

分散性非線型偏微分方程式の

初期値問題の数値解例

名大 プラズマ研 大 内 昭 司

京大 基礎物理研 矢 島 信 男

名大 理 学 部 谷 内 俊 弥

§ 1. 序

粒子間衝突の平均自由行程が大きい稀薄プラズマに於ける波動伝播を考えるとときには、粘性効果よりも分散効果の方が問題であって、分散性非線型偏微分方程式を扱うことになる。これについては前の研究会で報告された¹⁾²⁾。同様な性質を持つ系は KORTWEG と DE VRIES³⁾, GARDNER と MORIKAWA⁴⁾, KRUSKAL と ZABUSKY⁵⁾ 等によっても調べられだが、特に KRUSKAL と ZABUSKY は Fermi-Pasta-Ulam の問題の数値解を求めて論じている。このような系を数値的に解くについては、散逸性の系の場合とは事情が全く異なるので、後者に対して有力な手法もそのまま前者に流用するわけには行かない。我々は有効な手法を見出し、その妥当さを裏付けるために、解析的に解が求められる系に、いくつかの差分近似を適用し、

比較チェックすることとを試みた。問題とした系は (1) で用いた model equations で、その時間についての偏微分方程式を、

- (i) もっとも簡単に前進差分で近似するもの。
- (ii) 散逸性の系に対して有効であった FRIEDRICHS' scheme を用いたもの (LAX の方法)⁶⁾
- (iii) LAX-WENDROFF 式の近似法によるもの。⁷⁾
- (iv) 前記 KRUSKAL と ZABUSKY とが採った RICHARDSON'S scheme で近似するもの。⁵⁾

の四通りの explicit scheme について調べた。

§ 2. 方程式系とその厳密解

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial (nu)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial n}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{\sqrt{n}} \frac{\partial^2 \sqrt{n}}{\partial x^2} \right). \quad \text{E} \end{cases}$$

$$(2) \quad n(x, 0) = 1, \quad u(x, 0) = \sin 2\pi x$$

なる条件のもとに解くことと問題とするが、これは

SCHRÖDINGER 方程式:

$$(3) \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = i\epsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2},$$

$$(4) \quad \psi(x, 0) = \exp\left(\frac{\cos 2\pi x}{4\pi\epsilon l}\right) \quad \text{から}$$

$$(5) \quad n = |4|^2, \quad u = 2 \in \text{Im} \left\{ \frac{1}{4} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\}$$

なる変換によって得られるものである。(3), (4) の解は次の形で得られる。

$$(6) \quad \psi(x, t) = J_0 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-i)^m \cdot J_m \cdot e^{-i \cdot 4m^2 \pi \epsilon t} \cos 2m\pi x$$

ここで J_m は $\frac{1}{4\pi\epsilon}$ を argument とする m 次の (第一種) Bessel 函数である。(1)(2) の解はこれを (5) に代入して得られるが、特に

$$(7) \quad n(x, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i \cdot 2m\pi x} J_m \left(\frac{|\sin 4m\pi^2 \epsilon t|}{2\pi\epsilon} \right)$$

とも書ける。また初期条件の周期性から

$$(8) \quad \begin{cases} n(-x, t) = n(x, t), & n(\frac{1}{2} + x, t) = n(\frac{1}{2} - x, t) \\ u(-x, t) = -u(x, t), & u(\frac{1}{2} + x, t) = -u(\frac{1}{2} - x, t) \end{cases}$$

および

$$(9) \quad \psi(-x, t) = \psi(x, t), \quad u(\frac{1}{2} + x, t) = \psi(\frac{1}{2} - x, t)$$

などが云えるし、又 (6) から知られるように ψ 従って n ,

u も $T = \frac{1}{2\pi\epsilon}$ を周期として t についての周期函数でもある。

特に

$$(10) \begin{cases} \psi(x, \frac{T}{2}+t) = \psi(\frac{1}{2}-x, t) \\ n(x, \frac{T}{4}+t) = n(x, \frac{T}{4}-t), \quad u(x, \frac{T}{4}+t) = -u(x, \frac{T}{4}-t) \end{cases}$$

であるから (1), (2) には境界条件 (8) を加えて $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, $0 \leq t \leq \frac{T}{4}$ の範囲で又 (3), (4) には (9) を境界条件として.

$0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, $0 \leq t \leq \frac{T}{2}$ の範囲で調べればよいことになる。4, n として特に u の様子は ϵ の値で異なるが、ここでは、

$\epsilon = \frac{1}{3\pi} (= 0.106103 \dots)$ とする。このとき $T = 1.5$ である。

ψ および n, u の様子を図 1, 2 に示す。

§ 3. 方程式 (3), (4), (9) の数値解

まず上記の線型偏微分方程式について考える。これに LAX-RICHITMYER の Equivalence Theorem を適用する。^{8) 9)} 即ち差分 scheme を $f(t+\Delta t) = S_{\Delta} \cdot f(t)$ (S_{Δ} は空間的移動 $T_j - T_j \cdot g(x) = g(x+j\Delta x)$ — の一次結合) の形に表わしたとき、その正確度が 1 以上で、かつ安定ならば、差分方程式の解は微分方程式の解に収束するのであるが、 ψ の Fourier 展開を $\psi(x, t+\Delta t) = \sum_m \phi_m^* e^{i \cdot 2\pi m x}$ としてこの Fourier 係数についての差分 scheme が $\phi_m^{k+1} = C_m \phi_m^k$ であるとなれば収束の条件は

$$e^{-i \cdot 4\pi^2 \epsilon^2 \Delta t} - C_m = O((\Delta t)^{\mu+1}) \text{ で } \mu \geq 1$$

および $|C_m| \leq 1$ である。

(i) 前進差分 scheme

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \rightarrow \frac{f(x, t + \Delta t) - f(x, t)}{\Delta t}$$

$$S_\Delta = T_0 + \frac{i\epsilon\Delta t}{(\Delta x)^2} (T - 2T_0 + T_{-1})$$

$$C_m = 1 - \frac{4i\epsilon\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2 m\pi\Delta x$$

よって $\Delta t = O((\Delta x)^2)$ として $\mu = 1$ であるが
 $|C_m| \leq 1$ であるから不安定。

(ii) FRIEDRICHS の scheme

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \rightarrow \frac{1}{\Delta t} \left(f(x, t + \Delta t) - \frac{1}{2} \{ f(x + \Delta x, t) + f(x - \Delta x, t) \} \right)$$

$$S_\Delta = \frac{1}{2} (T_1 + T_{-1}) + \frac{i\epsilon\Delta t}{(\Delta x)^2} (T_1 - 2T_0 + T_{-1})$$

$$C_m = \cos 2m\pi\Delta x - \frac{4i\epsilon\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2 m\pi\Delta x$$

よって $\Delta t = O(\Delta x)$ として $\mu = 1$ であるが。

$$|C_m|^2 = 1 - \sin^2 2m\pi\Delta x \cdot \left\{ 1 - \frac{4\epsilon^2(\Delta t)^2}{(\Delta x)^4} \tan^2 m\pi\Delta x \right\}$$

で右辺の $\{ \}$ 内は m の値によっては負になるので不安定.

(iii) LAX-WENDROFF の scheme

$$\begin{aligned}\psi(x, t + \Delta t) &\simeq \psi + \Delta t \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \\ &= \psi + i\epsilon \Delta t \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{(\epsilon \Delta t)^2}{2} \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4}\end{aligned}$$

これから
$$\begin{aligned}S_\Delta = T_0 + \frac{i\epsilon \Delta t}{(\Delta x)^2} (T_1 - 2T_0 + T_{-1}) \\ - \frac{(\epsilon \Delta t)^2}{2(\Delta x)^4} (T_2 - 4T_1 + 6T_0 - 4T_{-1} + T_{-2})\end{aligned}$$

$$C_m = 1 - \frac{4i\epsilon \Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2 m\pi \Delta x - \frac{8(\epsilon \Delta t)^2}{(\Delta x)^4} \sin^4 m\pi \Delta x$$

よって $\Delta t = O(\Delta x)$ として $\mu = 2$ であるが

$$|C_m|^2 = 1 + \frac{64(\epsilon \Delta t)^4}{(\Delta x)^8} \sin^8 m\pi \Delta x$$

であるから不安定.

(iv) leap-frog scheme (RICHARDSON'S overlapping step method)

$$\frac{\partial f(x, t + \Delta t)}{\partial t} \rightarrow \frac{f(x, t + \Delta t) - f(x, t - \Delta t)}{2\Delta t}$$

$$\phi_m^{k+1} = \phi_m^{k-1} - \frac{8i\epsilon \Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2 m\pi \Delta x \cdot \phi_m^k$$

したがって $C_m^n = A_+ \cdot C_+^n + A_- \cdot C_-^n$ ($A_{\pm}$: 定数) の形となる。

ここで C_+ , C_- は

$$C^2 - \frac{8i\epsilon\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2 m\pi\Delta x \cdot C - 1 = 0 \quad \text{の根である。}$$

この場合、もとの微分方程式の解について

$$\mu(t+\Delta t) - S_{\Delta}(\mu(t), \mu(t-\Delta t)) = O(\Delta t \cdot (\Delta x)^2)$$

であるから $\Delta t = O((\Delta x)^2)$ のとき $\mu=1$ 。また安定条件は

$$|C_+|, |C_-| \leq 1, \quad \text{即ち}$$

$$\frac{4\epsilon\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq 1,$$

$$(\epsilon = \frac{1}{3\pi} \text{で}) \quad \Delta x = 0.01, \quad \Delta t = 0.0002 \quad \text{に対し}$$

では上式左辺の値は $0.84882 \dots$ であるが、この場合の計算を図3に示す。この scheme では $t=0$ における初期値のほか $t=\Delta t$ における値が必要であるが、これは (i), (ii) のいずれの scheme を用いても、同様に良い結果が得られる。

§ 4. 非線型系 (1)(2)(8) の数値解

前節で考えた scheme を今度は方程式 (1)(2)(8) に適用してみよう。力であるが LAX の Equivalence Theorem によって、特に安定条件を示すために (1) の n , u をそれぞれ $N+n(x, t)$,

$$U + u(x, t), \quad n \ll N, \quad \frac{\partial n}{\partial x}, \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \dots \ll N, \\ u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \dots \ll U \quad \text{として線型化した}$$

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} + N \frac{\partial u}{\partial x} + U \frac{\partial n}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{c^2}{N} \frac{\partial^3 n}{\partial x^3} \end{cases}$$

で n, u の Fourier 係数 P_m^k, q_m^k ($n(x, k\Delta t) = \sum_m P_m^k e^{i \cdot 2\pi m x}$, $u(x, k\Delta t) = \sum_m q_m^k e^{i \cdot 2\pi m x}$) について前節と同じように調べることにする。以下では $f(j\Delta x, k\Delta t)$ を f_j^k と書き、また $\theta_m = 2\pi m \Delta x$ と置く。

(i) 前進差分 scheme

$$(12) \quad \begin{cases} n_j^{k+1} = n_j^k - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (n_{j+1}^k u_{j+1}^k - n_{j-1}^k u_{j-1}^k) \\ u_j^{k+1} = u_j^k - \frac{\Delta t}{4\Delta x} \{ (u_{j+1}^k)^2 - (u_{j-1}^k)^2 \} + \frac{c^2 \Delta t}{2(\Delta x)^3} R_j^k \end{cases}$$

$$(13) \quad R_j^k = \frac{n_{j+2}^k + n_j^k}{n_{j+1}^k} - \frac{n_j^k + n_{j-2}^k}{n_{j-1}^k} \\ + \frac{1}{8} \left\{ \left(\frac{n_{j+2}^k - n_j^k}{n_{j+1}^k} \right)^2 - \left(\frac{n_j^k - n_{j-2}^k}{n_{j-1}^k} \right)^2 \right\}$$

(11) については

$$(14) \begin{pmatrix} P_m^{k+1} \\ q_m^{k+1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - i \frac{\Delta t}{\Delta x} U \sin \theta_m & -i \frac{\Delta t}{\Delta x} N \sin \theta_m \\ i \frac{2\epsilon^2 \Delta t}{N(\Delta x)^3} (\cos \theta_m - 1) \sin \theta_m & 1 - i \frac{\Delta t}{\Delta x} U \sin \theta_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_m^k \\ q_m^k \end{pmatrix}$$

安定条件は右辺の行列の固有値の絶対値が 1 を越えないことであるが、その固有値は、

$$1 - i \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin \theta_m \cdot \left(U \pm \frac{2\epsilon}{\Delta x} \sin \frac{\theta_m}{2} \right) \text{ であるから、}$$

この scheme は不安定である。実際の計算でも振動が起きてしまう。(図 3)

(ii) FRIEDRICHS' scheme

(12) の中一、二式の右辺中一項とそれぞれ $\frac{1}{2}(n_{j+1}^k + n_{j-1}^k)$, $\frac{1}{2}(u_{j+1}^k + u_{j-1}^k)$ としたものである。

(14) に対応する式は

$$(15) \begin{pmatrix} P_m^{k+1} \\ q_m^{k+1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta_m - i \frac{\Delta t}{\Delta x} U \sin \theta_m & -i \frac{\Delta t}{\Delta x} N \sin \theta_m \\ i \frac{2\epsilon^2 \Delta t}{N(\Delta x)^3} (\cos \theta_m - 1) \sin \theta_m & \cos \theta_m - i \frac{\Delta t}{\Delta x} U \sin \theta_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_m^k \\ q_m^k \end{pmatrix}$$

で安定条件は

$$\cos^2 \theta_m + \left\{ \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \sin \theta_m \cdot \left(U \pm \frac{2E}{\Delta x} \sin \frac{\theta_m}{2} \right) \right\}^2 \leq 1$$

この左辺は

$$1 - \left[1 - \left\{ \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(U \pm \frac{2E}{\Delta x} \sin \frac{\theta_m}{2} \right) \right\}^2 \right] \cdot \sin^2 \theta_m$$

と書けるから 結局

$$(16) \quad |U| + \frac{2E}{\Delta x} < \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{である.}$$

実際の計算例 ($E = \frac{1}{3\pi}$, $\Delta x = 0.01$, $\Delta t = 0.0002$,

$|U| < 2.2$) では、減衰効果が著しく表われている。(図4)

(iii) LAX-WENDROFF'S method

$n u = v$ として (各式とも右辺では upper index を省略)

$$(17) \quad \begin{cases} n_j^{k+1} = n_j - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (v_{j+1} - v_{j-1}) + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (u_{j+1} v_{j+1} - 2u_j v_j + u_{j-1} v_{j-1}) \\ \quad - \frac{(E\Delta t)^2}{2\Delta x} (n_{j+1} R_{j+1} - n_{j-1} R_{j-1}) \\ u_j^{k+1} = u_j + E^2 \Delta t R_j - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \{ (u_{j+1})^2 - (u_{j-1})^2 \} \\ \quad + \frac{(E\Delta t)^2}{2} \left(S_j - \frac{u_{j+1} R_{j+1} - u_{j-1} R_{j-1}}{2\Delta x} \right) + \frac{(\Delta t)^2}{2\Delta x} \{ (u_{j+1})^3 - (u_{j-1})^3 \} \end{cases}$$

ここで R_j^k は (13) で与えられたもの。また

$$(18) \quad S_j = \frac{1}{(2-\epsilon)^4} \left\{ \frac{V_{j+2} - V_j}{n_{j+1}} \left(\frac{n_{j+3} - n_{j+1}}{n_{j+2}} - \frac{n_{j+1} - n_{j-1}}{n_j} \right) - \frac{V_j - V_{j-2}}{n_{j-1}} \right. \\ \times \left. \left(\frac{n_{j+1} - n_{j-1}}{n_j} - \frac{n_{j-1} - n_{j-3}}{n_{j-1}} \right) \right\} - \frac{1}{(\Delta x)^4} \left(\frac{V_{j+2} - 2V_{j+1} + V_j}{n_{j+1}} \right. \\ \left. - 2 \frac{V_{j+1} - 2V_j + V_{j-1}}{n_j} + \frac{V_j - 2V_{j-1} + V_{j-2}}{n_{j-1}} \right) \text{ である.}$$

線型化方程式 (11) についての Amplification Matrix は

$$(19) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

$$a_{11} = a_{22} = 1 - i \frac{U \Delta t}{\Delta x} \sin 2\theta_m - 2 \left(\frac{U \Delta t}{\Delta x} \right)^2 \sin^2 \theta_m \\ - 8 \frac{(E \Delta t)^2}{(\Delta x)^4} \sin^4 \theta_m$$

$$a_{12} = -i \frac{N \Delta t}{\Delta x} \sin 2\theta_m - \frac{4NU(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} \sin^2 \theta_m$$

$$a_{21} = \left(\frac{2E \sin^2 \theta_m}{N \Delta x} \right) \cdot a_{12}$$

であるから、その固有値入は $y = \frac{2\epsilon\Delta t}{\Delta x} \sin \theta_m$ として

$$\lambda = \left(1 - \frac{U^2}{2\epsilon^2} y^2 - \frac{y^4}{2(\epsilon\Delta t)^2} \pm \frac{y^3}{\epsilon^2\Delta t}\right) - i \frac{\sin 2\theta_m}{\Delta x} (U\Delta t \mp y).$$

よって $|\lambda| \leq 1$ なるためには

$$y^4 \mp 4Vy^3 + (6V^2 - (\Delta x)^2)y^2 \mp 2V(2V^2 - (\Delta x)^2)y + V^2(V^2 - (\Delta x)^2) \leq 0$$

ただし $V = U\Delta t$ である。

これは $|V| \ll \Delta x$ の場合には

$$(20) \quad |V| \frac{\Delta t}{\Delta x} + \frac{2\epsilon\Delta t}{(\Delta x)^2} < 1$$

即ち前項の条件に帰着する。

実際この scheme による計算は ($\epsilon = \frac{1}{3\pi}$),

$\Delta x = 0.01$ に対し、 $\Delta t \leq 0.0004$ では旨く行っている。

(iv) RICHARDSON'S scheme

$$(21) \quad \begin{cases} n_j^{k+1} = n_j^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} (n_{j+1}^k u_{j+1}^k - n_{j-1}^k u_{j-1}^k) \\ u_j^{k+1} = u_j^k - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \{ (u_{j+1}^k)^2 - (u_{j-1}^k)^2 \} + \frac{\epsilon^2 \Delta t}{(\Delta x)^3} R_j \end{cases}$$

ここで R_j はやはり (13) で与えられたものである。

線型化された方程式 (11) については

$$(22) \begin{pmatrix} p_m^{k+1} \\ q_m^{k+1} \\ p_m^k \\ q_m^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \frac{2U\Delta t}{\Delta x} \sin 2\theta_m & -i \frac{2N\Delta t}{\Delta x} \sin 2\theta_m & 1 & 0 \\ -i \frac{8\epsilon^2 \Delta t}{N(\Delta x)^3} \sin^2 \theta \sin 2\theta_m & -i \frac{2U\Delta t}{\Delta x} \sin 2\theta_m & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_m^k \\ q_m^k \\ p_m^{k-1} \\ q_m^{k-1} \end{pmatrix}$$

これに対する固有方程式は

$$\lambda^2 + 2i\lambda \left\{ \frac{U\Delta t}{\Delta x} \pm \frac{2\epsilon\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin \theta \right\} \sin 2\theta_m - 1 = 0.$$

$|\lambda| \leq 1$ の条件はある実数 α によって

$$\frac{U\Delta t}{\Delta x} \pm \frac{2\epsilon\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin \theta = \sin \alpha$$

と書けること、即ち、

$$|U| \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} + \frac{2\epsilon\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq 1$$

が安定条件である。

前にも触れたように、この scheme には $t=0$ での初期値の他に $t=\Delta t$ での出発値を与えねばならない。それを前進差分 scheme で出したときのこの誤差は $(\Delta t)^2$ の order であって、その後の計算は $(\epsilon = \frac{1}{3\pi}, \Delta x = 0.01) \Delta t \geq 0.0005$ では十分良い結果になっている。(図 5-2.3) (しかしながら

LAX の方法を使うと $\Delta u = O(\Delta x) \approx -0.005u$ となる. ($\Delta n \neq 0$)

さて Δx が十分小さければ $u_{j-1}^k, u_j^k, u_{j+1}^k$ の誤差を共通に δ_k とおけよう. また n^k の誤差は無視できるとし、考えている t の範囲で $\frac{\partial u}{\partial x}$ が余り急に変らなければ

$$\beta = \frac{\Delta x}{\Delta t} (u_{j+1}^k - u_{j-1}^k) \text{ は定数とみなせて}$$

$$\delta_{k+k'} \approx C_1 (1-\beta)^{k'} + C_2 (-)^{k'} (1+\beta)^{k'}$$

となることが u に対する差分 scheme: (21) のオ2式から導ける. これによれば $u_{j+1} > u_{j-1}$ のときには、オ2項が主になるので、 δ_k は各 step 毎に符号を変えながら、その絶対値が成長することになる. LAX の方法で出発値を出した場合の計算経過には、正にこの効果が表われているのが、図 5-1, 2 で見られる.

・保存形にすることの必要性

散逸性の系に対して有効ないわゆる LAX の方法では、

FRIEDRICHS' scheme を採ることと並んで保存形を用いることが、条件になっていたが、今の場合でも (1) で

$$(a) \quad \frac{\partial(nu)}{\partial x} \text{ を } n \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial n}{\partial x} \text{ として}$$

$$(b) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} \quad \text{を} \quad u \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{として}$$

$$(c) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{\sqrt{n}} \frac{\partial^2 \sqrt{n}}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{n} \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - \frac{1}{2n^2} \left(\frac{\partial n^2}{\partial x} \right)^2 \right\} \quad \text{を}$$

$$\frac{1}{n} \frac{\partial^3 n}{\partial x^3} - \frac{2}{n^2} \cdot \frac{\partial n}{\partial x} \cdot \frac{\partial n^2}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x} \right)^3$$

としてみると

(b)の影響はほとんどないが他は(特に(c)は)計算の比較的早い段階で振動を起してしまうので一般には保存形にすることが必要である。

参 考 文 献

- 1) 谷内俊弥, 数理解析研究所講究録 10 (1966) 20
- 2) 矢島信男, 数理解析研究所講究録 24 (1967) 45
- 3) D. J. KORTWEG and G. DE VRIES, *Phil. Mag.* 39 (1895) 442
- 4) C. S. GARDNER and G. K. MORIKAWA, *Courant Institute of Math. Science, Report NYO-9082* (1960)
- 5) N. J. ZABUSKY and M. D. KRUSKAL, *Phys. Rev. Lett.* 15 (1965) 240
- 6) P. D. LAX, *C. P. A. M.* 7 (1954) 159
- 7) P. D. LAX and B. WENDROFF, *C. P. A. M.* 13 (1960) 217
- 8) 山口昌哉, 数理解析研究所講究録 10 (1966) 1
- 9) R. D. RICHTMYER, *Difference Methods for Initial Value Problems* (1957)

Fig 1-1

$R=4$

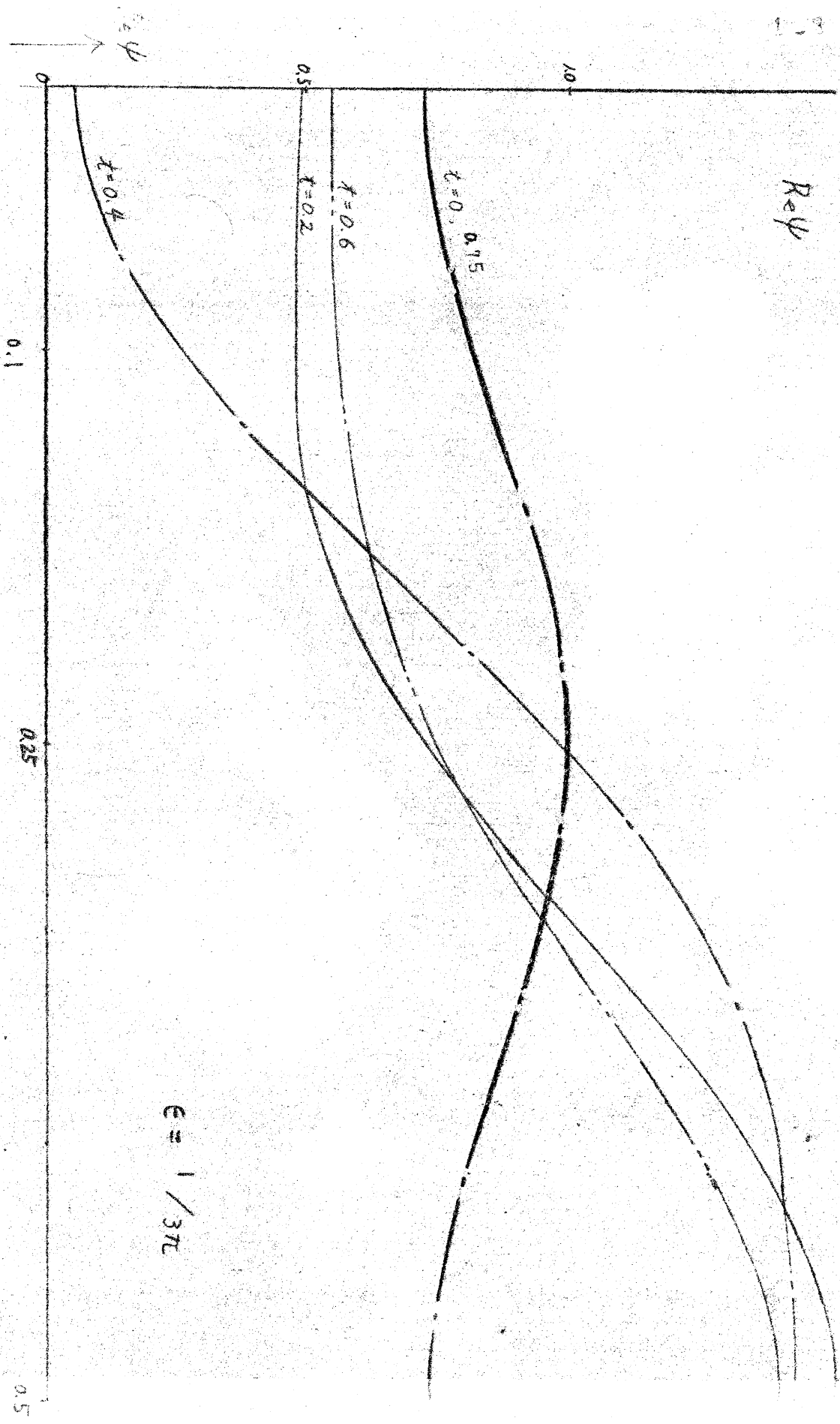
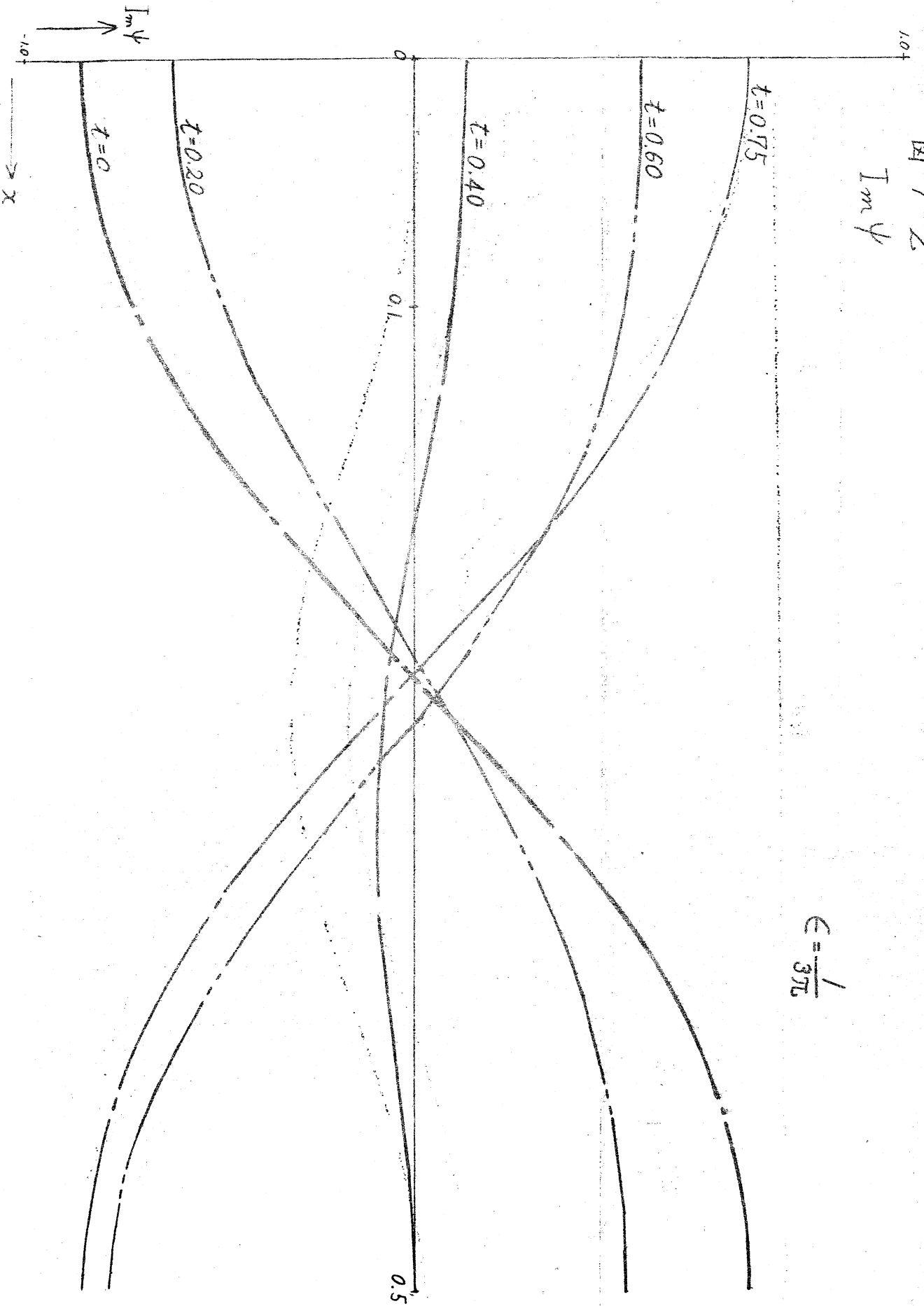


Fig 1-2

$\text{Im } \psi$

$$\epsilon = -\frac{1}{3\pi}$$

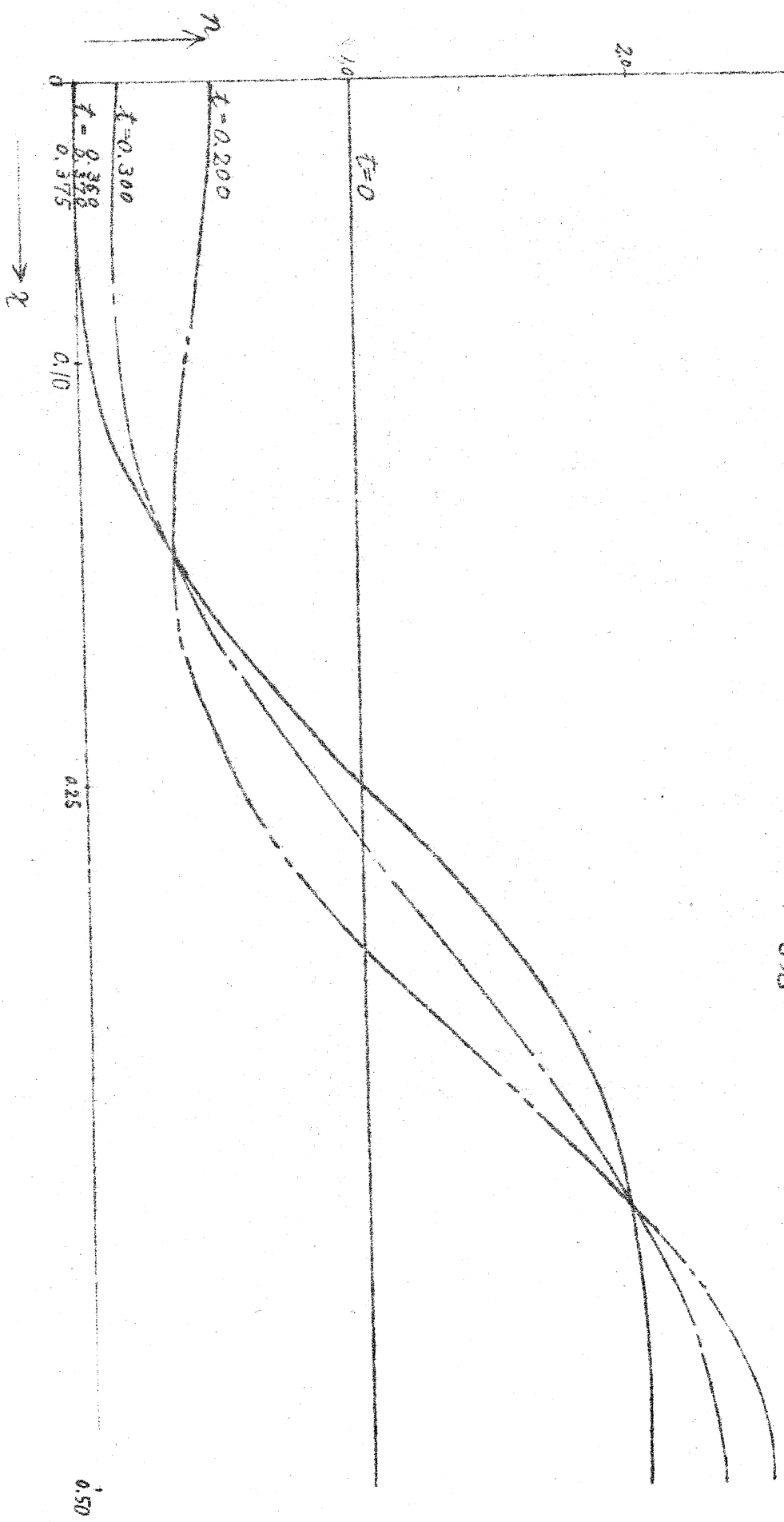


(18)

圖 2-1

η

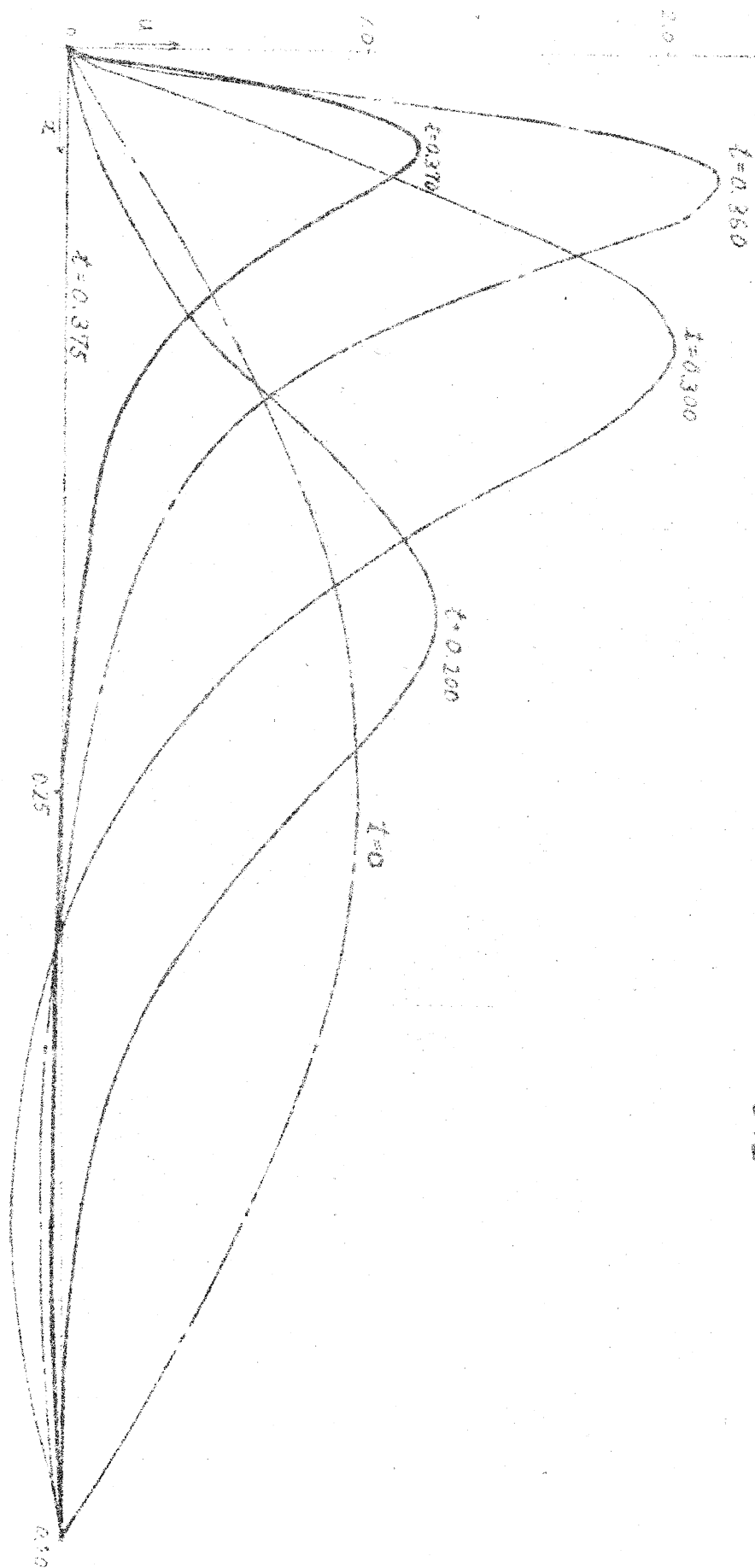
$$\epsilon = \frac{1}{3\pi}$$



Eq 2 = 2

u

$$C = \frac{1}{3\pi}$$



(20)

前進差分の計算

$$T = 0.06 = 300 \Delta t$$

$$\Delta x = 0.01$$

$$\epsilon = \frac{1}{3\pi}$$

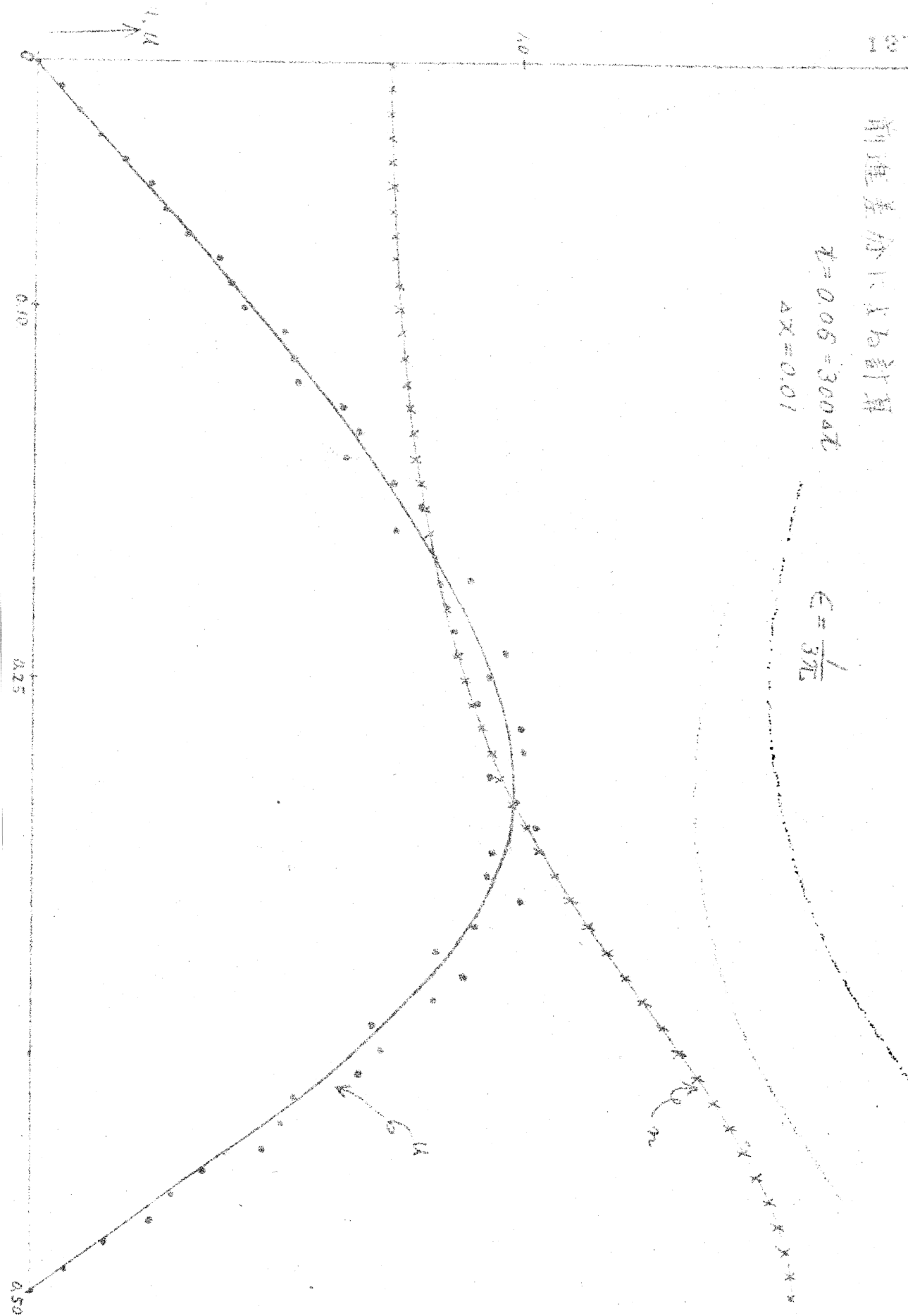


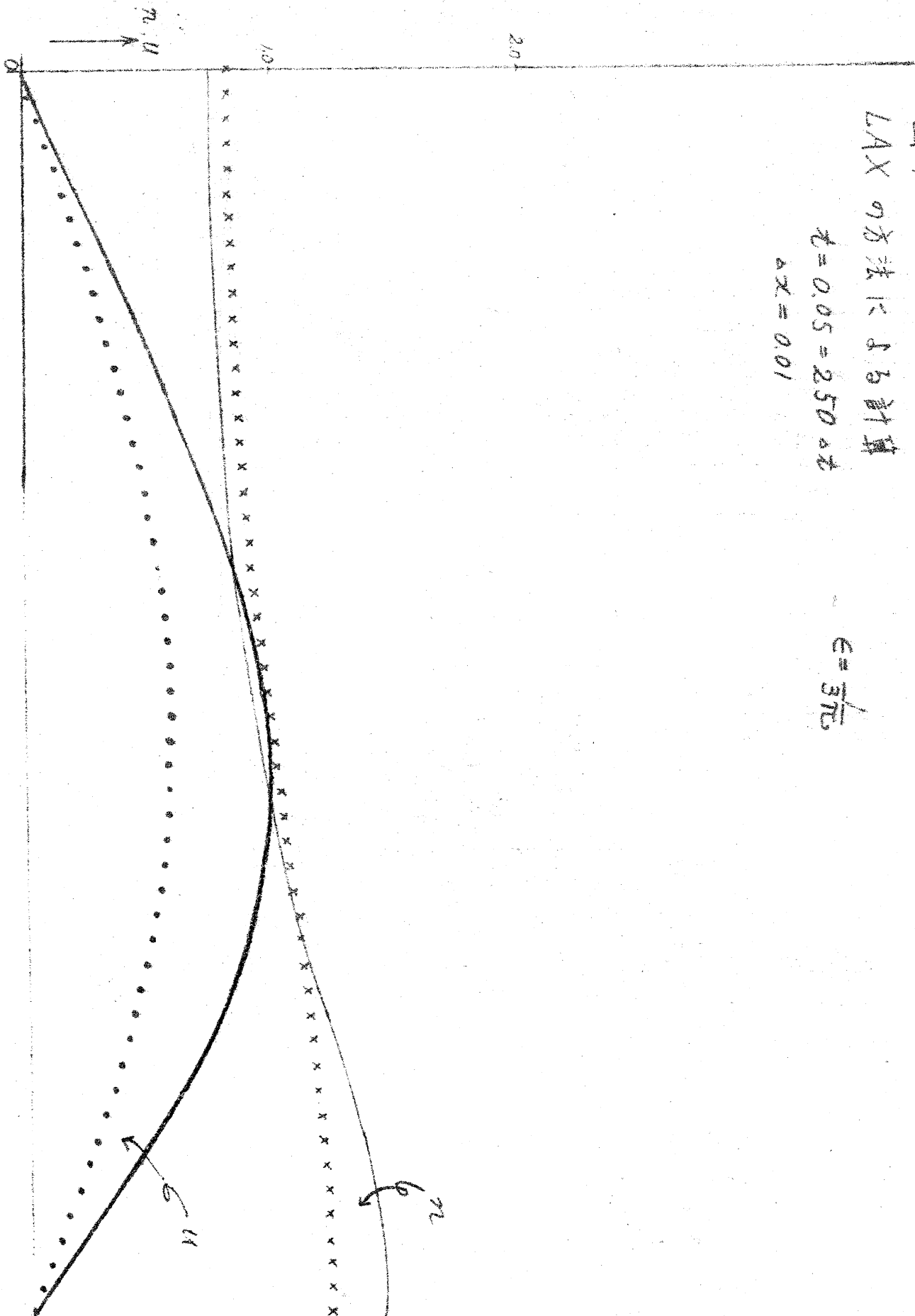
図 4

LAX の方法による計算

$$\epsilon = 0.05 = 250 \Delta x$$

$$\Delta x = 0.01$$

$$\epsilon = \frac{1}{3\pi}$$



"leap-frog" scheme による計算

出発値を Friedrichs' scheme により算出

— $t=0.3600$ に対する厳密解

• $t=0.3600 = 1800 \Delta t$ に対する
差分方程式の解

• $t=0.3602 = 1801 \Delta t$ に対する
差分方程式の解

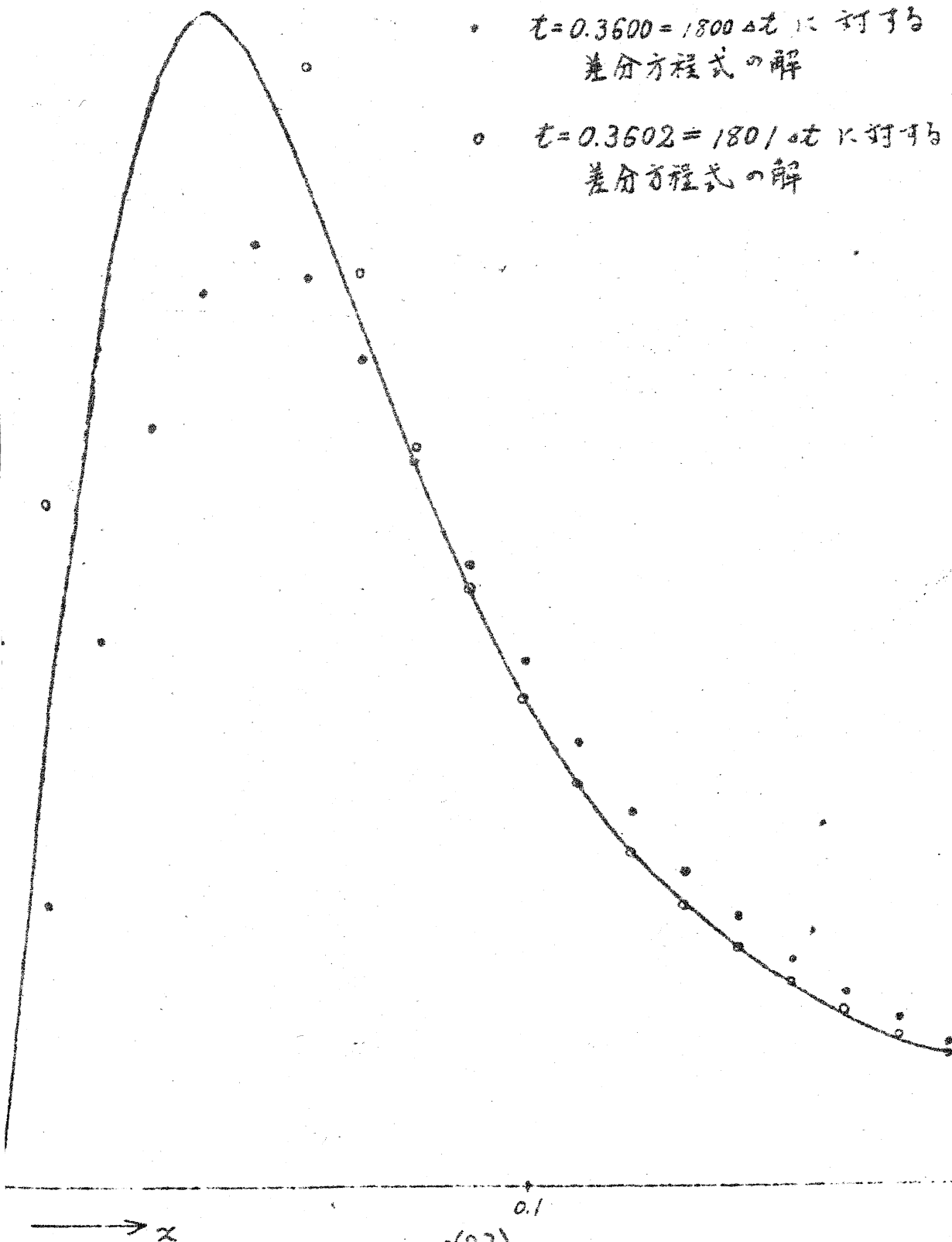
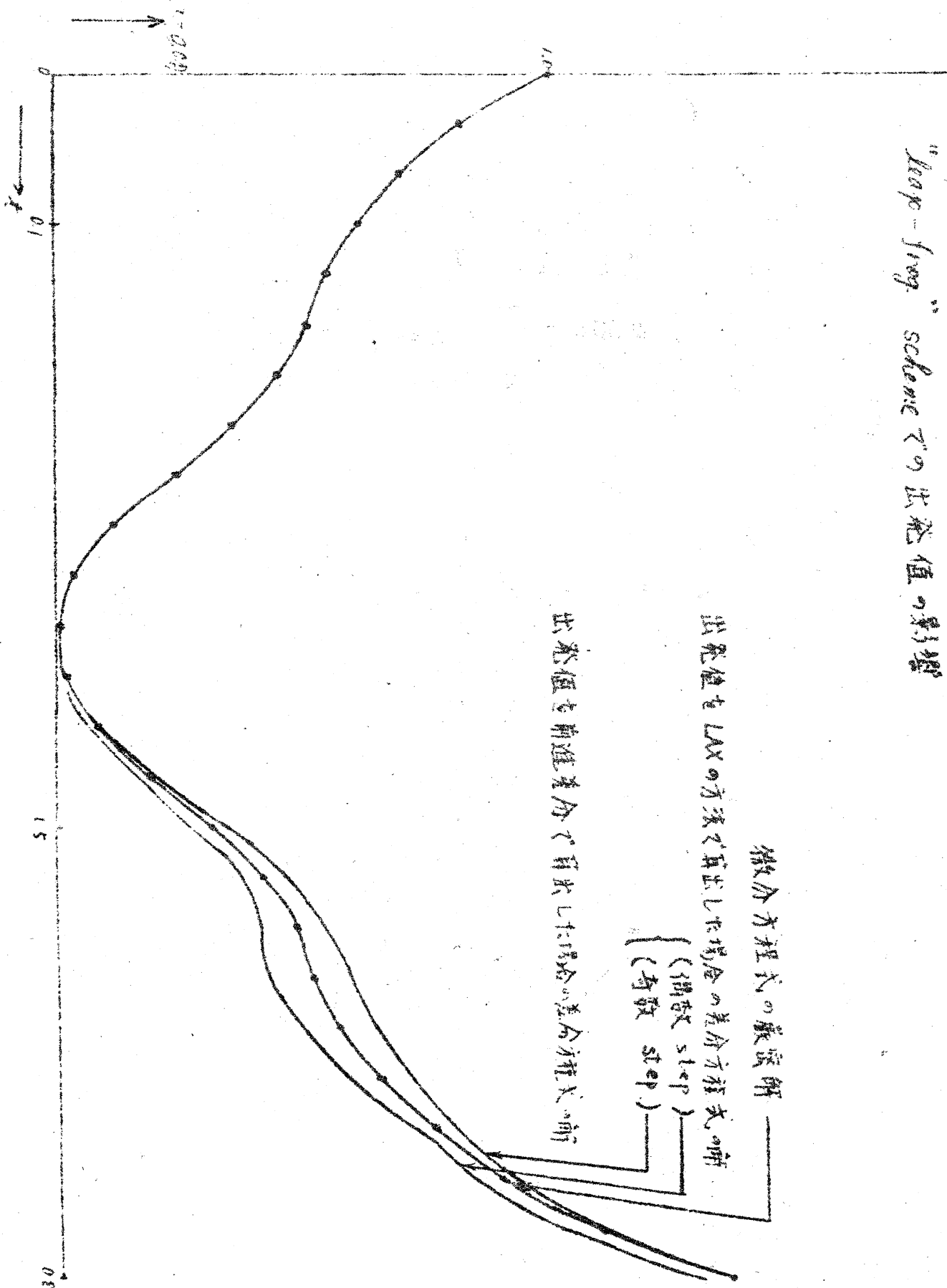
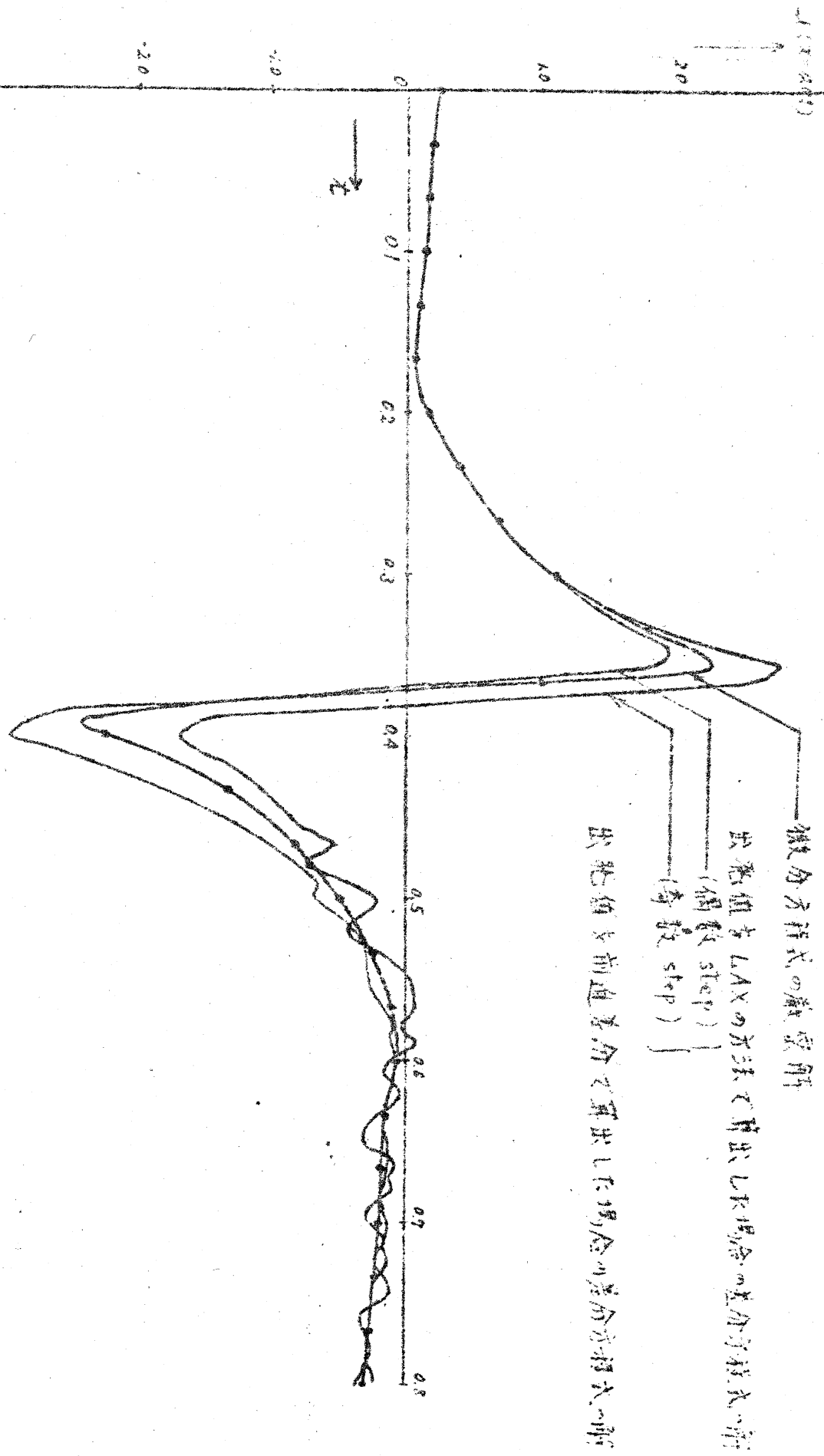


図5-2

"leap-frog" scheme の出力値の影響



"Leap-frog" scheme の収束値の影響



出 発 値 と 前 進 差 分 で 算 出 し た 場 合 の 差 分 方 程 式 の 解