

Liapunov 関数による概 周期解の存在について

東北大学 理 中島文雄

§ 1 まえがき

概周期系における概周期解の存在のための一つの命題が Amerio-L によって示された。そこでこの命題を成立させるための十分条件として、ある種の *global stability* [2], あるいは *Liapunov 関数* [3] の存在等が仮定されてきた。以下において *Liapunov 関数* の立場からの結果を述べるがそれは [3] の対応する定理を含むものである。他方 Amerio の命題によらない概周期解の存在定理 [4] (定理 31.1) も知られているがそれは我々の結果の *Corollary* となることも示す。

§ 2 記号と定義

R^n を n 次元 Euclidean space とし $R' = R$, かつ $x \in R^n$ に対して $\|x\|$ でその Euclidean norm を表す。 A と B が topological space のとき $C(A; B)$ で A から B への連続関数の全体を表す。 $f(t, x) \in C(R \times U; R^n)$ ($U: R^n$ の open set) を $x \in R$ に一様な,

t の概周期関数とすれば数列 $\{t_k\}$ と $G(t, x) \in C(\mathbb{R} \times U; \mathbb{R}^n)$ が存在して

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(t+t_k, x) = G(t, x) \quad \text{uniformly on } \mathbb{R} \times S_0.$$

for each compact subset S_0 of U ,

が成立する。このような $G(t, x)$ を $F(t, x)$ の hull の元と呼び、 $G(t, x)$ の全体を $H(F)$ で表す。 $V(t, x) \in C(\mathbb{R} \times U; \mathbb{R})$ が

$V(t, x) \in C_0(X)$ であるとは、任意の compact subset S_0 of U に対して定数 $L = L(S_0)$ が取れて、

$$|V(t, x) - V(t, y)| \leq L \|x - y\| \quad \text{for } t \in \mathbb{R}, x \in S_0, y \in S_0$$

が成立することである。

§3 概周期解の存在

次の系を考える。

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = F(t, x)$$

ここで $F(t, x) \in C(\mathbb{R} \times U; \mathbb{R}^n)$ ($U; \mathbb{R}^n$ の open set) は $x \in U$ に対して一様な t の概周期関数である。

更に $G(t, x) \in H(F)$ に対して次の系を考える。

$$(2) \frac{dx}{dt} = G(t, x)$$

このとき次の事が知られている。

命題. S_0 を U の compact subset とする。もし各 $G(t, x) \in H(F)$ に対して (2) がすべての $t \in \mathbb{R}$ で S_0 に留まる解を唯一つ持つならば、このとき (1) は概周期解を持ちその module は $F(t, x)$ の module に含まれる。

この命題によって次の事が成立するがその証明は §4 で述べる。

定理. 次の事を仮定する。(1)の解 $\varphi(t)$ で、

$$\varphi(t) \in S_0 \quad (S_0: U \text{ の compact subset}) \quad \text{for } t \geq 0$$

なるものが存在して更に次の関数 $V(t, x) \in C([0, \infty) \times U; \mathbb{R})$ が存在する。

条件 (i) $V(t, \varphi(t))$ は $[0, \infty)$ で有界である。

条件 (ii) $V(t, x) \in C_0(X)$.

条件 (iii) $\dot{V}_{(1)}(t, x) \geq a(\|x - \varphi(t)\|)$.

ここで $a(r)$ は連続な正定値関数で、

$$\dot{V}_{(1)}(t, x) = \overline{\lim}_{h \rightarrow +0} \frac{1}{h} \{ V(t+h, x+hF(t, x)) - V(t, x) \}$$

である。

このとき、(1) は U において唯一つの概周期解を持ちその module は $F(t, x)$ の module に含まれる。

上の定理に対応する [3] の定理においては Fink と Seibert は実質的に次の条件を余分に仮定している。

$\varphi(t)$ と $V(t, x)$ が、各々 R と $R \times U$ で定義されていて

$$(3) \quad V(t, \varphi(t)) \equiv 0 \quad \text{on } R,$$

$$(4) \quad V(t, x) \text{ is continuous in } t \text{ uniformly for } (t, x) \in R \times K \text{ (} K: \text{any compact subset of } U \text{)}.$$

我々の定理では、上の (3) は条件 (i) に緩められ更に (4) は仮定する必要がないのである。一般に我々の定理を応用するためには与えられた解 $\varphi(t)$ の形を知る必要がある。しかし時として有界な解の存在のみが知られている場合がある。その場合には次の Corollary が有効である。そしてそれは [4] の

定理3.1を含むものでもある。

Corollary. 次の事を仮定する。系(1)は $t \geq 0$ で U の compact subset に留まる解を持ち、更に次の関数 $V(t, x, y) \in C([0, \infty) \times U \times U; \mathbb{R})$ が存在する。

(i) $V(t, x, x)$ は $(t, x) \in [0, \infty) \times U$ で有界である。

(ii) $V(t, x, y) \in \overline{C_0}(x, y)$.

(iii) $\dot{V}(t, x, y) \geq a(\|x - y\|)$

ここで $a(r)$ は定理と同じもので、

$$\dot{V}(t, x, y) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{1}{h} \{V(t+h, x+hF(t, x), y+hF(t, y)) - V(t, x, y)\}$$

このとき、(1)は U において唯一つの概周期解を持ち、その module は $F(t, x)$ の module に含まれる。

証明は、有界な解を $\varphi(t)$ として、 $V(t, x, \varphi(t))$ を定理の $V(t, x)$ と置けばよい。

§4. 定理の証明.

以下、任意に $G(t, x) \in H(F)$ を固定して (2) を考えてゆく。

$F(t, x)$ の概周期性より $G(t, x) \in H(F)$ に対して

数列 $\{t_k\}$ が取れて

$$t_k \rightarrow +\infty \quad \text{as } k \rightarrow \infty$$

かつ

$$F(t+t_k, x) \rightarrow G(t, x) \quad \text{uniformly on } R \times K$$

for each compact subset K of U as $k \rightarrow \infty$

となる。

今、(1)の与えられた有界な解 $\varphi(t)$ に対して $\{\varphi(t+t_k)\}$ を考えると、上の事から (2) に対して次の解 $\psi(t)$ が存在すると仮定してよい。

$$(5) \quad \varphi(t+t_k) \rightarrow \psi(t) \quad \text{uniformly on any compact set in } R \text{ as } k \rightarrow \infty, \text{ and}$$

$$\psi(t) \in S_0 \text{ on } R.$$

さて (1) の概周期解の存在のためには命題より (2) の解 $\chi(t)$ で、 $\chi(t) \in S_0$ on R ならば

$$\chi(t) \equiv \psi(t) \text{ on } R$$

を示せばよい。

そこで (5) の数列 $\{t_k\}$ を用いて

$$v_k(t) = V(t+t_k, X(t)) \quad \text{for } t \geq -t_k$$

と置く。

$$D^+ v_k(t) = \overline{\lim_{h \rightarrow +0}} \frac{1}{h} \{V(t+t_k+h, X(t+h)) - V(t+t_k, X(t))\}$$

と置くとき、 $V(t, X) \in \overline{C}_0(X)$ より

$$D^+ v_k(t) \geq \dot{V}_{(1)}(t+t_k, X(t)) - A_k(t)$$

となる。ただし

$$A_k(t) = L \|G(t, X(t)) - F(t+t_k, X(t))\| \quad \text{で},$$

$L = L(S_0)$ は compact set S_0 に依存する定数である。

更に、 $\{t_k\}$ の取り方から

$$(6) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} A_k(t) = 0 \quad \text{uniformly on } R$$

となる。条件 (iii) より

$$D^+ v_k(t) \geq a(\|X(t) - \varphi(t+t_k)\|) - A_k(t)$$

となる。今、任意に $[s_1, s_2] \subset R$ ($s_1 < s_2$) を固定して k を十分大にして $s_1 + t_k \geq 0$ ならば上式は $[s_1, s_2]$ で定義される。

そこで上式を $[s_1, s_2]$ で積分すると、

$$(7) \quad V_k(s_2) - V_k(s_1) \geq \int_{s_1}^{s_2} a(\|X(s) - \varphi(s+t_k)\|) ds - \int_{s_1}^{s_2} A_k(s) ds.$$

条件(i),(ii)より, $B > 0$ が存在して、

$$|V_k(s_2) - V_k(s_1)| = |V(s_2+t_k, X(s_2)) - V(s_1+t_k, X(s_1))| < B$$

for all k . 従って (7) は、

$$B \geq \int_{s_1}^{s_2} a(\|X(s) - \varphi(s+t_k)\|) ds - \int_{s_1}^{s_2} A_k(s) ds.$$

ここで $k \rightarrow \infty$ にすると (6) より

$$B \geq \int_{s_1}^{s_2} a(\|X(s) - \varphi(s)\|) ds.$$

このとき, s_1, s_2 は任意に取れるから

$$B \geq \int_{-\infty}^{\infty} a(\|X(s) - \varphi(s)\|) ds.$$

従って数列 $\{\tau_k^1\}, \{\tau_k^2\}$ が存在して $k \rightarrow \infty$ のとき

$$\tau'_l \rightarrow -\infty, \text{ and } a(\|X(\tau'_l) - \varphi(\tau'_l)\|) \rightarrow 0,$$

$$\tau_l^2 \rightarrow +\infty, \text{ and } a(\|X(\tau_l^2) - \varphi(\tau_l^2)\|) \rightarrow 0.$$

今、 $a(r)$ は正定値連続関数で、 $\{X(\tau_l^i) - \varphi(\tau_l^i)\}_l$ ($i=1, 2$) は有界であるから

$$(8) \quad \|X(\tau_l^i) - \varphi(\tau_l^i)\| \rightarrow 0 \text{ for } i=1, 2 \text{ as } l \rightarrow \infty.$$

再び (7) において $s_2 = \tau_l^2$, $s_1 = \tau'_l$ とおき、 k を十分大にして $\tau'_l + t_k \geq 0$ で考えると

$$V_k(\tau_l^2) - V_k(\tau'_l) \geq \int_{\tau'_l}^{\tau_l^2} a(\|X(s) - \varphi(s+t_k)\|) ds - \int_{\tau'_l}^{\tau_l^2} A_k(s) ds$$

両辺から

$$w(l, k) \stackrel{\text{def}}{=} V(\tau_l^2 + t_k, \varphi(\tau_l^2 + t_k)) - V(\tau'_l + t_k, \varphi(\tau'_l + t_k))$$

を引くと

$$(9) \quad L \left\{ \|X(\tau_l^2) - \varphi(\tau_l^2 + t_k)\| + \|X(\tau'_l) - \varphi(\tau'_l + t_k)\| \right\} \\ \geq \int_{\tau'_l}^{\tau_l^2} a(\|X(s) - \varphi(s+t_k)\|) ds - \int_{\tau'_l}^{\tau_l^2} A_k(s) ds - w(l, k)$$

となる。

今、 $\|X(\tau_l^i) - \varphi(\tau_l^i + t_k)\| \leq \|X(\tau_l^i) - \varphi(\tau_l^i)\| + \|\varphi(\tau_l^i) - \varphi(\tau_l^i + t_k)\|$
for $i=1, 2$

である。又 (8) より任意の $\varepsilon > 0$ に対して $N(\varepsilon) > 0$ が存在して

$$\|X(\tau_l^i) - \varphi(\tau_l^i)\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{for } i=1, 2 \quad \text{if } l \geq N(\varepsilon).$$

この事から l を固定しておいて $k \rightarrow \infty$ にすると (9) は

$$(10) \quad \varepsilon L \geq \int_{\tau_l^i}^{\tau_l^2} a(\|X(s) - \varphi(s)\|) ds - \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} W(l, k)$$

for each $l \geq N(\varepsilon)$.

ここで

$$\begin{aligned} D^+ V(t, \varphi(t)) &= \overline{\lim}_{h \rightarrow +0} \frac{1}{h} \{ V(t+h, \varphi(t+h)) - V(t, \varphi(t)) \} \\ &\geq a(0) = 0 \end{aligned}$$

であるから $V(t, \varphi(t))$ は t の単調増加関数であり、更に条件 (i) を考えると結局、

$$v_0 \in \mathbb{R} \text{ が存在して, } \lim_{t \rightarrow \infty} V(t, \varphi(t)) = v_0.$$

となる。

これより

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} w(l, k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (V(\tau_l^2 + t_k, \varphi(\tau_l^2 + t_k)) - V(\tau_l^1 + t_k, \varphi(\tau_l^1 + t_k))) \\ &= v_0 - v_0 = 0.\end{aligned}$$

従って (10) は

$$\varepsilon L \geq \int_{\tau_l^1}^{\tau_l^2} a(\|x(s) - \psi(s)\|) ds$$

となる。ここで l は任意に大きくしてよりから $l \rightarrow \infty$ にすると

$$\varepsilon L \geq \int_{-\infty}^{\infty} a(\|x(s) - \psi(s)\|) ds$$

ここで $\varepsilon > 0$ は任意に取れるから

$$a(\|x(s) - \psi(s)\|) = 0 \quad \text{on } R.$$

従って

$$x(s) \equiv \psi(s) \quad \text{on } R.$$

以上より (2) において S_0 に留まる解は $\psi(s)$ のみであり命題が成立して (1) は目的の概周期解を持つことが示された。

次に (1) において U に留まる概周期解は唯一つしかないことを示す。

$F(t, x) \in H(F)$ であるから (2) において特に

$$G(t, x) = F(t, x)$$

なる場合を考えると, (5) で得られた解 $\psi(t)$ は (1) の概周期解であることが判る。

今、(1) に他に概周期解 $p(t)$ があって

$$p(t) \in U \quad \text{on } R$$

で, ある $t_0 \in R$ に対して

$$\|p(t_0) - \psi(t_0)\| = \varepsilon_0 > 0$$

と仮定する。すると $p(t_0) \in U$ より次の open set O が存在する

$$p(t_0) \in O \subset \bar{O} \subset U \quad (\bar{O} : O \text{ の closure})$$

$p(t)$ の概周期性より数列 $\{t_k\}$ が存在して

$$t_k \rightarrow \infty \quad \text{as } k \rightarrow \infty$$

かつ $p(t_k) \in O \quad \text{for } k=1, 2, \dots$ となる。

P_9 の $V_k(t)$ に対応して新たに

$$V_k(t) = V(t+t_k, p(t)) \quad \text{とおく}$$

(7) に対応して次式が成立する

$$(11) \quad V_k(\tau_l) - V_k(t_0) \geq \int_{t_0}^{\tau_l} a(\|p(t) - \varphi(t+t_k)\|) dt - \int_{t_0}^{\tau_l} A_k^l(t) dt$$

ここで

$$A_k^l(t) = L(K_l) \|F(t+t_k, p(t)) - G(t, p(t))\|$$

ただし K_l は U の compact subset で

$$p(t) \in K_l \quad \text{for } t \in [t_0, \tau_l]$$

となるものである。従って

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k^l(t) = 0 \quad \text{uniformly on } [t_0, \tau_l]$$

又、 $p(\tau_l) \in \bar{O}$ と条件(i),(ii)より定数 $B' > 0$ が取れて

$$|V_k(\tau_l) - V_k(t_0)| < B' \quad \text{for } l=1, 2, \dots$$

となる。これらの事より(11)において $k \rightarrow \infty$ にすると

$$\int_{t_0}^{\tau_l} a(\|p(t) - \varphi(t)\|) dt \leq B' < \infty$$

ここで $l \rightarrow \infty$ にすると

$$(12) \quad \int_{t_0}^{\infty} a(\|p(t) - \psi(t)\|) dt \leq B' < \infty$$

$p(t) - \psi(t)$ も概周期関数だからある数列 $\{s_l\}$ が存在して

$$\|(p(t_0) - \psi(t_0)) - (p(s_l) - \psi(s_l))\| < \frac{\varepsilon_0}{3} \quad \text{for all } l$$

and

$$s_l + 2 < s_{l+1} \quad \text{for } l=1, 2, \dots$$

従って $s_l \rightarrow \infty$ as $l \rightarrow \infty$.

又 $p(t) - \psi(t)$ の一様連続性から $\delta > 0$ ($\delta < 1$) が取れる

$$\|(p(s_l) - \psi(s_l)) - (p(t) - \psi(t))\| < \frac{\varepsilon_0}{3} \quad \text{for } t \in (s_l - \delta, s_l + \delta)$$

今, $\|p(t_0) - \psi(t_0)\| = \varepsilon_0$ であるから

$$\frac{1}{3}\varepsilon_0 < \|p(t) - \psi(t)\| < \frac{5}{3}\varepsilon_0 \quad \text{on } (s_l - \delta, s_l + \delta)$$

for $l=1, 2, \dots$.

$$\min_{\frac{\varepsilon_0}{3} \leq r \leq \frac{5\varepsilon_0}{3}} a(r) = a_0 (> 0) \quad \text{とある。}$$

すると $\{(s_l - \delta, s_l + \delta)\}_l$ は互に重ならないから (12) より

$$\infty > B' \geq \sum_{l=1}^{\infty} \int_{s_l - \delta}^{s_l + \delta} a(\|p(t) - \psi(t)\|) dt \geq \sum_{l=1}^{\infty} 2\delta \times a_0 = \infty$$

これは矛盾である。従って

$$p(t) \equiv \psi(t) \quad \text{on } R$$

これで (i) において (i) に留まる概周期解の唯一性が示された。
証明は終る。

References

- [1] Amerio, L., Soluzioni quasi-periodiche, o limitati di sistemi differenziali non lineari quasi-periodici, o limitati. Ann. Math. Pura Appl., 39(1955), 97-119.
- [2] Seifert, G., Stability conditions for the existence of almost-periodic solutions of almost-periodic systems. J. Math. Analysis and Appl., 10(2)(1965), 409-418.
- [3] Fink, A.M. and Seifert, G., Liapunov functions and almost periodic solutions for almost periodic systems. J. Differential Equations, 5(1969), 307-313.
- [4] Yoshizawa, T., Stability theory by Liapunov's second method Math. Soc., Japan, (1965).