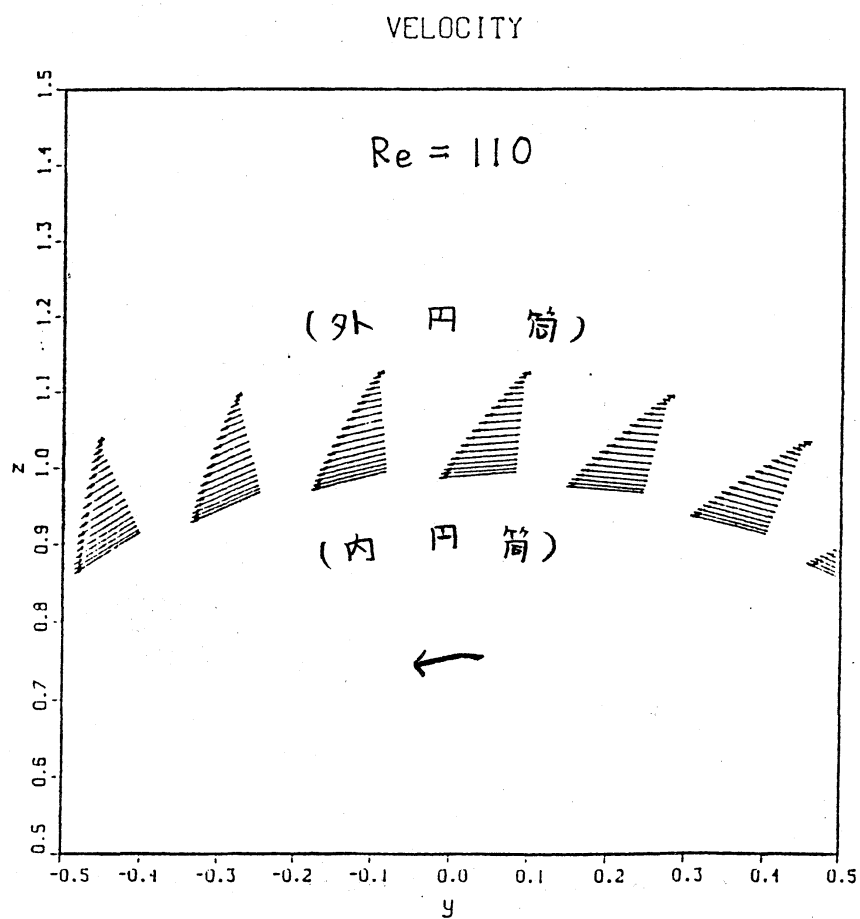


図2 Particle Path の概念図

図3 軸に垂直な面内での速度分布 ($Re = 110$)

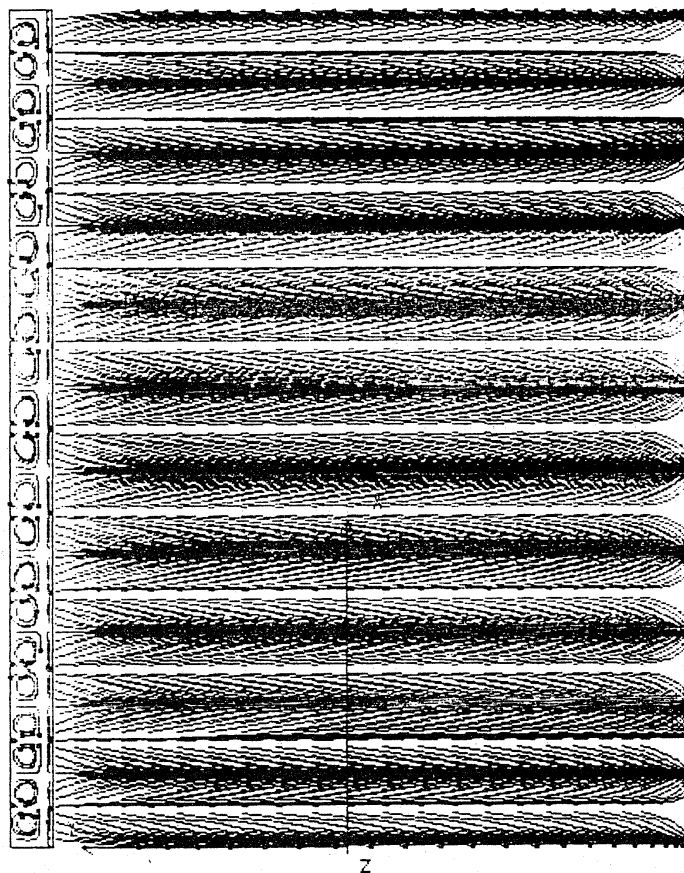


図 4 (a) $Re = 238$, $T = 200$ での Particle Path

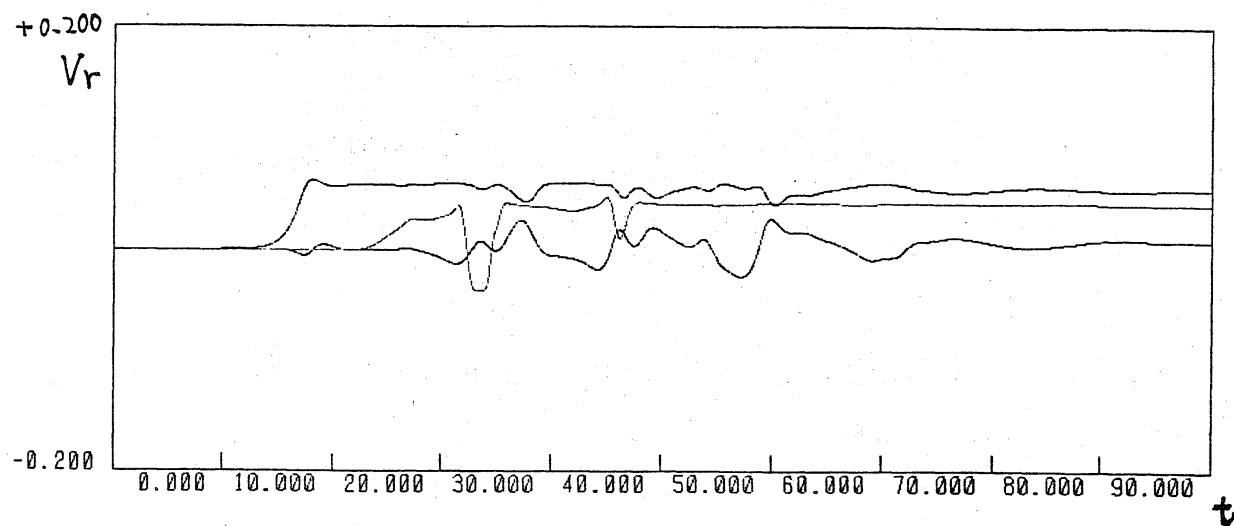


図 4 (b) r と θ が同じで z の異なる 3 点での半径方向
速度の時間変化 ($Re = 238$)

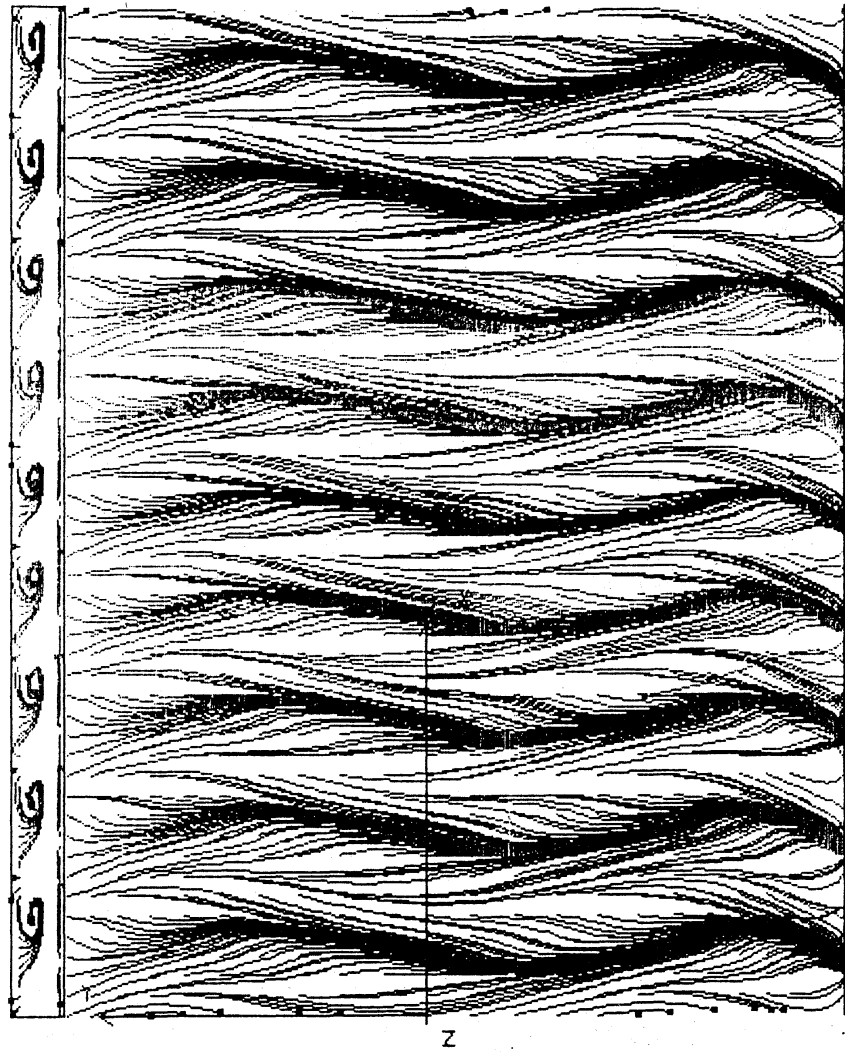


図5(a) Taylor渦流に攪乱を与えた後 $T = 240$ での Particle Path
($Re = 238$)

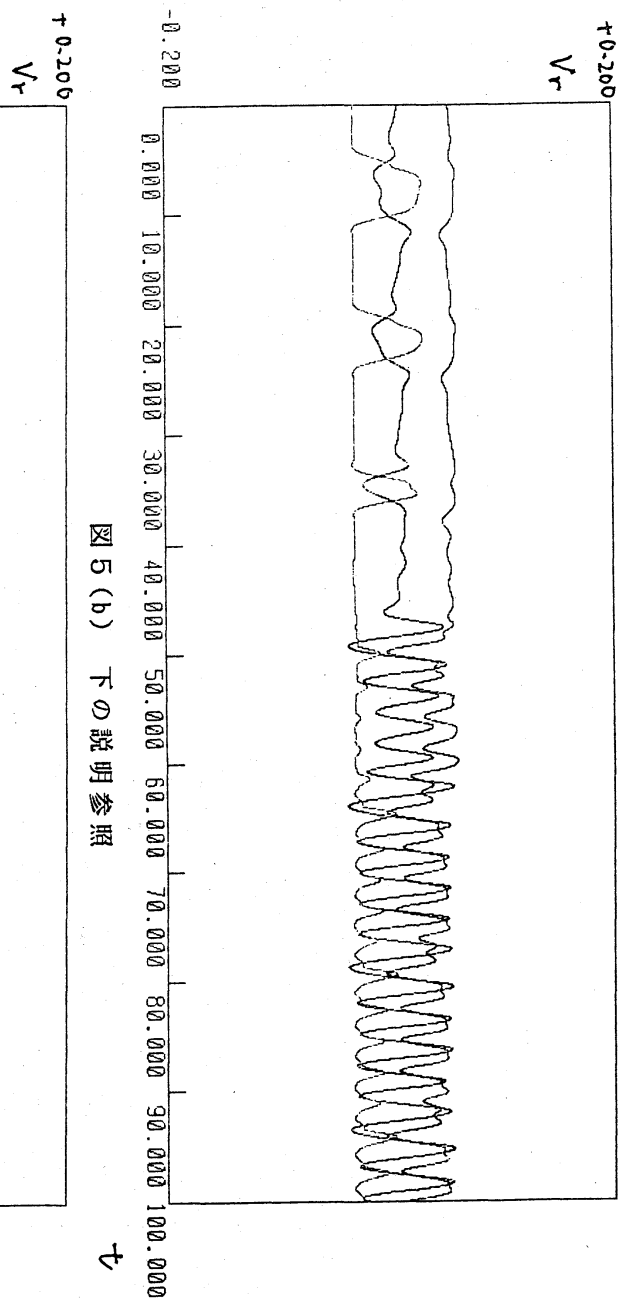
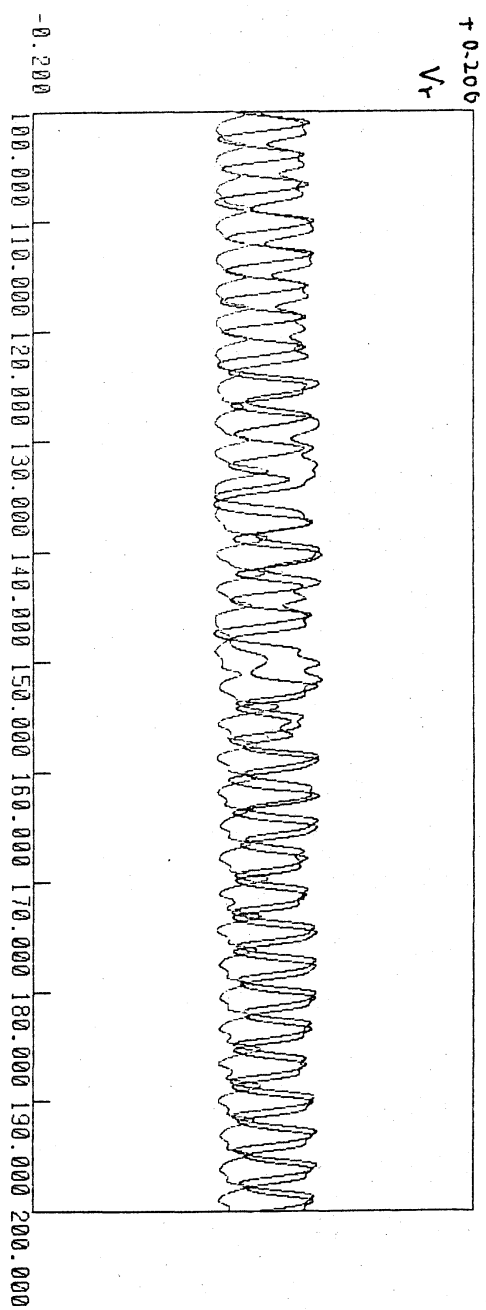


図 5 (b) 下の説明参照

七

図 5 (c) Taylor 渦流に擾乱を与えた後の V_r の異なる 3 点での時間変化

七

(Re = 238)

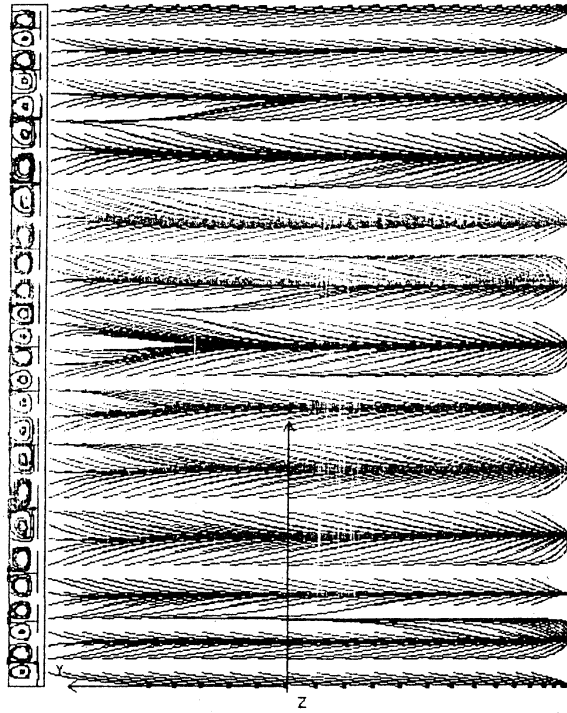


図 6 (a) $Re = 476$, $T = 100$ での Particle Path

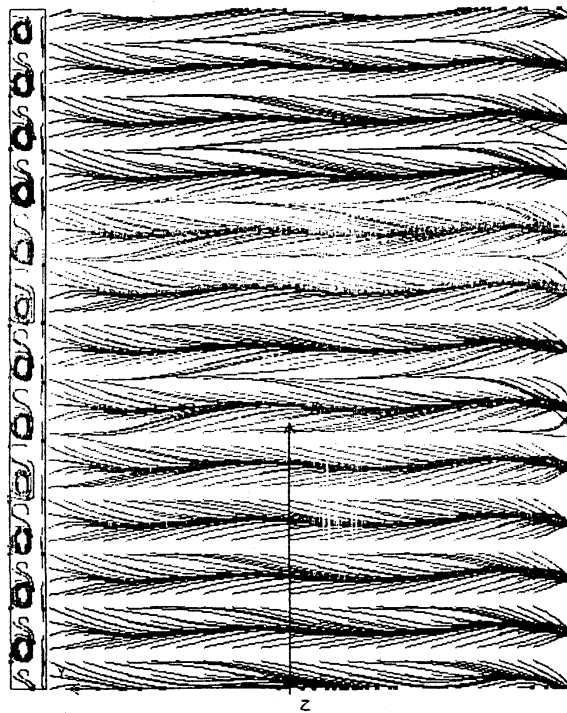


図 6 (b) $Re = 476$, 攪乱を加えた場合の Particle Path ($T = 200$)

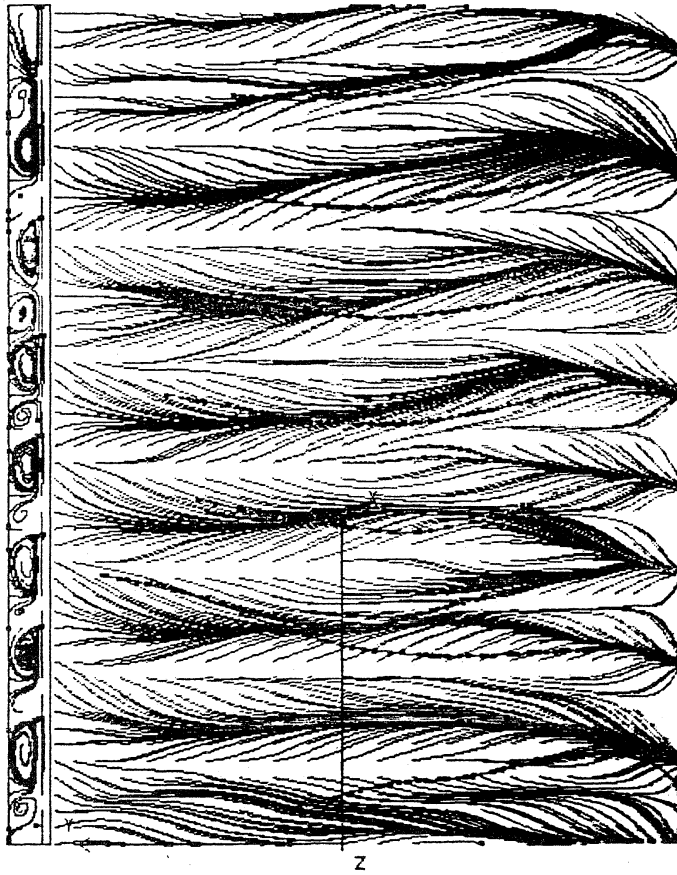


図 7 (a) $Re = 1904$, $T = 300$ での Particle Path

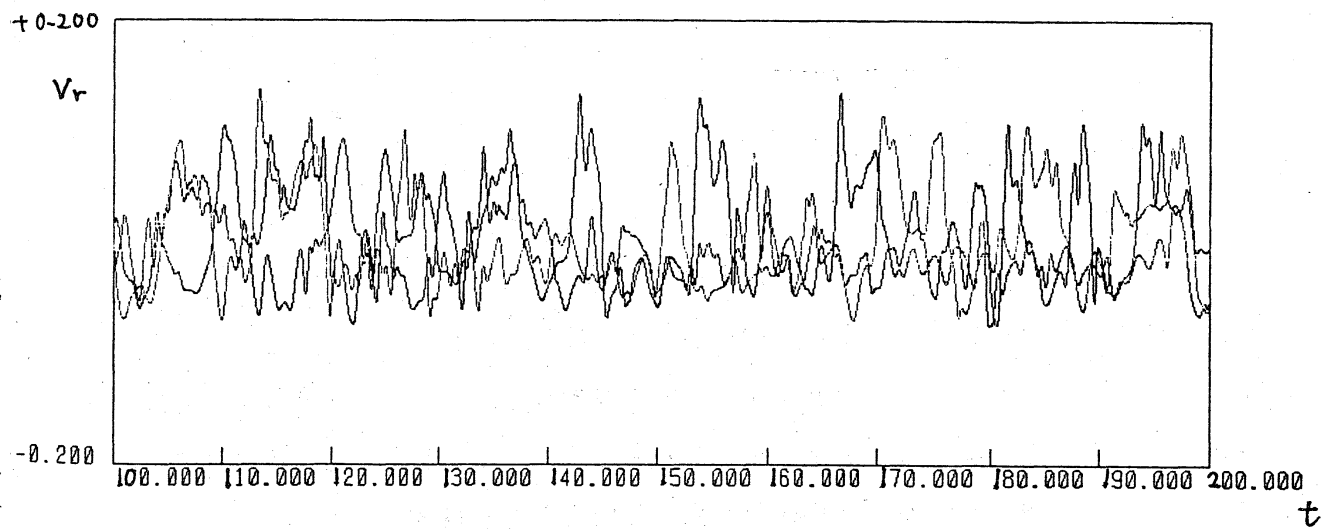


図 7 (b) $Re = 1904$ の場合の V_r の時間変化