

Excitation Spectrum of Liquid Helium (II)

一 柳 正 和 (阪大工)

(4月20日受理)

§1. 序 論

前の論文¹⁾で我々は Drummand-Pines theory²⁾に従つて Bose 系の Excitation spectrum を得た。collective modes は $E_k = i\sqrt{\varphi_k} \cdot \rho_k^*$ であり、特に mode-coupling が spectrum をさげる上に重要な役割をはたしていることを示した。

この報告では、field E_k の量子化を論ずる。我々は Bohm-pines theory³⁾を Bose 系に応用する。field E_k と density fluctuation ρ_k との関係は適当な正準変換によつて得られる。Bohm-Pines theory と analogous な正準変換は E_k と ρ_k の関係は classical な場合のそれと同型のものであることを示す。このことは我々は excited state として Feynman type のものを考えていることに対応している。fields 間の相互作用は spectrum をさげることが摂動論で示される。(§5)。fields 間の相互作用を消すような正準変換は excited state が Feynman-Cohen type となることを示す (§6)。

§2. Hamiltonian

体積 $V \equiv 1$ の箱の中に N 個の Boson が存在する。粒子は互に weakly interacting である。この系の Hamiltonian は

$$H = \sum_i \frac{1}{2m} p_i^2 + \frac{1}{2} \sum \varphi_k \rho_k^* \rho_k \quad (2.1)$$

である。 m は粒子の質量、 p_i は粒子の運動量、 φ_k は粒子間の相互作用の Fourier 成分

一柳正和 (阪大工)

$$\varphi_k \equiv \int d^3r \varphi(r) e^{ikr} = \varphi_{-k}^* \geq 0 \quad (2.2)$$

である。 ρ_k は k -th density fluctuation

$$\rho_k = \sum_i e^{-ikx_i} = \rho_{-k}^* \quad (2.3)$$

である。 x_i は粒子の位置の vector である。

§3. Collective modes

多体系の collective modes を取り出す有力な方法は Bohm-Pines theory であろう。この方法は Tomonaga⁽⁴⁾ により相互作用が nonmagnetic origine の系に拡張されている。

collective coordinates の組を Hamiltonian (2.1) に附加項を導入することにより構成する。この組を (E_k, Q_k) とする。これらの変数は次の交換関係を満足する。

$$[Q_k, E_{k'}] = i \cdot \delta_{k,k'} \quad \text{otherwise} = 0 \quad (k < k_c) \quad (3.1)$$

$$E_k^* = -E_{-k}, \quad Q_k^* = -Q_{-k} \quad (3.2)$$

これらは粒子の運動量及び座標とは可換である。

Hamiltonian (2.1) に附加する項は

$$H_{\text{add}} = \sum_{k < k_c} \frac{1}{2} E_k^* E_k - i \sum_{k < k_c} \sqrt{\varphi_k} E_k \rho_k \quad (3.3)$$

であり、ただし系の波動関数は

$$E_k \cdot \phi = 0 \quad (k < k_c) \quad (3.4)$$

なる補助条件を満たさなければならない。したがって系の Hamiltonian は

$$\mathcal{H} = \sum \frac{1}{2m} p_i^2 + \sum_{k < k_c} \frac{1}{2} E_k^* E_k + \frac{1}{2} \sum \varphi_k \rho_k - i \sum_{k < k_c} \sqrt{\varphi_k} E_k \rho_k \quad (3.5)$$

である。

よく知られているように canonical transformation

$$\psi = e^{iS} \phi \quad (3.6)$$

$$S = - \sum_{k < k_c} \sqrt{\varphi_k} Q_k \rho_k^* \quad (3.7)$$

は Hamiltonian (3.5) を次のように変換する：

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\text{new}} = & \sum \frac{1}{2m} p_i^2 + H_{\text{field}} + \frac{1}{2} \sum_{k > k_C} \varphi_k \rho_k^* \rho_k \\
& + \sum_{ik > k_C} \sum \frac{k}{m} \sqrt{\varphi_k} \left(p_i - \frac{k}{2} \right) Q_k e^{ikxi} \\
& + \sum_{\substack{k, q < k_C \\ q \neq 0}} \frac{k(k-q)}{2m} \sqrt{\varphi_k \varphi_{k-q}} Q_k Q_{k-q}^* \rho_q^*
\end{aligned} \quad (3.8)$$

ただし

$$H_{\text{field}} = \frac{1}{2} \sum_{k < k_C} (E_k^* E_k + w_k^2 Q_k^* Q_k) \quad (3.9)$$

$$w_k^2 = \frac{N\varphi_k}{m} k^2 \equiv c^2 k^2 \quad (c = \sqrt{\frac{N\varphi_k}{m}}) \quad (3.10)$$

一方、補助条件 (3.4) は

$$(E_k - i\sqrt{\varphi_k} \rho_k^*) \cdot \psi = 0 \quad (k < k_C) \quad (3.11)$$

となり、これは古典的には $E_k = i\sqrt{\varphi_k} \rho_k^*$ であることを意味する。また、 E_{qn} (3.11) は、excited stated state は Feynman type であることを示す。

(3.8) 式の second quantized form は

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\text{new}} = & \sum \frac{p^2}{2m} a_p^* a_p + H_{\text{field}} + \frac{1}{2} \sum_{k > k_C} \varphi_k \sum_p a_{p+k}^* a_p \cdot a_{p-k} a_k \\
& + \sum_{k,p} \sum \sqrt{\varphi_k} \frac{k(k-2p)}{2m} Q_k a_{p+k}^* a_p \\
& + \sum \frac{k(k-q)}{2m} \sqrt{\varphi_k \varphi_{k-q}} Q_k Q_{k-q}^* a_{p+q}^* a_p
\end{aligned}$$

となる。 a_p^*, a_p は通常の Boson operator である。

§4 Excitation Spectrum, その 1

前節で示したように、粒子と collective field との相互作用は

$$H_{p-f} = \sum_{pk < k_C} \sum \frac{k(k-2p)}{2m} \sqrt{\varphi_k} Q_k a_{p+k}^* a_p \quad (4.1)$$

一柳正和 (阪大工)

で与えられる。この相互作用の vertex は Fig. 1 に示されている。Fig. 1 で 実線は Bose 粒子の propagator を、波線は collective field の propagator を各々表わす。

今 collective field 間の相互作用 (Hamiltonian (3.13) の last term) を neglect しよう。このとき effective な field propagator は Fig. 2 に示される Dyson 方程式によって近似的に計算される。Fig. 2 の black bubble は time-dependent density correlation function

$$iF_k(t-t') = \langle 0 | T \{ \rho_k(t) \rho_k^*(t') \} | 0 \rangle$$

(4.2)

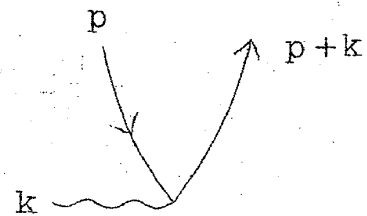


Fig. 1 粒子-field 相互作用

を示す。一方、free field propagator

$D_q^{(0)}(\omega)$ は

$$D_q^{(0)}(\omega) = \frac{1}{\omega^2 - \omega_q^2 + i\epsilon} \quad (\epsilon \rightarrow 0^+)$$

(4.3)

で与えられる。

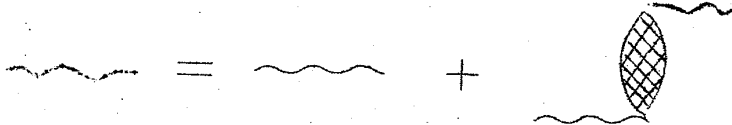


Fig. 2

$D_q(\omega)$ に対する Dyson 方程式

Fig. 2 より effective な field propagator (太い波線で示す) $D_q(\omega)$ は

$$D_q(\omega) = \frac{1}{\omega^2 - \omega_q^2 - \sum_p \left[\frac{q(q-2p)}{2m} \right]^2 \varphi_q \cdot \frac{N(p+q) - N(p)}{\epsilon_{p+q} - \epsilon_p - \omega_q}}$$

となる。ただし $N(p)$ は運動量 p の Boson の分布関数である。

ここで、我々は black bubble の計算はその最低次をとった。(4.3)式の母分に Bogoliubov 近似を apply すれば 我々は

$$D_q(\omega) \cong \frac{1}{\omega^2 - \omega_q^2 - \frac{q^4}{4m^2} + i\epsilon} \quad (\epsilon \rightarrow 0^+) \quad (4.4)$$

を得る。したがって excitation spectrum は

$$\omega_k = k \cdot \sqrt{c^2 + \frac{k^2}{4m^2}} \quad (4.5)$$

となる。これは Bogoliubov spectrum である。

§5 Excitation spectrum, その2 (相互作用の影響)

collective field 間の相互作用は Eq n (3.8) より

$$H_{f-f} = \sum_{k < k_c} \sum_{\substack{q < k_c \\ (q \neq 0)}} \frac{1}{2N} \omega_k \times \omega_{k-q} Q_{k-q}^* \rho_q^* \quad (5.1)$$

で与えられることが分る。この相互作用の vertex は Fig. 3 に示す通りである。この相互作用を考慮するときの Dyson 方程式は Fig. 2 の他に Fig. 4 の項を附加すればよい。

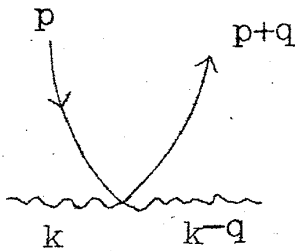


Fig. 3 H_{f-f} の vertex

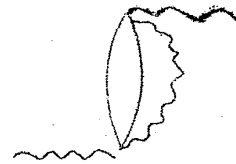


Fig. 4 Fig. 2 に附加すべき diagram

ここでも前節と同様にして Bogoliubov 近似を用いると

$$D'_q(\omega) = \left\{ \omega^2 - c^2 q^2 - \frac{\omega_q^2}{4N} \sum_{k < k_c} \frac{k^2}{m} \omega_{q-k} \cdot \frac{1}{(\omega_q - \omega_{q-k})^2 - \frac{k^4}{4m^2}} \right\}^{-1} \quad (5.2)$$

したがって excitation spectrum は

$$\omega_k^2 = c^2 k^2 + \frac{k^4}{4m^2} + \frac{c^2 k^2}{4N} \sum_{q < k_c} \frac{q^2 \omega_{k-q}}{m} \frac{1}{(\omega_k - \omega_{k-q})^2 - (\frac{q^2}{2m})^2} \quad (5.3)$$

一柳正和 (阪大工)

となる。Eq n (4.6) の最後の項の sum を積分でおきかえ、等式

$$\int_0^{k_C} d^3q \cdot f(|q|, |k-q|) = \frac{2\pi}{k} \int_0^k dq q \int_{|k-q|}^{k+q} dx x \cdot f(q, x) \quad (5.4)$$

を用いると。($x \equiv |k-q|$)

① $k < \frac{1}{2}k_C$ のとき

$$\frac{1}{(4\pi)^2} \frac{c}{\rho_0} \left\{ -\frac{1}{20}k^6 + \frac{3}{2}k_C^3 k^3 - \frac{1}{2}k_C^2 k^4 - \frac{1}{4}k_C k^5 \right\} \quad (5.5)$$

+ { $k \rightarrow \frac{1}{2}k_C$ で zero になる項 }

② $k > \frac{1}{2}k_C$ のとき

$$\frac{1}{(4\pi)^2} \frac{c}{\rho_0} \left\{ -\frac{1}{12}k^6 + \frac{9}{32}k^2 \cdot k_C^4 - \frac{1}{2}k^3 k_C^3 \right\} \quad (5.6)$$

+ { $k \rightarrow k_C$ で zero となる項 }

となる。すなわち、 $k \sim k_C$ では spectrum は下方にひきさげられることが分る。

§6 Back Flow

ψ_0 を系の exact ground state wave function とするとき Feynman state は

$$\psi_F = \rho_q \cdot \psi_0 \quad (6.1)$$

で与えられる。一方 液体中での Excitation の運動を考りよした better wave function は

$$\psi_{F,c} = \left\{ \rho_q^* + \sum_{k \neq q} 4\pi A \frac{q \cdot k}{k^2} \rho_k^* \rho_{k-q}^* \right\} \psi_0 \quad (6.2)$$

と考えられ、これは Feynman-Cohen quasi-particle を表わす。この節では 適当な正準変換は collective field variables E_k は Feynman-Cohen quasi-particle を与えることを示す。

我々は §3 において collective field E_k は本質的に粒子の density fluctuation ρ_k で表わされることを示した。このことは Feynman quasi-particles は total Hamiltonian に正準変換 (3.6) を施すことによって得られることを示すように思われる。

Feynman-Cohen quasi-particles は Feynman quasi-particle の admixture である。 H_{f-f} は Feynman quasi-particles の相互作用を表わす。そこで Hamiltonian (3.8) において H_{f-f} が消されるような正準変換を考えよう。そのような正準変換は

$$U = e^{iS'} \quad (6.3)$$

$$S' = \sum_{k < k_c} \sum_{\substack{q \neq 0 \\ q < k_c}} \frac{1}{2N} \frac{\omega_k \omega_{k-q}}{\omega_k - \omega_{k-q} + \frac{q^2}{2m}} Q_k Q_{k-q}^* \rho_q^* \quad (6.4)$$

で与えられる。実際 この正準変換を Hamiltonian (3.8) に施すと新しい Hamiltonian は

$$\begin{aligned} \mathcal{H}'_{\text{new}} &= e^{-iS'} \mathcal{H}_{\text{new}} e^{iS'} \\ &= \sum \frac{1}{2m} p_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{k > k_c} \varphi_k \rho_k^* \rho_k + H_{\text{field}} + \sum \frac{k}{m} \sqrt{\varphi_k} \left(p_i - \frac{k}{2}\right) Q_k e^{ikx_i} \\ &\quad + (\text{terms proportional to } Q_k Q_{k-q} Q_q \text{ and } Q_k Q_{k-q'} Q_{q'}) \end{aligned} \quad (6.5)$$

となる。

一方 補助条件 (3.11) は

$$(E_k - i\sqrt{\varphi_k} + \sum_{\substack{q < k_c \\ (q \neq 0)}} \frac{1}{2N} \frac{\omega_k \omega_{k-q}}{\omega_k - \omega_{k-q} + \frac{q^2}{2m}} Q_{k-q}^* \rho_q^*) \varphi = 0 \quad (6.6)$$

$$\varphi = e^{iS''} \cdot \psi \quad (6.7)$$

となる。ここで関係式

$$E_k \cong i\omega_k E_k = -Q_{-k}^* \quad (6.8)$$

一柳正和 (阪大工)

を使用すれば、条件 (6.6) は 近似的に次のように表わすことが出来る。すなわち それは

$$\begin{aligned} & (E_k - i\sqrt{\varphi_k} p_k^* + \sum_{q(\neq 0) < k_c} \frac{|k|}{2m} \left(\frac{m}{N}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\varphi_k \varphi_{k-q}} \times \\ & \times \frac{1}{\omega_k - \omega_{k-q} + \frac{q^2}{2m}} \rho_k^* \rho_{k-q}^*) \varphi = 0 \end{aligned} \quad (6.9)$$

となる。この条件は collective field E_k は近似的にみて、Feynman-Cohen quasi-particle に対応していることを示している。このことはまた相互作用 Hamiltonian H_{f-f} (Eq n (5.1)) は back-flaw に関係していることを暗示している。

§7 討論

我々は Pines-Bohm theory と同じ手続で、量子化された collective field を導入した。これらは density fluctuation と密接な関係があり、Feynman quasi-particle に対応することが暗示される。field 間の相互作用 H_{f-f} は equilibrium spectrum を下方にひきさげる役割を果たしていることが分つた。

新しい正準変換のもとに、我々は collective field は Feynman-Cohen quasi-particle を記述することを示した。

ここで興味ある量 k_c (cut-off wave vector) のとり方はまだ任意であり不満足であるといえる。この値をどのように決定するかが当面の問題であり、目下考察中である。

Bogoliubov spectrum はまったく別の方法により Hugenholtz-Pines によつても得られている。我々の使用した正準変換の方法と彼ら (及び Beliaev) の関係は、明らかでない。これを解明することは §3 の Eq n (3.4) で用いた近似と関係して興味ある問題である。

最後に、この研究にあたり 有益な討論をして下さった阪大教養部の西山敏之教授に感謝します。

引用文献

- (1) 一柳, 物性研究 vol. 6. no 1
- (2) Drummond, Ann. Phys. 28 ('64) 478
- (3) Bohm, Pines, P. R. 92 ('53) 609, 626
- (4) Tomonaga, Progr. Theor. Phys. 13 ('55) 467, 482
Nishiyama, " 12 ('54) 265