

Navier-Stokes 方程式の定常解の 安定性について

東大 理 増田 久弥

ある物体 Ω の外部 $\mathcal{E}$ を流れる非圧縮性粘性流体の定常流は、(仮定によって) Navier-Stokes 方程式 (N-S 方程式)

$$(1) \quad \begin{cases} -\nu \Delta w - (w \cdot \nabla) w + \nabla p = 0 & (x \in \mathcal{E}) \\ \operatorname{div} w = 0 \end{cases}$$

を満たす。ここで、 ν は、粘性係数 (正定数)、 w は、3次元 (速度) ベクトル、 p は、(スカラーの) 圧力である。

物体の表面 Σ で

$$(2') \quad w = 0 \quad (x \in \Sigma)$$

Ω から十分離れたところで一定の流れ w_∞ になるという条件

$$(2'') \quad w(x) \longrightarrow w_\infty \quad (|x| \longrightarrow \infty)$$

を満たすとする。このような流れの存在は、Leray,

R. Finn, H. Fujita 等によって研究された。

R. Finn は、"もし w_∞ が十分小さいならば、(1) (2) を

満たす w は存在し

$$(3) \quad |w(x) - w_\infty| < C/|x| \quad (x \in E)$$

を“満たす”ことを示した。

これに関係して、彼は (1) (2) の PR 解 (physically reasonable) という概念を導入した。それは、ある $\varepsilon > 0$ が存在し

$$|w(x) - w_\infty| < C/|x|^{\frac{1}{2+\varepsilon}} \quad (x \in E)$$

を“満たす” (1) (2) の解のことである。

さて、“上の如き定常流の場合 $w(x)$ に、disturbance u_0 を与えたとき、乱された場は、時刻 t と共にどう変化するか”という問題を考える。乱された場は、次の N-S 方程式によって、その行動が支配される。

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v - (v \cdot \nabla) v + \nabla p = 0 \\ \operatorname{div} v = 0 \end{cases}$$

$$(5) \quad \begin{cases} v(x, t) = 0 & (\text{on } \Sigma) \\ v \longrightarrow w_\infty & (|x| \longrightarrow \infty) \\ v(x, 0) = w(x) + u_0(x) \end{cases}$$

この問題を、Heywood が Arch. Rat. Mech. Anal. 37 (1970), 48 - 60 の中で初めて扱った。

[有界領域の場合は、J. Serin の仕事がある] 彼は、次の事を示した。

“ w を (3) を満たす (1) (2) の解とする。そこで、 $C < \sqrt{2}$ と仮定する。十分小さい u_0 に対し、(4) (5) の解 v は、

$$\int_E |\nabla_x (v - w)|^2 dx \longrightarrow 0$$

$$\int_K |(v - w)|^2 dx \longrightarrow 0$$

($t \rightarrow \infty$)

(K は、 E の任意のコンパクト集合)

を満たす”

問題は依然として残る。① C が大きいときはどうか？
② 大きい u_0 に対してはどうか。③ 各点で $v(x, t)$ は $w(x)$ に近づくか。④ 近づく order は何か？

得られた結果は次の通り。

定理 $C < \sqrt{2}$ と仮定する。任意の (4) (5) の解 v は、

$$\int_E |\nabla_x (v(x, t) - w(x))|^2 dx \leq \frac{M}{t}$$

$$\sup_{x \in E} |v(x, t) - w(x)| \leq M t^{-\frac{3}{8}}$$

($t \rightarrow \infty$)

を満たす。ここで、 M は、正の定数。

(証明の方針)

$u = v - w$ とおくと、 u は、

$$\begin{cases} u_t = v \Delta u + (u \cdot \nabla) u + (w \cdot \nabla) u + (u \cdot \nabla) w + \nabla p \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u|_{\Sigma} = 0 & u \rightarrow 0 \quad (|x| \rightarrow \infty) \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases}$$

を満たす。 $J(\mathcal{E})$ を $C_0^\infty(\mathcal{E})$ で $\operatorname{div} \varphi = 0$ なる関数の完備化 ($L^2(\mathcal{E})$ での) とする。 P を $L^2(\mathcal{E})$ から $J(\mathcal{E})$ への projection とする。 B を Dirichlet 条件をもつ作用素

$$\begin{aligned} Bu &= -v \Delta u - P(w \cdot \nabla) u - P(u \cdot \nabla) w \\ \operatorname{div} u &= 0 \end{aligned}$$

なる $J(\mathcal{E})$ の中での realization とする。(厳密には、form で定義する)。すると、 B は、maximal accretive operator であることがわかり、更に、holomorphic semi-group を生成する。この時、上の方程式を、 $J(\mathcal{E})$ での方程式に移す。

$$\frac{du}{dt} = -Bu + P(u \cdot \nabla) u \quad (\text{形式的})$$

積分方程式に移すと、(形式的に)

$$u(t) = e^{-tB} u_0 + \int_0^t e^{-(t-s)B} F[u(s)] ds$$

となる。ここで、 $F[u(s)] = P[(u \cdot \nabla) u]$ である。

これを評価するのである。その際、Fractional power に関する T. Kato 先生の仕事が基本的となる。

(注意) 上の解の減衰より、 u は、ある t_0 からさき、ある sector: $|\operatorname{Im} t| < M(\operatorname{Re} t - t_0)$ まで、 t につき解析的に延長されることがわかる。

(注意) ここで述べる方法は、その他の非線型方程式 e.g. $u_t = \Delta u - u^3$ に適用できるか、これは別の機会にゆずる。

[質 問]

Q1 伊藤先生 「一般的に一意性は成立しないが、定理に述べられている T_0 は、個々の弱解によるのか、それとも同じデータ u_0 をもつすべての弱解に共通にとれるのか？」

答 「 T_0 は初期値のみできまり、定性的にキツテリ与えられる。」

Q 2. 藤田先生 「 $|w(x) - w_\infty| < C/|x|$ なる解は、
存在するか？」

答 「R. Finn によると、 w_∞ が小のとき存在する。」

未解決な問題

$\int_{\varepsilon} |\nabla w(x)|^2 dx < C$ なる解 に対し、

定理は成立するか？