

新たなエルゴード問題を求めて

早大理工 相澤 洋二

エルゴード問題の核心は、物理においても数学においても、存在定理にあるように思えます。観測量の収束、特性指数の存在、測度や運動論的スケール則などは個別エルゴード定理、平均エルゴード定理、さらに乗法的エルゴード定理などの基本ですし、観測をベースにした物理的諸層の存在を明かにするものです。熱力・統計力学から言えば、それはマクロな世界の存在定理という意味を持っています。ではアンサンブル（母集団）の確定ができない状況に対してはどんな存在定理が期待できるでしょうか。

確率論、統計論的な枠組が、実際問題として十全な知識を我々に与えないとき、それに代わる手法を少なくとも物理としてはエルゴード問題として探求しなくてはならないように思える。実際に遭遇しているそのような問題は、最近の複雑系の諸対象の中に端的にあらわれている。たとえば、そのいくつかを掲げるとすれば、偶然性、一過性、開放性、などが多様な姿を見せる場面には必ずといってよいほど、このような問題が顔を出している。たんに自由度が多いからといって、技術的困難さだけのせいにするわけにはいかない問題である。また、コンピューターの描く絵で、あるいは計算結果で想像力にたよる以上のものがほしい。

力学系の中に、とくにエルゴード論の発展はそのような新しい事態に対応する課題を多く潜めているように思える。たとえばすでに多方の関心は薄れてしまったかもしれないが、last KAM の近傍構造やジュリア-マンデルブロー集合に代表されるような超限的微細構造の把握は、上に述べた疑問に深くかかわっているはずであるが、合理的理解からもほど遠い状況であろう。エルゴード問題の発展は、コンピュータという実験手段を手に入れたことによって、新しい物理的な存在定理の追求にも手掛かりを与えてくれるのではないかと思う。本研究会のテーマからは少し外れるが、その一つとして複雑系の探求に関して一言だけ指摘させてもらえば、これまでに議論されていない視点は「複雑系の存在定理」である。

以下ではミックスマスター宇宙モデルについて最近我々が得た非定常カオスに関する具体的な結果を示して、非双曲的力学の重要性を指摘しようと思う。詳細は他にゆづって、subdynamics の非定常性と ω -limit set のヘテロクリニック・コネクションの二つの側面だけ説明する。

ミックスマスター宇宙はビアンキタイプ IX に分類されるもので、真空かつ等方な場合のアインシュタイン方程式からメトリックの対角要素 (α, β, γ) の変化が導かれる。宇宙の体積は、初期 (big bang) から終状態 (big crunch) に向かって、単調で上に凸の変化を示す一方で、各々の成分は非常に複雑な変動を示す。この一過性の過程の中に再帰的な subdynamics

が埋め込まれてることが最近分かった。その挙動は、途中を省くが、次の非双曲的 1 次元写像に帰着できる

$$g_{n+1} = f(g_n) \\ = \begin{cases} 2 - g_n & (g_n > 1) \\ -2 - g_n & (g_n < -1) \\ 1/g_n & (|g_n| \leq 1) \end{cases}$$

この写像の不変測度 $\rho(g)$ は

$$\rho(g) \propto \begin{cases} 1/(g-1) & (g > 1) \\ 2/(1-g)(1+g) & (|g| < 1) \\ -1/(g+1) & (g < -1) \end{cases}$$

で、いわゆる σ -finite infinite measure である。さらにこれらの解析からカスナー・エポックに含まれるカスナー・サイクルの数 n の分布は $P(n) \propto n^{-2}$ となる。丁度、定常と非定常の境界に相当する臨界過程であり、カスナー・サイクルの最大値の分布（累積） $G(X, N)$ は

$$G(X, N) \simeq \begin{cases} e^{-\frac{CN}{X}} & (X > 0) \\ 0 & (X \leq 0) \end{cases}$$

となり、アンサンブルの決定不可能性が結論できる。

宇宙進化の一連の過程の中に非定常な subdynamics が内蔵されていることは一つの発見であるが、もう一つミックスマスター系の特徴は無限遠点に ω -limit set を持ち、そのヘテロクリニック・コネクションによって、変動の振巾と周期とが、big crunch（および big bang）特異点で発散する点にある。力学系の構造として新しいタイプに分類されるだろう。最近、我々はミックスマスター系と同様の構造が、生態系の進化を記述するレプリケータ方程式に含まれていることを見い出し、その subdynamics を導出できた。これについては別の機会にゆづることにするが、新しい問題は subdynamics とそれを包含する元々の力学系との関連を明らかにする点にあり、そこから一過性進化過程の分類が出来るものと確信している。

以上述べた例の他に、非定常カオスの興味深い特性を、クラスター形成の動力学や発生・分化の生物物理学的テーマの中で研究しているが、そこでも「物質様式と運動様式の存在定理」を探るという基本テーゼを追求したいと思っている。