

Landau level broadening by small periodic perturbation

京大理 岩 塚 明 (Akira IWATSUKA)

§1. Introduction

2次元平面内で定数磁場をもつシュレディンガー作用素を考える。すなわち $B_0 > 0$ を定数とし、

$$(1) \quad H = (D_1 + \frac{B_0}{2}x_2)^2 + (D_2 - \frac{B_0}{2}x_1)^2 + V(x),$$

を $L^2(\mathbb{R}^2)$ 内の自己共役作用素として実現したものを考える。ここで V は電場のポテンシャルで $\mathbb{R}^2$ 上の実数値関数、 $D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$ ($j=1, 2$) とする。 V が周期的な場合の H のスペクトルについて調べる。簡単のため $T_1, T_2 > 0$ とし

$$(2) \quad V(x_1 + T_1, x_2) = V(x_1, x_2 + T_2) = V(x_1, x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

という周期性をもつものとする。

磁場がない場合の周期的ポテンシャルをもつシュレディンガー作用素はよく知られているように Bloch 理論を用いてスペクトルは絶対連続となることがいえる ([T])。ところが $B_0 \neq 0$ の場合には事情が複雑になってくる。それは通常の平行移動 $u(x_1, x_2) \rightarrow u(x_1 + T_1, x_2)$ と H が交換可能でないこ

とによる。その替わりに magnetic translation として知られる次の作用素 S_1, S_2 が H と交換可能となる:

$$S_1 u(x_1, x_2) := e^{-\frac{i}{2} B_0 T_1 x_2} u(x_1 + T_1, x_2)$$

$$S_2 u(x_1, x_2) := e^{\frac{i}{2} B_0 T_2 x_1} u(x_1, x_2 + T_2).$$

([21], [22] を見よ。) ところが S_1, S_2 の間には交換関係

$$S_1 S_2 = e^{i B_0 T_1 T_2} S_2 S_1$$

が成り立ち、 S_1 と S_2 が交換可能であるのは

$$(3) \quad \frac{B_0 T_1 T_2}{2\pi} =: N \in \mathbb{Z}$$

となるときである。 N が有理数のときには周期を何倍かして考えればよいので、結局 N が有理数が無理数であるかで H のスペクトルの様子は大きく異なることとなる。 N が無理数の場合には H のスペクトルは $[H-S]$ により調べられているがここでは (3) を仮定し、従って Bloch 波を用いた解析ができる場合について調べる。

§ 2. Magnetic Bloch Theory

上の S_j を用いて Bloch 波の関数の空間を次の様に

$$\Sigma(p_1, p_2) := \{ u \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \mid S_j u = e^{ip_j T_j} u \ (j=1, 2) \}$$

とおく. 但し, $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ は quasi momenta とおけば
 このパラメータは, 明らか12,

$$\Sigma(p_1 + \frac{2\pi}{T_1}, p_2) = \Sigma(p_1, p_2 + \frac{2\pi}{T_2}) = \Sigma(p_1, p_2)$$

という周期性をもつので, $p \in \Omega^* := [0, \frac{2\pi}{T_1}) \times [0, \frac{2\pi}{T_2})$ に
 制限して考えれば"充分"である. これを用いて

$$\Sigma := \{ u \in C^\infty(\mathbb{R}_x^2 \times \mathbb{R}_p^2) \mid u(x, p) \in \Sigma(p), \\ u(x, p_1 + \frac{2\pi}{T_1}, p_2) = u(x, p_1, p_2 + \frac{2\pi}{T_2}) = u(x, p) \}$$

とおくと, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ と Σ の間にユニタリ変換が存在する:

$$U: \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \ni f \mapsto u \in \Sigma, \quad \rho = (\text{vol } \Omega^*)^{1/2}$$

$$(Uf)(x, p) := \frac{1}{\rho} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^2} e^{-i(\ell_1 p_1 T_1 + \ell_2 p_2 T_2)} S_1^{\ell_1} S_2^{\ell_2} f(x),$$

とあれば U は全単射であり,

$$(U^{-1}u)(x) = \rho^{-1} \int_{\Omega^*} u(x, p) dp,$$

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \|u\|_{\Sigma} := \left\{ \int_{\Omega \times \Omega^*} dx dp |u(x, p)|^2 \right\}^{1/2}.$$

ここで $\Omega = [0, T_1) \times [0, T_2)$ は V の周期のある lattice $\Gamma :=$

$(\pi_1 \mathbb{Z}) \times (\pi_2 \mathbb{Z})$ の基本領域である $(\Omega \cong \mathbb{R}^2 / \Gamma)$. この
 U を用いて $\tilde{H} := U H U^*$ とおけば

$$\tilde{H} = \int_{\Omega^*}^{\oplus} \tilde{H}(p) dp$$

と direct integral decomposition できる. すなわち

$$(\tilde{H} u)(x, p) = (\tilde{H}(p) u(\cdot, p))(x)$$

$$\tilde{H}(p) = (D_1 + \frac{B_0}{2} x_2)^2 + (D_2 - \frac{B_0}{2} x_1)^2 + V \quad \text{on } \Sigma(p)$$

となる. $\tilde{H}(p)$ は p に依らず共通の形の微分作用素で Ω 上の定義されるが, p 毎に異なる境界条件を付けて考えた作用素である. 正確には $H|_{\Sigma(p)}$ の $L^2(\Omega)$ での作用素の閉包を $\tilde{H}(p)$ とおくと $L^2(\Omega)$ 上の自己共役作用素となり,

$$\text{Dom}(\tilde{H}(p)) = \gamma_{\Omega}(\Sigma(p) \text{ の } H_{loc}^2(\mathbb{R}^2) \text{ の閉包})$$

となる (γ_{Ω} は $\mathbb{R}^2$ の関数の Ω への制限). すると $\tilde{H}(p)$ は加藤の意味で解析族となり, また離散スペクトルをもつ.

$\{\lambda_j(p)\}_{j=1}^{\infty}$ は $\tilde{H}(p)$ の固有値, $\lambda_1(p) \leq \lambda_2(p) \leq \dots$ とすると
 H は $\lambda_j(p)$ ($p \in \Omega^*$) に依る掛算作用素とユニタリ一同値であり,
 $\lambda_j(p)$ がすべての j について p の非定数関数であれば,
 H は絶対連続であることがわかる.

§ 3. Landau Level Broadening

§ 2 の $\tilde{H}(p)$ は定義域が p について変化するため取扱が難しいため、次のユニタリ変換 $W(p)$ を用いて同一の定義域をもつ作用素の族 $\hat{H}(p)$ を考える:

$$W(p)u(x) = e^{\frac{i}{2}(p_1 x_1 + p_2 x_2)} u(x_1 - \frac{p_2}{B_0}, x_2 + \frac{p_1}{B_0})$$

とかくと $W(p)$ は $L^2(\Omega)$ のユニタリ作用素であり $W(p)\varepsilon(0) = \varepsilon(p)$.

$$\begin{aligned}\hat{H}(p) &:= W(p)^* \tilde{H}(p) W(p) \\ &= \hat{H}_0 + V(p)\end{aligned}$$

$V(p) := V(x_1 + \frac{p_2}{B_0}, x_2 - \frac{p_1}{B_0})$ による相対算作用素

$$\hat{H}_0 = (D_1 + \frac{B_0}{2}x_2)^2 + (D_2 - \frac{B_0}{2}x_1)^2$$

$$\text{Dom}(\hat{H}_0) = \mathcal{D}_\Omega(\varepsilon(0) \text{ の } H_{loc}^2(\mathbb{R}^2) \text{ における制限})$$

となる。したがって $\hat{H}(p)$ の固有値 $\{\lambda_j(p)\}$ について調べることになる。以下 V が小さく見える場合、 $\hat{H}_0$ からの摂動として計算を行う。まず $\hat{H}_0$ のスペクトルは

$$\sigma(\hat{H}_0) = \{(2j-1)B_0 \mid j \in \mathbb{Z}, j > 0\}$$

となり、全平面で考えたときの定数磁場をもつシュレディンガー作用素のスペクトルと一致し、Landau level と呼ばれる。但し全平面の場合には各 Landau level の多重度は ∞

であるが $\hat{H}_0$ の場合には多重度は N である. 実際 $\hat{H}_0$ の固有関数は具体的に計算できるのである. これには

$$A = i(D_1 + \frac{B_0}{2}x_2) - (D_2 - \frac{B_0}{2}x_1) \quad \text{on } \mathcal{E}(0)$$

$$A^\dagger = -i(D_1 + \frac{B_0}{2}x_2) - (D_2 - \frac{B_0}{2}x_1) \quad \text{on } \mathcal{E}(0)$$

とよくと交換関係

$$A^\dagger A = \hat{H}_0 - B_0, \quad A A^\dagger = \hat{H}_0 + B_0$$

を満たし, 調和振動子の場合の生成・消滅演算子 a と $a^\dagger$ の
である.

$$A = \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{B_0}{2}(x_2 i + x_1) = 2e^{-\frac{B_0}{4}z\bar{z}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} e^{\frac{B_0}{4}z\bar{z}}$$

$$(z = x_1 + ix_2)$$

であることから, $\text{Ker}(\hat{H}_0 - B_0) = \text{Ker} A$ はテータ関数を用いて表せる:

$$\psi_0^{(r)} = c e^{-\frac{B_0}{2}x_1^2 + \frac{B_0}{2}x_1x_2i} \zeta_r\left(\frac{z}{\tau}\right)$$

$$r=0, \dots, N-1, \quad c = \frac{(2N)^{1/4}}{\tau_1 \tau^{1/4}}, \quad \tau = \tau_2/\tau_1$$

$$\zeta_r(s) = \sum_{k \equiv r \pmod{N}} e^{-\frac{k^2}{N}\pi\tau} e^{2\pi i s k}$$

とよくと $\{\psi_0^{(r)}\}_{r=0, \dots, N-1}$ は $\text{Ker}(\hat{H}_0 - B_0)$ の正規直交基底となり

$$\psi_k^{(r)} = \frac{A^{\dagger k} \psi_0^{(r)}}{\sqrt{(2B_0)^k k!}} \quad r=0, \dots, N-1$$

とすれば, $\{\psi_k^{(r)}\}_{r=0, \dots, N-1}$ が $\text{Ker}(\hat{H}_0 - (2k+1)B_0)$ の正規直交基底となる.

$0 < \gamma < B_0$ として固定し, γ は充分小さいものとする. $\Gamma_k = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - (2k+1)B_0| = \gamma\}$ とする ($k=0, 1, 2, \dots$). 擾動論により $\hat{H}(p) = \hat{H}_0 + V(p)$ の固有値は, $\|V(p)\| = \|V\|_\infty \leq \gamma$ のとき Γ_k 内に多重度を込めて N 個ある. $I_k = ((2k+1)B_0 - \gamma, (2k+1)B_0 + \gamma) \subset \mathbb{R}$ とおくと

$$P_k(p) = E_{I_k}(\hat{H}(p)) = \frac{-1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_k} (\hat{H}(p) - z)^{-1} dz$$

が $\hat{H}(p)$ の I_k への spectral projection である. Q_k を $\text{Ker}(\hat{H}_0 - (2k+1)B_0)$ への直交射影とすれば $\|V\|_\infty$ が十分小的时候

$$\|P_k(p) - Q_k\| < 1$$

となるので $\dim \text{Ran } P_k(p) = \dim \text{Ran } Q_k = N$ である.

$$D_k(p) = \{1 - (P_k(p) - Q_k)^2\}^{-1/2} \{P_k(p)Q_k + (1 - P_k(p))(1 - Q_k)\}$$

とおけば $D_k(p)$ は $L^2(\Omega)$ のユニタリ作用素であり $P_k(p)$ と Q_k と intertwine する:

$$P_k(p) D_k(p) = D_k(p) Q_k.$$

よ、 $\hat{H}(p)$ の I_k 内におけるスペクトルは次の行列の固有値で与えられる:

$$\Lambda_k(p) = (\Lambda_k^{(rs)}(p))_{\substack{r=0, \dots, N-1 \\ s=0, \dots, N-1}}$$

$$\Lambda_k^{(rs)}(p) = (\hat{H}(p) D_k(p) \psi_k^{(r)}, D_k(p) \psi_k^{(s)}).$$

Λ_k は p について $(2\pi/\tau_1)\mathbb{Z} \times (2\pi/\tau_2)\mathbb{Z}$ -periodic であり、次の様な周期条件を満たす.

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & e^{-\frac{2\pi}{N}i} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{-\frac{2\pi}{N}(N-1)i} \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\begin{cases} \Lambda(p_1 + \frac{2\pi}{\tau_1}, p_2) = C_1 \Lambda(p) C_1^{-1} \\ \Lambda(p_1, p_2 + \frac{2\pi}{\tau_2}) = C_2 \Lambda(p) C_2^{-1} \end{cases}.$$

この周期条件は Fourier 級数展開が

$$(4) \quad \Lambda(p) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} a_n e^{i \frac{1}{N} (n_2 \tau_1 p_1 - n_1 \tau_2 p_2)} e^{n_1 n_2 \frac{\pi}{N} i} C_1^{n_1} C_2^{n_2}$$

と存在することと同値である. 一方 $P_k(p)$ を V について展開すると

$$\Lambda_k^{(rs)}(p) = \lambda_k \delta_{rs} + (V(p) \psi_k^{(r)}, \psi_k^{(s)}) + O(\|V\|_\infty^2)$$

よって V の Fourier 級数展開は

$$V(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} v_n e^{2\pi i \left(\frac{n_1}{T_1} x_1 + \frac{n_2}{T_2} x_2 \right)}$$

とすると

$$\begin{cases} V(p) = \sum_n v_n e^{i \frac{n_1 T_2 p_2 - n_2 T_1 p_1}{N}} U_n \\ U_n := e^{2\pi i \left(\frac{n_1}{T_1} x_1 + \frac{n_2}{T_2} x_2 \right)} \end{cases} \quad \text{と表わす掛け算作用素,}$$

となり

$$\left((U_n \psi_k^{(r)}, \psi_k^{(s)}) \right)_{r,s} = \Phi_k(|\beta_n|^2) e^{\frac{n_1 n_2}{N} \pi i} c_1^{n_1} c_2^{n_2}$$

となる。但し Φ_k は k 次の Laguerre 関数であり。

$$\Phi_k(t) = e^{-\frac{1}{2}t} L_k(t) \quad \left(L_k(t) = \frac{1}{k!} e^t \frac{d^k}{dt^k} (e^{-t} t^k) \right)$$

$$|\beta_n|^2 = \frac{\pi}{N} \left(n_1^2 + \frac{1}{\gamma} n_2^2 \right).$$

これは交換関係

$$A^\dagger U_n = U_n A^\dagger + \alpha_n U_n$$

$$\alpha_n = (2\pi i) \left(\frac{n_1}{T_1} + i \frac{n_2}{T_2} \right)$$

から得られる。従って V の Fourier 係数と Λ_k の Fourier 係数 $\{a_n\}$ ((4) に表わされる) の間には

$$a_n = v_n \Phi_k(|\beta_n|^2)$$

の関係がある. このことから V が generic の時に Λ_k の固有値は非定数であることが推定される. 実際 $N=1$ という制限的な場合ではあるが次の定理を得ることが出来る.

定理. $B_0 T_1 T_2 = 2\pi$, $\|V\|_\infty < B_0/2$ とする. 次のいずれかが成立するものとする.

(i) V : 非定数 かつ

$$(\star) \quad \Phi_k(|\beta_n|^2) \neq 0 \quad \forall k=0,1,2, \dots \quad v_n \in \mathbb{Z}^2,$$

(ii) V の Fourier 係数が無限個 $\neq 0$.

このとき $\exists \Sigma_V$: 可算集合 $\subset [-1, 1]$ such that

$$H_\varepsilon = (D_1 + \frac{B_0}{2} x_2)^2 + (D_2 - \frac{B_0}{2} x_1)^2 + \varepsilon V$$

が $\varepsilon \in [-1, 1] \setminus \Sigma_V$ に対して絶対連続である.

$\Phi_k(|\beta_n|^2)$ の形から条件 $(\star)$ は $\eta = T_2/T_1$ が有理数のときには成り立つことがわかる.

References

- [T] L. E. Thomas, Time dependent approach to scattering from impurities in a crystal, Comm.

Math. Phys. 33 (1973), 335 - 343.

[Z1] J. Zak, Magnetic translation groups I. II.,
Phys. Rev. 134-A (1966), 1602 - 1611

[Z2] J. Zak, Group theoretical consideration of Landau
level broadening in crystals, Phys. Rev. 136-A
(1964), 776 - 780.

[H-S] B. Helffer and J. Sjöstrand, Analyse semi-
classique pour l'équation de Harper, I - III,
Supplément au Bull. Soc. Math. Fr. 116-118 (1988 -
1990).