

長距離-短距離相互作用の

共存する系における臨界現象

東北大・工 山 崎 義 武

長距離 (LR)-短距離 (SR) 相互作用の共存する N-成分 スピン系の二次相転移点に於ける臨界現象を調べるために、適用されたくりこみ群の理論と、得られた臨界指数について報告した。

【 model Hamiltonian 】 $H = -\sum_{i \neq j} J_{0ij} \vec{S}_{0i} \cdot \vec{S}_{0j}$ [最隣接相互作用 $J_{0ij} = J_0(r_{ij}) \sim \hat{a}_0^2/r^{d+2} + \hat{b}_0^2/r^{d+\sigma} > 0$ ($\hat{a}_0^2, \hat{b}_0^2$: 正定数 ; potential range をあらわす parameter $\sigma : 1 < \sigma < 2$) ; i-th site の spin は N-成分 $S_{0i} = \{S_{0i1}, \dots, S_{0iN}\}$ で $\vec{S}_{0i}^2 = \sum_{\alpha=1}^N S_{0i\alpha}^2$ の対称性を仮定] を採り, $\vec{S}_{0i}^2 =$ 一定の拘束条件を附して, 連続 spin で表わされた次の Hamiltonian density $\mathcal{H}(x) = \frac{1}{2} [a_0^2 (\nabla \vec{S}_0)^2 + b_0^2 (\nabla^{\sigma/2} \vec{S}_0)^2 + m_0^2 \vec{S}_0^2] + \frac{1}{4!} g_0 (\vec{S}_0^2)^2$ が得られる。添字 0 は unrenormalized 量を示し, $a_0^2 \neq 0$, $b_0^2 = 0$ は SR-, $b_0^2 \neq 0$, $a_0^2 = 0$ は LR-, $a_0^2 \neq 0 \neq b_0^2$ は共存 (CE)- 相互作用系に当る。これを renormalized 量 (添字 0 をもたない) で書き換える : $\mathcal{H}(x) = \frac{1}{2} [Z_{3a} a^2 (\nabla \vec{S})^2 + Z_{3b} b^2 (\nabla^{\sigma/2} \vec{S})^2] + \frac{1}{4!} Z_1 g (\vec{S}^2)^2 + \frac{1}{2} [\delta m^2 \vec{S}^2 + Z_3 t \vec{S}^2 + Z_3 \Delta S_\alpha S_\beta]$, ($\alpha \neq \beta$) ; $t \sim T - T_c$, $\Delta : S_\alpha(x) S_\beta(x)$ ($\alpha \neq \beta$) の結合定数, $\vec{S}^2 = \sum_{\alpha=1}^N S_\alpha^2(x)$ 。

【 くりこみ定数と規格化 】 $\mathcal{H}(x)$ に導入されたくりこみ定数 $\{Z\}$ は, $a^2 = \mu^{\epsilon_a} \tilde{a}^2 = Z_3 Z_{3a}^{-1} a_0^2$, $b^2 = \mu^{\epsilon_b} \tilde{b}^2 = Z_3 Z_{3b}^{-1} b_0^2$, $g = \mu^{\epsilon_u} g_0 = Z_3 Z_1^{-1} g_0$; $\epsilon_a = d-2-[S^2]$, $\epsilon_b = d-\sigma-[S^2]$, $\epsilon_u = d-2[S^2]$ ($[S^2]$: S^2 の次元) により関係づけられ, 規格化条件 $\partial \Gamma^{(2)}(p)/\partial p^2|_{p=0} = a^2$, $\partial \Gamma^{(2)}(p)/\partial p^\sigma|_{p=0} = b^2$, $\Gamma^{(4)}(0, \dots, 0) = g$, $Z_3 = [Z_{3a} a^2 p^2 + Z_{3b} b^2 p^\sigma]/[a_0^2 p^2 + b_0^2 p^\sigma]|_{p=\mu} = \{\tilde{a}^2 Z_{3a}/\tilde{a}_0^2$ ($\tilde{b}=0$ or $2-\sigma \leq 0$)

SR-limit ; $\tilde{b}^2 Z_{3b} / \tilde{b}_0^2$ ($\tilde{a} = 0$ or $2-\sigma \gg \tilde{\epsilon}$) LR-limit ; $[Z_{3a} \tilde{a}^2 + Z_{3b} \tilde{b}^2] / [\tilde{a}_0^2 + \tilde{b}^2]$ ($0 < 2-\sigma \lesssim \tilde{\epsilon}$) CE regime} により Z_{3a} , Z_{3b} , Z_1 , Z_3 が Feynman diagram 展開を通して、夫々定まる。

【 Propagator 】 $G(p) = [a^2 p^2 + b^2 p^\sigma]^{-1}$ at T_c は計算を複雑にするので、次の展開形を用いる： $\{[(a^2 + b^2) p^2]^{-1} [1 + \sum_{m=1} \tilde{b}^{2m} (1-p^{\sigma-2})^m] \dots p^2\text{-型}, [(a^2 + b^2) p^\sigma]^{-1} [1 + \sum_{m=1} \tilde{a}^{2m} (1-p^{2-\sigma})^m] \dots p^\sigma\text{-型}\}$, $\bar{X}^2 \equiv X^2 / (a^2 + b^2)$ for $X = a$ or b 。

【 Renormalization-group equations 】 (Case I) $\epsilon_a = 0$, (Case II) $\epsilon_b = 0$, (Case III) $\epsilon_a \neq 0 \neq \epsilon_b$ に分けて調べる。(Case I) : $[\mu \partial / \partial \mu + \mathcal{D}(\bar{u}, \tilde{b}^2) - \mathcal{C}(\gamma_3, \gamma_4, \gamma_5)] \Gamma^{(n)}(p_i; \bar{u}, \tilde{b}^2, \tilde{t}, \tilde{\Delta}, \mu) = 0$, $\mathcal{D}(\bar{u}, \tilde{b}^2) = \beta_{\bar{u}}(\bar{u}) \partial / \partial \bar{u} + \beta_{\tilde{b}}(\tilde{b}^2) \partial / \partial \tilde{b}^2$, $\mathcal{C}(\gamma_3, \gamma_4, \gamma_5) = n \gamma_3(\bar{u}) / 2 + \gamma_4(\bar{u}) \tilde{t} \partial / \partial \tilde{t} + \gamma_5(\bar{u}) \tilde{\Delta} \partial / \partial \tilde{\Delta}$ ($\sim$ 印は無次元量を示す ; $\bar{u} \equiv \tilde{u}(\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2)^{-d/2}$) $\beta_{\bar{u}}(\bar{u})$, $\beta_{\tilde{b}}(\tilde{b}^2) (= \{\beta\})$ は連立方程式 $\mathcal{D}(\bar{u}, \tilde{b}^2) \ln \bar{u} Z_1 Z_3^{-2} = -\epsilon_u - \frac{d}{\sigma} \beta_{\bar{u}}(\tilde{b}^2) / (\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2)$, $\mathcal{D}(\bar{u}, \tilde{b}^2) \ln \tilde{b}^2 Z_{3b} Z_3^{-1} = -\epsilon_b$ から得られ $\{\gamma_j\}$ ($j = 3, 3b, 4, 5$) は $\gamma_j(\bar{u}, \tilde{b}^2) \equiv \mathcal{D}(\bar{u}, \tilde{b}^2) \ln Z_j$ で与えられる。(Case II, III) についても同様にして $\{\beta\}$ $\{\gamma_j\}$ が求められる。

【 Vertex-functions の漸近形 】 これは特性曲線の方法により $\{\beta = 0\}$ を満す固定点で得られる。例えば, $\Gamma^{(2)}$ は, (Case I) の場合,

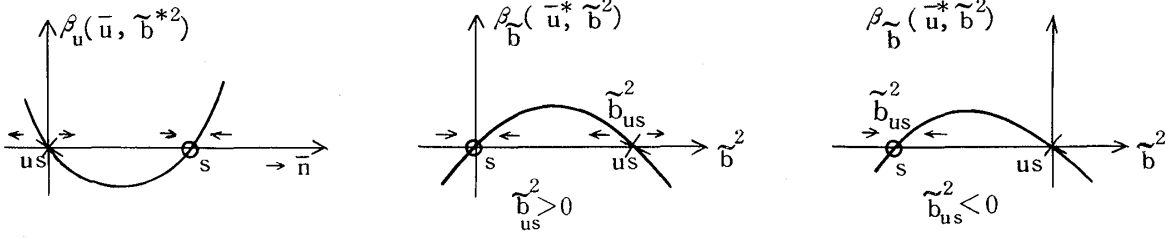
$$\Gamma^{(2)}(\lambda p; \bar{u}, \tilde{b}^2, \tilde{t}, \tilde{\Delta}, \mu) \underset{\lambda \rightarrow 0}{\sim} \lambda^{2-\gamma_3^*} \Gamma^{(2)}(p; \bar{u}^*, \lambda^{-(2-\sigma-\gamma_3^*)}, \tilde{t} \lambda^{-\gamma_4^*}, \tilde{\Delta} \lambda^{-\gamma_5^*}, \mu) \text{ の形に}$$

書ける, 即ち, 固定点での値 (* のついた量) によって表わされる。

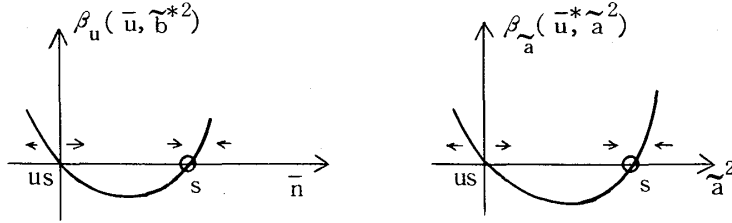
【 固定点と臨界指数 】

(Case. I) : $p^2\text{-型}$ { or $p^\sigma\text{-型}$ } の propagator で展開して得られた $\{\beta\}$ の表式から図のような曲線が求められる。 $\tilde{b}_{us}^2 = \frac{1}{\epsilon_b} [-\epsilon_b + \eta_{(2)}] > 0$. この関係から安定な固定点は $(u^*, \tilde{b}^{*2}) = (u_{SR}^*, 0)$ { or $(\bar{u}_{SR}^*, 0)$ }, 固定点での固有値は $\lambda_u = \epsilon_u$, $\lambda_b = -\epsilon_b + \eta_{(2)}$. $u_{SR}^*, \eta_{(2)}$ は SR 系の固定点と臨界指数, その ϵ^2 項である。 $\tilde{b}_{us}^2 > 0$ の条件から $\lambda_b > 0$,

即ち、短距離相互作用的な固定点が安定な固定点である。



(Case. II): p^2 -型 {or p^σ -型} の propagator を用いた場合, $\{\beta\}$ の表式から安定な固定点 $(\bar{u}^*, \tilde{a}^{*2})$ が存在し, その点での固有値 λ_u, λ_a が得られる。例えば, p^σ -型 prop. の場合,



$$\begin{aligned} \bar{u}^* &= \frac{\epsilon'_6}{N+8} + \frac{\epsilon'^2_6}{N+8} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{(N+8)^2} [2(5N+22) - (N+2) \frac{\epsilon_a}{2\epsilon_u}] \right], \quad \tilde{a}^{*2} = \left(\frac{1}{2\epsilon_u} - \frac{1}{\epsilon_a} \right) \frac{\epsilon_u \epsilon (N+2)}{2(N+8)^2} + \\ &+ \frac{\epsilon'^2(N+2)}{(N+8)^2} \left[\left(\frac{1}{2\epsilon_u} - \frac{1}{\epsilon_a} \right) \epsilon_u \left\{ \frac{3}{8} + \frac{1}{(N+8)^2} [2(5N+22) - (N+2) \left\{ \frac{\epsilon_a}{2\epsilon_u} + \frac{3}{8} + \frac{\epsilon_u}{4\epsilon_a} \left(\frac{2}{\sigma} - 1 \right) \right\}] \right\} \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{\epsilon_u}{2\epsilon_a} \right] \right], \quad \lambda_u = \epsilon_u + \dots, \quad \lambda_a = -\epsilon_a + \dots, \quad \text{ここに, } \epsilon' = 2\sigma - d. \end{aligned}$$

この固定点は長距離-短距離相互作用の競合領域の値である。

(Case. III): p^2 -型 {or p^σ -型} の prop. を用いて $\{\beta\}$ を求め, $\{\beta=0\}$ を満す固定点を調べると, $\epsilon_a = 0 = \epsilon_b$ 又は, (Case I) 又は (Case II) の時のみ固定点が存在する。

従って、上述の二つの場合に尽きる。

臨界指数 η を例にとって図解する。

(Case. I) は $2-\sigma < \eta_{(2)}$ のとき安定で、 p^2 -型 prop. を用いると σ に依らず A 点の値となり、 p^σ -型 prop. では曲線 B となる。相転移には長距離相関が本質的に寄与するので、曲線 B が現われると考えられる。しかし、 $\eta_{(2)}$ は、例えば $N=2$, $d=3$ で 0.02, $N=\infty$ で 0, 即ち、非常に小さな値である。

(Case. II) は $2-\sigma < \eta_{(2)}$ で且つ $\epsilon (=4-d)$, $\epsilon' (=2\sigma-d)$ 展開の成り立つ領域 $\tilde{\epsilon}$ の間で安定で、 p^σ -prop. で得られた曲線 C で表わされる。C は $\sigma=2$ で A と一致する。筆者は ϵ と ϵ' の same order 領域の展開を外挿したために、LR limit の曲線 D に C が漸近している。本来、C と D はなめらかに結ばれる漸近展開の成り立つ領域 $\tilde{\epsilon}$ が 1 より小さく、 $\eta_{(2)}$ より大きい場合、1 より大きい場合、 $\eta_{(2)}$ より小さい場合によって三つの図に分けられる。最後の図は ϵ, ϵ' -展開の性質上ないと考えられる。

