

乱流の渦と散逸構造

京大数理研 木田 重雄 (Shigeo Kida)

大阪府大 村上洋一 (Yoichi Murakami)

京大数理研 大木谷耕司 (Koji Ohkitani)

1. はじめに

流体の運動は一般に、レイノルズ数の増加とともに複雑になっていく。非常に大きなレイノルズ数に対して、流れ場はランダムにさえ見える。しかし、流体の運動は決定論的な運動方程式 (ナビエ-ストークス方程式) に支配されているので、運動は完全にはランダムでは有り得ない。実際、いろいろな組織運動が乱流の中に存在することが観測されているが、これはランダム運動に対立するものである。乱流境界層における乱流斑点や縦渦構造 (Kline *et al.* 1967)、乱流混合層におけるリブ構造 (Hussain 1984) などの例がある。

さらにまた、一様等方乱流においても乱流運動の活発領域あるいは高渦度領域からなる組織構造が存在することが分かってきた。高渦度領域の空間構造は高波数におけるエネルギースペクトルの形と密接に関係がある。面状、線状、点状構造はそれぞれ k^{-2} 、 k^{-1} 、 k^0 エネルギースペクトルを与える。小さなスケールにおける活発領域の空間構造が、格子背後の一様乱流において Kuo と Corrsin (1972) によって実験的に調べられた。彼らの結果は、構造が線 (管) 状であることを示唆している。高渦度領域の形は、また、オイラー方程式の解の特異性の形成と密接な関係があるものと考えられているが、この問題はまだ未解決である (Pumir & Siggia 1990)。

ナビエ-ストークス方程式の直接数値シミュレーションは、乱流の三次元構造を調べるのに強力な手段となってきた。室内実験とは対照的に、流れ場の任意の断面や、速度相関をコンピュータに保存された流れの完全な情報を使って解析できる。これまで、多くの研究者によって、乱流中には寿命の長い高渦度領域が散在し、長く細い管状の構造をしていることが観測されている (Siggia 1981a、Kerr 1985、Kida & Murakami 1987、Hosokawa & Yamamoto 1989、She *et al.* 1990)。

渦度と速度ひずみの空間相関は、渦の動力学を理解する上で重要である。非圧縮条件より速度ひずみ (対称) テンソルの三つの固有値の和は零である。従って、最大固有値は常に正で、最小固有値は常に負である。しかし、真ん中の固有値の符号は定まらない。渦度場はせん断流

によってゆがめられるので、真ん中の固有値の符号が乱流の局所的構造を決定するのではないかという議論がある。即ち、局所構造は中間固有値の正負に従いそれぞれ、面状、線状になるというものである (Kerr 1987)。速度ひずみテンソルの三つの固有値の確率分布が数値乱流において詳しく調べられた。その結果、三つの固有値の最も確からしい値の組み合わせは、3 : 1; -4、即ち正の固有値が二個、負の固有値が一個であり、乱流の渦構造は面状をしていると結論された。しかしながら、以下に述べるように、上記の事実を説明するもっともらしい別の解釈がある。また、強い渦度線は、中間固有ベクトル (固有値は正) に沿う傾向があることも知られている (Ashurst *et al.* 1987)。

この論文では、小スケールにおける乱流の空間構造を調べる。第2章では、我々の数値乱流が管状構造をした多数の高渦度領域から成り立っていることを示す。第3章では、バーガース渦管を用いて、速度ひずみテンソルの正二負一固有値が、従来からの直感的議論 (Kerr 1987) に反して、管状構造と両立するものであることを示す。第4章では、速度勾配の4次モーメントのレイノルズ数依存性を高渦度領域の管状構造から説明する。なお、速度勾配の3次及び4次モーメントの完全な表現は付録に与えてある。第5章はまとめである。

2. 渦の管状構造

ここでは、一辺 2π の周期立方体の中の非圧縮粘性流体の運動を考える。その運動は渦度方程式

$$\frac{\partial \omega_a}{\partial t} + u_b \partial_b \omega_a = \omega_b \partial_b u_a + \nu \partial_b \partial_b \omega_a + f_a \quad (2.1)$$

と連続の式

$$\partial_a u_a = 0 \quad (2.2)$$

で記述される。ここに、 $\omega_a(x_1, x_2, x_3; t) = \epsilon_{abc} \partial_b u_c(x_1, x_2, x_3; t)$ は渦度、 ∂_a は x_a による微分、 ϵ_{abc} は完全反対称テンソルで、 ν は流体の動粘性係数、 $f_a(x_1, x_2, x_3; t)$ は外力である。なお、添え字が繰り返して現れたときは、その添え字について1から3まで和をとる。

これらの方程式を適当な初期条件から出発して、ルンゲ-クッター-ジル法を用いて数値積分する。非線形項は、フーリエ擬スペクトル法を用いて効率よく計算する。計算方法の詳細と外力の設定については、Kida & Murakami (1989) を参照されたい。ここに紹介する数値シミュレーションで採ったフーリエモードの個数は 340^3 である。以下に示す流れ場は、テイラー長に基づくレイノルズ数が $R_\lambda \approx 180$ (定義は (4.9) に与えてある)、コルモゴロフの散逸波数が $k_d \approx 188$ である。

図 1(a) は、統計的定常状態にある流れ場における等渦度面である。渦度の絶対値が $\omega^2 \equiv \omega_a \omega_a = 4 \langle \omega^2 \rangle$ となる面が一辺 $\pi/4$ の立方体の中で示されている。ここに、 $\langle \rangle$ は空間平均を表す。これらの等渦度面の内側で渦度の絶対値が大きい値をとる。はっきりした渦管状の領域が多数あちこちに散在しているのが分かる。管の直径は、コルモゴロフ長さ $l_d = 2\pi/k_d \approx 2\pi/188 (\approx 3 \text{ メッシュ長さ})$ である。一方、管の長さは周期箱の大きさと同程度である。

図 1(b) に示したのは、図 1(a) の高渦度領域の中の渦度線である。渦度線が管状領域に沿った方向に走っているのが分かる。従って、これらの管状領域は”渦管”と呼ぶことができる。

乱流の統計的性質を記述する最も重要な量の一つは、単位質量当たりのエネルギー散逸率で、速度ひずみテンソルを用いて

$$\epsilon(x_1, x_2, x_3; t) = 2\nu \text{Tr}(s^2), \quad (2.3)$$

と表される。ここに、

$$s_{ab} = \frac{1}{2}(\partial_a u_b + \partial_a u_a) \quad (2.4)$$

は速度ひずみテンソルで、 Tr はテンソルの対角和を表す。我々は、 ϵ の空間分布を詳しく調べ、 ϵ は渦管の中心で極小値を取り、管の周辺で極大となることを見いだした (Kida & Ohkitani 1991)。このような振る舞いは、バーガース渦を用いて簡単に説明できる (次章参照)。

3. 渦管と速度ひずみ

この章では、渦度場と速度ひずみテンソルの固有ベクトルの並びについて議論する。第1章で述べたように、高渦度領域は中間固有値の固有関数の向きにそろい、また中間の固有値は平均として正の符号をとり、三つの固有値のうち二つが正であることが数値計算で観測されている。我々はここでバーガース渦を用いて、速度ひずみテンソルのこの振る舞いは強い直線渦領域の回りの速度場を考慮することによって理解されることを示す。

軸対称で一様なせん断流中での定常一方向渦管は、バーガース渦として知られている。これは、ナビエ-ストークス方程式の厳密解で

$$\omega_3 = \frac{\alpha\Gamma}{4\pi\nu} \exp\left[-\frac{\alpha r^2}{4\nu}\right], \quad (3.1)$$

$$u_1 = -\frac{\alpha}{2}x_1 - \frac{x_2}{r}v_\theta, \quad (3.2)$$

$$u_2 = -\frac{\alpha}{2}x_2 + \frac{x_1}{r}v_\theta, \quad (3.3)$$

$$u_3 = \alpha x_3, \quad (3.4)$$

$$v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{\alpha r^2}{4\nu} \right] \right\} \quad (3.5)$$

と表される (Batchelor 1970 参照)。ここに、 $\alpha(>0)$ は、せん断流の強さ、 Γ は渦管の循環で、 $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ である。

この場合、速度ひずみテンソルの固有値は

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\alpha}{2} \left[1 \pm \frac{\Gamma}{4\pi\nu} f(\xi) \right], \quad (3.6)$$

$$\lambda_3 = \alpha \quad (3.7)$$

となる。ただし、

$$f(\xi) = \frac{1 - (1 + \xi)e^{-\xi}}{\xi}, \quad (3.8)$$

$$\xi = \frac{\alpha r^2}{4\nu} \quad (3.9)$$

である。関数 $f(\xi)$ は $\xi = 0$ と ∞ で零、その他では正の値をとり、 $\xi = 1.79$ で最大値 $f_{\max} = 0.298$ になる。

固有値 λ_3 はいつも正であるが、 λ_1 と λ_2 の符号は不定で、レイノルズ数

$$R = \frac{|\Gamma|}{\nu} \quad (3.10)$$

に依存して変わる。 $R < 4\pi/f_{\max}$ (≈ 42.1) に対しては、 $\lambda_{1,2} < 0$ で従って、固有値は二つが負、一つが正となる。また、 $R > 4\pi/f_{\max}$ (≈ 42.1) の時は、 λ_1 と λ_2 のどちらかが $\xi = 1.79$ の近傍で正になるので、二つの固有値が同時に正になる。従って、速度ひずみテンソルの二つの固有値が正であれば、渦面が生成されるという予想 (Kerr 1987) は必ずしも当たっていないくて、二つの正固有値の流れの中に渦管が存在し得る。

更に、もし $R < 12\pi/f_{\max}$ (≈ 126) であれば、 λ_3 が三つの固有値の中で最大となることも分かる。 $R > 12\pi/f_{\max}$ (≈ 126) に対しては、 λ_3 は二番目に大きな固有値になるが、決して最小にはならない。 λ_3 に対応する固有ベクトルは x_3 軸に平行であり、 λ_1 と λ_2 に対応する固有ベクトルはそれに垂直である。従って、多くの数値実験で示唆されているように、高レイノルズ数流れでは、渦管は中間の固有値をもつ固有ベクトルにそろう (Kerr 1986, Ashurst *et al.* 1987)。

バーガース渦に対する速度ひずみテンソルの自乗の対角和は

$$\mathrm{Tr}(s^2) = \frac{\alpha^2}{2} \left[3 + \left(\frac{\Gamma}{4\pi\nu} \right)^2 f(\xi)^2 \right] \quad (3.11)$$

である。第一項は背景の一樣せん断流からの寄与を、第二項はバーガース渦からの寄与を表す。後者は、渦管の中心で極小値をとり、渦管の周辺で極大値をとる。従って、 $\mathrm{Tr}(s^2)$ （あるいはエネルギー散逸場 ϵ ）は R の値に依存して異なる。

図2には、 ω_3^2 と $\mathrm{Tr}(s^2)$ を R のいくつかの値に対してプロットしてある。渦の中心での $\mathrm{Tr}(s^2)$ のくぼみは、 R の大きな値に対してより深い。図2 (b) や図2 (c) に示されている $\mathrm{Tr}(s^2)$ に類似のパターンが我々の数値乱流場における細い渦管の回りで観測されている (Kida & Ohkitani 1991)。

4. 速度勾配の4次モーメント

速度成分の空間微分 $\partial_a u_b$ の統計的性質が、乱流の小さなスケールの運動の特性、例えば間欠性や組織構造を記述するために、多くの研究者によって実験的に調べられてきた (Monin & Yaglom 1975)。非圧縮性の条件 $\partial_a u_a = 0$ より、速度勾配テンソル $\partial_a u_b$ の中で独立な成分は8個である。一樣等方流における3次モーメント $\langle (\partial_a u_b)(\partial_c u_d)(\partial_e u_f) \rangle$ の一般形は3個のデルタ関数の積からなる15の項の和で表される。それは、3次モーメント、例えば $\langle (\partial_1 u_1)^3 \rangle$ を一つ含んでいる（具体的な形は付録を参照）。

速度ひずみに相対的な渦度のならびの情報を与える4次のモーメントはすでに詳しく調べられている (Kerr 1985, Siggia 1981b)。一樣等方な非圧縮流の速度勾配の4次モーメントは、4つのデルタ関数の積からなる項の和として表される (Siggia 1981b)。各項の係数は4つの回転不変量、

$$I_1 = \langle (\mathrm{Tr}(s^2))^2 \rangle = \langle s_{ab}s_{ba}s_{cd}s_{da} \rangle, \quad (4.1)$$

$$I_2 = \langle \omega^2 \mathrm{Tr}(s^2) \rangle = \langle \omega_a \omega_a s_{bc}s_{cb} \rangle, \quad (4.2)$$

$$I_3 = \langle \omega_a \omega_b s_{ac}s_{bc} \rangle, \quad (4.3)$$

$$I_4 = \langle (\omega^2)^2 \rangle \quad (4.4)$$

のみで表される。これらのモーメントの完全な表式は付録に掲げてある。

Kerr (1985) は上記の回転不変量の規格化値、

$$F_1 = \frac{\langle (\text{Tr}(s^2))^2 \rangle}{\langle \text{Tr}(s^2) \rangle^2}, \quad (4.5)$$

$$F_2 = \frac{\langle \omega^2 \text{Tr}(s^2) \rangle}{\langle \omega^2 \rangle \langle \text{Tr}(s^2) \rangle}, \quad (4.6)$$

$$F_3 = \frac{\langle \omega_a \omega_b s_{ac} s_{bc} \rangle}{\langle \omega^2 \rangle \langle \text{Tr}(s^2) \rangle}, \quad (4.7)$$

$$F_4 = \frac{\langle \omega^4 \rangle}{\langle \omega^2 \rangle^2} \quad (4.8)$$

のレイノルズ数依存性を数値実験で調べた。ここに、 $\langle \omega^2 \rangle = \langle \omega_a \omega_a \rangle = 2 \langle s_{ab} s_{ba} \rangle = 2 \langle \text{Tr}(s^2) \rangle$ である。彼は、 F_1 と F_2 と F_4 は R_λ とともに増加するが、 F_3 はあまり変化しないことを見いだした。これは、速度勾配の統計のレイノルズ数依存性を記述するためには、少なくとも二つのスケーリング指数が必要であることを示唆している。しかしながら、彼の数値乱流では $R_\lambda \lesssim 80$ であるので、このレイノルズ数依存性が充分発達した乱流に対して真であるかどうかは明かではない (Moin & Yaglom 1975)。

乱流の小さなスケールの構造を記述する渦管モデルは Tennekes (1968) によって提案された。このモデルでは、高渦度領域は断面の直径が l (コルモゴロフ長さ) の渦管の中に集中していると仮定された。渦管の代表長さ (曲率半径 λ) はテイラー長さの程度である (図3参照)。テイラー長さとコルモゴロフ長さの比は、テイラーレイノルズ数

$$R_\lambda = \frac{u\lambda}{\nu} \quad (4.9)$$

を用いて、

$$\frac{\lambda}{l} \propto \sqrt{R_\lambda} \quad (4.10)$$

と表される。ここに、 u は乱流速度の大きさである。

このモデルによれば、渦度の自乗の空間平均は

$$\begin{aligned} \langle \omega^2 \rangle &= \langle \text{Tr}(s^2) \rangle = 2 \langle (\partial_a u_b)(\partial_b u_a) \rangle \\ &= O\left(\left(\frac{u}{l}\right)^2 \frac{l^2}{\lambda^2}\right) + O\left(\frac{u^2}{\lambda^2}\right) = O\left(\frac{u^2}{\lambda^2}\right) \end{aligned} \quad (4.11)$$

のように評価される。ここで、第一項と第二項はそれぞれ渦管の内と外からの寄与を表している。比 l^2/λ^2 は、渦管の占める体積比である。(4.11) 式の二つの項は同程度の大きさである

ことに注意してほしい。このことは、エネルギー散逸が細い渦管の内部に集中しているのではなく、むしろ流れ場全体に広がっていることを意味する。

これとは対照的に、三つの4次の不変量、 I_1 、 I_2 、 I_4 に対しては、渦管からの寄与が卓越する。それらは、

$$I_1 \sim I_2 \sim I_4 \sim \left(\frac{u}{l}\right)^4 \frac{l^2}{\lambda^2} = \frac{u^4}{l^2 \lambda^2} \quad (4.12)$$

と見積もることができる。それ故、規格化不変量は

$$F_1 \sim F_2 \sim F_4 \propto \frac{u^4}{l^2 \lambda^2} \bigg/ \left(\frac{u^2}{\lambda^2}\right)^2 = \frac{\lambda^2}{l^2} \sim R_\lambda \quad (4.13)$$

のように振る舞う。速度の縦微分、あるいは ((A.12) の第一式) の偏平度因子は、実在乱流について詳しく調べられ、その R_λ 依存性は (4.13) と定性的に一致した (Monin & Yaglom 1975)。

ついでながら、Tennekes (1968) によって示されたように、速度勾配の歪度はレイノルズ数によらない、すなわち、

$$\frac{\langle (\partial_1 u_1)^3 \rangle}{\langle (\partial_1 u_1)^2 \rangle^{3/2}} \propto R_\lambda^0 \quad (4.14)$$

である。

もう一つの回転不変量、 I_3 を評価すると、

$$\begin{aligned} I_3 &= \langle \omega_a \omega_b s_{ac} s_{bc} \rangle = \langle \omega_a (\partial_a u_c) \omega_b (\partial_b u_c) \rangle \\ &= O\left(\left(\frac{u}{l}\right)^2 \left(\frac{u}{\lambda}\right)^2 \frac{l^2}{\lambda^2}\right) + O\left(\frac{u^4}{\lambda^4}\right) = O\left(\frac{u^4}{\lambda^4}\right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

となる。ただし、渦管に沿う微分における代表長さを λ とした。ここでもまた、渦管の内部と外部の寄与は同程度である。従って、規格化不変量 F_3 は

$$F_3 = \frac{u^4}{\lambda^4} \bigg/ \left(\frac{u^2}{\lambda^2}\right)^2 \propto R_\lambda^0 \quad (4.16)$$

の様に振る舞う。 F_3 が R_λ に依らないのは、Kerr(1985) による $R_\lambda \lesssim 80$ の数値乱流の結果と一致している。

規格化不変量、 F_1 、 F_2 、 F_3 、 F_4 の値が表1に示してある。比較のために、正規変数の場合の値も載せてある。この表から、乱流の特徴的な性質として次のことが分かる。まず第一に、 F_4 も F_1 も正規変数に対するものよりもずっと大きく、前者は後者よりも大きい。こ

のことは、渦度場もエネルギー散逸場とともに空間的に間欠的で、しかも前者は後者よりもより間欠的であることを示している。第二に、 F_2 は 1 より大きい。すなわち、 ω^2 と $\text{Tr}(s^2)$ との間に正の相関がある。というのは、これら二つの場が統計的に独立であれば、 F_3 は 1 でなければならないからである。第三に、 F_3 は正規変数に対するものに極めて近く、 R_λ には依らない。これは、渦管モデル (4.16) と一致している。

5. まとめ

この小論では、数値乱流場は多数の細い渦度集中領域（渦管）から成り立っていること、この管状構造は速度ひずみテンソルの二つの正固有値と両立すること、そして、速度勾配の 4 次モーメントのレイノルズ数依存性は Tennekes (1968) の渦管モデルで説明できることを示した。

A. 付録

ここでは、一様等方的な非圧縮流における速度勾配 $\partial_a u_b$ の 3 次および 4 次モーメントの具体的な形を示す。

A.1. 3 次モーメント

3 次モーメントの一般形は

$$\begin{aligned}
 \langle (\partial_a u_b)(\partial_c u_d)(\partial_e u_f) \rangle &= \{ \delta_{ab}\delta_{cd}\delta_{ef} + \delta_{ac}\delta_{be}\delta_{df} + \delta_{ac}\delta_{bf}\delta_{de} + \delta_{ad}\delta_{bf}\delta_{ce} \\
 &\quad + \delta_{af}\delta_{bd}\delta_{ce} + \delta_{ae}\delta_{bc}\delta_{df} + \delta_{ae}\delta_{bd}\delta_{cf} \\
 &\quad - \frac{4}{3}(\delta_{ab}\delta_{ce}\delta_{df} + \delta_{ac}\delta_{bd}\delta_{ef} + \delta_{ae}\delta_{bf}\delta_{cd}) \\
 &\quad - \frac{1}{6}(\delta_{ab}\delta_{cf}\delta_{de} + \delta_{ad}\delta_{bc}\delta_{ef} + \delta_{af}\delta_{be}\delta_{cd}) \\
 &\quad - \frac{3}{4}(\delta_{ad}\delta_{be}\delta_{cf} + \delta_{af}\delta_{bc}\delta_{de}) \} \langle (\partial_1 u_1)^3 \rangle \quad (A.1)
 \end{aligned}$$

と表される。

A.2. 4 次モーメント

速度勾配は

$$\partial_a u_b = s_{ab} + \frac{1}{2}\epsilon_{abc}\omega_c \quad (A.2)$$

と表される。

(a) 速度ひずみテンソル

速度ひずみテンソルの等方形は、4つのデルタ関数の積でできた93項の和

$$\begin{aligned}
 \langle s_{ab}s_{cd}s_{ef}s_{gh} \rangle = & A \delta_{ab}\delta_{cd}\delta_{ef}\delta_{gh} \\
 & + B (\delta_{ab}\delta_{cd}\delta_{eg}\delta_{fh} + \delta_{ab}\delta_{cg}\delta_{dh}\delta_{ef} + \delta_{ag}\delta_{bh}\delta_{cd}\delta_{ef} + \delta_{ab}\delta_{ce}\delta_{df}\delta_{gh} \\
 & + \delta_{ae}\delta_{bf}\delta_{cd}\delta_{gh} + \delta_{ac}\delta_{bd}\delta_{ef}\delta_{gh} + \delta_{ab}\delta_{cd}\delta_{eh}\delta_{fg} + \delta_{ab}\delta_{ch}\delta_{dg}\delta_{ef} \\
 & + \delta_{ah}\delta_{bg}\delta_{cd}\delta_{ef} + \delta_{ab}\delta_{cf}\delta_{de}\delta_{gh} + \delta_{af}\delta_{be}\delta_{cd}\delta_{gh} + \delta_{ad}\delta_{bc}\delta_{ef}\delta_{gh}) \\
 & + C (\delta_{ab}\delta_{ce}\delta_{dg}\delta_{fh} + \delta_{ae}\delta_{bg}\delta_{cd}\delta_{fh} + \delta_{ac}\delta_{bg}\delta_{dh}\delta_{ef} + \delta_{ac}\delta_{bh}\delta_{dg}\delta_{ef} \\
 & + \delta_{ab}\delta_{ce}\delta_{dh}\delta_{fg} + \delta_{ae}\delta_{bh}\delta_{cd}\delta_{fg} + \delta_{ac}\delta_{be}\delta_{df}\delta_{gh} + \delta_{ac}\delta_{bf}\delta_{de}\delta_{gh} \\
 & + \delta_{ae}\delta_{bd}\delta_{cf}\delta_{gh} + \delta_{af}\delta_{bd}\delta_{ce}\delta_{gh} + \delta_{ad}\delta_{bf}\delta_{ce}\delta_{gh} + \delta_{ae}\delta_{bc}\delta_{df}\delta_{gh} \\
 & + \delta_{ab}\delta_{cg}\delta_{df}\delta_{eh} + \delta_{ag}\delta_{bf}\delta_{cd}\delta_{eh} + \delta_{ag}\delta_{bd}\delta_{ch}\delta_{ef} + \delta_{ah}\delta_{bd}\delta_{cg}\delta_{ef} \\
 & + \delta_{ab}\delta_{ch}\delta_{df}\delta_{eg} + \delta_{ah}\delta_{bf}\delta_{cd}\delta_{eg} + \delta_{ab}\delta_{cf}\delta_{dh}\delta_{eg} + \delta_{af}\delta_{bh}\delta_{cd}\delta_{eg} \\
 & + \delta_{ad}\delta_{bh}\delta_{cg}\delta_{ef} + \delta_{ag}\delta_{bc}\delta_{dh}\delta_{ef} + \delta_{ab}\delta_{cg}\delta_{de}\delta_{fh} + \delta_{ag}\delta_{be}\delta_{cd}\delta_{fh} \\
 & + \delta_{ab}\delta_{cf}\delta_{dg}\delta_{eh} + \delta_{af}\delta_{bg}\delta_{cd}\delta_{eh} + \delta_{ad}\delta_{bg}\delta_{ch}\delta_{ef} + \delta_{ah}\delta_{bc}\delta_{dg}\delta_{ef} \\
 & + \delta_{ab}\delta_{ch}\delta_{de}\delta_{fg} + \delta_{ah}\delta_{be}\delta_{cd}\delta_{fg} + \delta_{ad}\delta_{be}\delta_{cf}\delta_{gh} + \delta_{af}\delta_{bc}\delta_{de}\delta_{gh}) \\
 & + D (\delta_{ac}\delta_{be}\delta_{dg}\delta_{fh} + \delta_{ac}\delta_{bg}\delta_{de}\delta_{fh} + \delta_{ae}\delta_{bg}\delta_{cf}\delta_{dh} + \delta_{af}\delta_{bh}\delta_{ce}\delta_{dg} \\
 & + \delta_{ad}\delta_{bh}\delta_{ce}\delta_{fg} + \delta_{ae}\delta_{bc}\delta_{dh}\delta_{fg} + \delta_{ad}\delta_{bf}\delta_{cg}\delta_{eh} + \delta_{ag}\delta_{bc}\delta_{df}\delta_{eh} \\
 & + \delta_{ag}\delta_{be}\delta_{ch}\delta_{df} + \delta_{ah}\delta_{bf}\delta_{cg}\delta_{de} + \delta_{af}\delta_{bd}\delta_{ch}\delta_{eg} + \delta_{ah}\delta_{bd}\delta_{cf}\delta_{eg} \\
 & + \delta_{ac}\delta_{be}\delta_{dh}\delta_{fg} + \delta_{ac}\delta_{bh}\delta_{de}\delta_{fg} + \delta_{ae}\delta_{bh}\delta_{cf}\delta_{dg} + \delta_{af}\delta_{bg}\delta_{ce}\delta_{dh} \\
 & + \delta_{ad}\delta_{bg}\delta_{ce}\delta_{fh} + \delta_{ae}\delta_{bc}\delta_{dg}\delta_{fh} + \delta_{ad}\delta_{bf}\delta_{ch}\delta_{eg} + \delta_{ah}\delta_{bc}\delta_{df}\delta_{eg} \\
 & + \delta_{ag}\delta_{bf}\delta_{ch}\delta_{de} + \delta_{ah}\delta_{be}\delta_{cg}\delta_{df} + \delta_{af}\delta_{bd}\delta_{cg}\delta_{eh} + \delta_{ag}\delta_{bd}\delta_{cf}\delta_{eh} \\
 & + \delta_{ad}\delta_{bh}\delta_{cf}\delta_{eg} + \delta_{af}\delta_{bc}\delta_{dh}\delta_{eg} + \delta_{ad}\delta_{be}\delta_{cg}\delta_{fh} + \delta_{ag}\delta_{bc}\delta_{de}\delta_{fh} \\
 & + \delta_{af}\delta_{bh}\delta_{cg}\delta_{de} + \delta_{ag}\delta_{be}\delta_{cf}\delta_{dh} + \delta_{ac}\delta_{bf}\delta_{dg}\delta_{eh} + \delta_{ac}\delta_{bg}\delta_{df}\delta_{eh} \\
 & + \delta_{ae}\delta_{bg}\delta_{ch}\delta_{df} + \delta_{ah}\delta_{bf}\delta_{ce}\delta_{dg} + \delta_{ae}\delta_{bd}\delta_{ch}\delta_{fg} + \delta_{ah}\delta_{bd}\delta_{ce}\delta_{fg} \\
 & + \delta_{ac}\delta_{bf}\delta_{dh}\delta_{eg} + \delta_{ac}\delta_{bh}\delta_{df}\delta_{eg} + \delta_{ae}\delta_{bh}\delta_{cg}\delta_{df} + \delta_{ag}\delta_{bf}\delta_{ce}\delta_{dh} \\
 & + \delta_{ae}\delta_{bd}\delta_{cg}\delta_{fh} + \delta_{ag}\delta_{bd}\delta_{ce}\delta_{fh} + \delta_{ad}\delta_{bg}\delta_{cf}\delta_{eh} + \delta_{af}\delta_{bc}\delta_{dg}\delta_{eh} \\
 & + \delta_{ad}\delta_{be}\delta_{ch}\delta_{fg} + \delta_{ah}\delta_{bc}\delta_{de}\delta_{fg} + \delta_{af}\delta_{bg}\delta_{ch}\delta_{de} + \delta_{ah}\delta_{be}\delta_{cf}\delta_{dg})
 \end{aligned}
 \tag{A.3}$$

で表される。ここに、

$$A = -\frac{2}{105}I_1, \quad B = \frac{1}{105}I_1, \quad C = -\frac{1}{140}I_1, \quad D = \frac{1}{280}I_1 \quad (A.4)$$

である。(A.3) 式の導出に当たって、不変量 $\langle \text{Tr}(s^4) \rangle$ が $\text{Tr}(s) = 0$ の時 $\frac{1}{2} \langle (\text{Tr}(s^2))^2 \rangle$ に等しいことを用いた (Siggia 1981b)。

いくつかの特別な添え字に対しては

$$\begin{aligned} \langle s_{11}^4 \rangle &= \frac{4}{105}I_1, & \langle s_{12}^4 \rangle &= \frac{3}{140}I_1, & \langle s_{11}^2 s_{12}^2 \rangle &= \frac{1}{105}I_1, \\ \langle s_{11}^2 s_{22}^2 \rangle &= \frac{2}{105}I_1, & \langle s_{11}^2 s_{23}^2 \rangle &= \frac{1}{105}I_1, & \langle s_{12}^2 s_{13}^2 \rangle &= \frac{1}{140}I_1 \end{aligned} \quad (A.5)$$

となる。

(b) 2つの ω と 2つの s の 4 次モーメント

2つの ω と 2つの s の 4 次モーメントの積の平均の等方形は

$$\begin{aligned} \langle \omega_a \omega_b s_{cd} s_{ef} \rangle &= A \delta_{ab} \delta_{cd} \delta_{ef} \\ &+ B (\delta_{ab} \delta_{ce} \delta_{df} + \delta_{ab} \delta_{cf} \delta_{de}) \\ &+ C (\delta_{ac} \delta_{bd} \delta_{ef} + \delta_{ad} \delta_{bc} \delta_{ef} + \delta_{ae} \delta_{bf} \delta_{cd} + \delta_{af} \delta_{be} \delta_{cd}) \\ &+ D (\delta_{ac} \delta_{be} \delta_{df} + \delta_{ac} \delta_{bf} \delta_{de} + \delta_{ad} \delta_{be} \delta_{cf} + \delta_{ad} \delta_{bf} \delta_{ce} \\ &+ \delta_{ae} \delta_{bc} \delta_{df} + \delta_{ae} \delta_{bd} \delta_{cf} + \delta_{af} \delta_{bc} \delta_{de} + \delta_{af} \delta_{bd} \delta_{ce}) \end{aligned} \quad (A.6)$$

である。ここに、

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{21}I_2 + \frac{8}{105}I_3, & B &= \frac{11}{210}I_2 - \frac{2}{35}I_3, \\ C &= \frac{2}{105}I_2 - \frac{2}{35}I_3, & D &= -\frac{1}{70}I_2 + \frac{3}{70}I_3 \end{aligned} \quad (A.7)$$

である。

(c) ω の 4 次モーメント

ω の 4 次のモーメントの等方形は

$$\langle \omega_a \omega_b \omega_c \omega_d \rangle = \frac{1}{15}I_4 (\delta_{ab} \delta_{cd} + \delta_{ac} \delta_{bd} + \delta_{ad} \delta_{bc}) \quad (A.8)$$

と表される。ただし、 I_4 は (4.4) 式で与えられる。

(d) 速度勾配の4次モーメント

速度勾配を (A.2) のように分解すれば、4次モーメントは

$$\begin{aligned} & \langle (\partial_a u_b)(\partial_c u_d)(\partial_e u_f)(\partial_g u_h) \rangle \\ &= \langle (s_{ab} + \frac{1}{2}\epsilon_{abp}\omega_p)(s_{cd} + \frac{1}{2}\epsilon_{cdq}\omega_q)(s_{ef} + \frac{1}{2}\epsilon_{efr}\omega_r)(s_{gh} + \frac{1}{2}\epsilon_{ghs}\omega_s) \rangle \end{aligned} \quad (A.9)$$

と書ける。これは、 $\langle s_{ab}s_{cd}s_{ef}s_{gh} \rangle$ と $\langle \omega_a\omega_b s_{cd}s_{ef} \rangle$ と $\langle \omega_a\omega_b\omega_c\omega_d \rangle$ の一次結合で表されるので、(A.3)、(A.6)、(A.8) を使って、次式を得る。

$$\begin{aligned} & \langle (\partial_a u_b)(\partial_c u_d)(\partial_e u_f)(\partial_g u_h) \rangle \\ &= A(\delta_{ab}\delta_{cd}\delta_{ef}\delta_{gh}) \\ &+ B(\delta_{ab}\delta_{cd}\delta_{eg}\delta_{fh} + \delta_{ab}\delta_{ce}\delta_{df}\delta_{gh} + \delta_{ab}\delta_{cg}\delta_{dh}\delta_{ef} \\ &\quad + \delta_{ac}\delta_{bd}\delta_{ef}\delta_{gh} + \delta_{ae}\delta_{bf}\delta_{cd}\delta_{gh} + \delta_{ag}\delta_{bh}\delta_{cd}\delta_{ef}) \\ &+ C(\delta_{ab}\delta_{cd}\delta_{eh}\delta_{fg} + \delta_{ab}\delta_{cf}\delta_{de}\delta_{gh} + \delta_{ab}\delta_{ch}\delta_{dg}\delta_{ef} \\ &\quad + \delta_{ad}\delta_{bc}\delta_{ef}\delta_{gh} + \delta_{af}\delta_{be}\delta_{cd}\delta_{gh} + \delta_{ah}\delta_{bg}\delta_{cd}\delta_{ef}) \\ &+ D(\delta_{ab}\delta_{ce}\delta_{dg}\delta_{fh} + \delta_{ab}\delta_{ce}\delta_{dh}\delta_{fg} + \delta_{ab}\delta_{cf}\delta_{dh}\delta_{eg} + \delta_{ab}\delta_{cg}\delta_{de}\delta_{fh} \\ &\quad + \delta_{ab}\delta_{cg}\delta_{df}\delta_{eh} + \delta_{ab}\delta_{ch}\delta_{df}\delta_{eg} + \delta_{ac}\delta_{bg}\delta_{dh}\delta_{ef} + \delta_{ad}\delta_{bf}\delta_{ce}\delta_{gh} \\ &\quad + \delta_{ae}\delta_{bd}\delta_{cf}\delta_{gh} + \delta_{ac}\delta_{bh}\delta_{dg}\delta_{ef} + \delta_{ac}\delta_{be}\delta_{df}\delta_{gh} + \delta_{ae}\delta_{bc}\delta_{df}\delta_{gh} \\ &\quad + \delta_{ad}\delta_{bh}\delta_{cg}\delta_{ef} + \delta_{ac}\delta_{bf}\delta_{de}\delta_{gh} + \delta_{ae}\delta_{bg}\delta_{cd}\delta_{fh} + \delta_{af}\delta_{bd}\delta_{ce}\delta_{gh} \\ &\quad + \delta_{ae}\delta_{bh}\delta_{cd}\delta_{fg} + \delta_{ag}\delta_{bf}\delta_{cd}\delta_{eh} + \delta_{ag}\delta_{bc}\delta_{dh}\delta_{ef} + \delta_{af}\delta_{bh}\delta_{cd}\delta_{eg} \\ &\quad + \delta_{ag}\delta_{be}\delta_{cd}\delta_{fh} + \delta_{ag}\delta_{bd}\delta_{ch}\delta_{ef} + \delta_{ah}\delta_{bf}\delta_{cd}\delta_{eg} + \delta_{ah}\delta_{bd}\delta_{cg}\delta_{ef}) \\ &+ E(\delta_{ab}\delta_{cf}\delta_{dg}\delta_{eh} + \delta_{ab}\delta_{ch}\delta_{de}\delta_{fg} + \delta_{ad}\delta_{be}\delta_{cf}\delta_{gh} + \delta_{ad}\delta_{bg}\delta_{ch}\delta_{ef} \\ &\quad + \delta_{af}\delta_{bc}\delta_{de}\delta_{gh} + \delta_{af}\delta_{bg}\delta_{cd}\delta_{eh} + \delta_{ah}\delta_{be}\delta_{cd}\delta_{fg} + \delta_{ah}\delta_{bc}\delta_{dg}\delta_{ef}) \\ &+ F(\delta_{ac}\delta_{be}\delta_{dg}\delta_{fh} + \delta_{ac}\delta_{bg}\delta_{de}\delta_{fh} + \delta_{ae}\delta_{bc}\delta_{dg}\delta_{fh} + \delta_{ac}\delta_{bf}\delta_{dg}\delta_{eh} \\ &\quad + \delta_{ac}\delta_{bg}\delta_{df}\delta_{eh} + \delta_{ad}\delta_{be}\delta_{cg}\delta_{fh} + \delta_{ad}\delta_{bg}\delta_{ce}\delta_{fh} + \delta_{ad}\delta_{bf}\delta_{cg}\delta_{eh} \\ &\quad + \delta_{ac}\delta_{be}\delta_{dh}\delta_{fg} + \delta_{ac}\delta_{bh}\delta_{de}\delta_{fg} + \delta_{ae}\delta_{bc}\delta_{dh}\delta_{fg} + \delta_{ad}\delta_{bh}\delta_{ce}\delta_{fg} \\ &\quad + \delta_{ae}\delta_{bd}\delta_{ch}\delta_{fg} + \delta_{ad}\delta_{bf}\delta_{ch}\delta_{eg} + \delta_{ad}\delta_{bh}\delta_{cf}\delta_{eg} + \delta_{ae}\delta_{bg}\delta_{cf}\delta_{dh} \\ &\quad + \delta_{ae}\delta_{bg}\delta_{ch}\delta_{df} + \delta_{af}\delta_{bd}\delta_{cg}\delta_{eh} + \delta_{ae}\delta_{bh}\delta_{cf}\delta_{dg} + \delta_{af}\delta_{bc}\delta_{dh}\delta_{eg}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \delta_{af}\delta_{bd}\delta_{ch}\delta_{eg} + \delta_{ag}\delta_{bc}\delta_{de}\delta_{fh} + \delta_{ag}\delta_{be}\delta_{cf}\delta_{dh} + \delta_{af}\delta_{bg}\delta_{ce}\delta_{dh} \\
& + \delta_{ag}\delta_{bc}\delta_{df}\delta_{eh} + \delta_{ag}\delta_{be}\delta_{ch}\delta_{df} + \delta_{ag}\delta_{bd}\delta_{cf}\delta_{eh} + \delta_{ag}\delta_{bf}\delta_{ch}\delta_{de} \\
& + \delta_{af}\delta_{bh}\delta_{ce}\delta_{dg} + \delta_{af}\delta_{bh}\delta_{cg}\delta_{de} + \delta_{ah}\delta_{bc}\delta_{df}\delta_{eg} + \delta_{ah}\delta_{bf}\delta_{ce}\delta_{dg} \\
& + \delta_{ah}\delta_{bd}\delta_{ce}\delta_{fg} + \delta_{ah}\delta_{be}\delta_{cg}\delta_{df} + \delta_{ah}\delta_{bd}\delta_{cf}\delta_{eg} + \delta_{ah}\delta_{bf}\delta_{cg}\delta_{de}) \\
& + G(\delta_{ae}\delta_{bd}\delta_{cg}\delta_{fh} + \delta_{ac}\delta_{bf}\delta_{dh}\delta_{eg} + \delta_{ac}\delta_{bh}\delta_{df}\delta_{eg} \\
& \quad + \delta_{ae}\delta_{bh}\delta_{cg}\delta_{df} + \delta_{ag}\delta_{bf}\delta_{ce}\delta_{dh} + \delta_{ag}\delta_{bd}\delta_{ce}\delta_{fh}) \\
& + H(\delta_{ad}\delta_{bg}\delta_{cf}\delta_{eh} + \delta_{ad}\delta_{be}\delta_{ch}\delta_{fg} + \delta_{af}\delta_{bc}\delta_{dg}\delta_{eh} \\
& \quad + \delta_{af}\delta_{bg}\delta_{ch}\delta_{de} + \delta_{ah}\delta_{bc}\delta_{de}\delta_{fg} + \delta_{ah}\delta_{be}\delta_{cf}\delta_{dg}) \\
& + I(\delta_{ac}\delta_{bd}\delta_{eg}\delta_{fh} + \delta_{ae}\delta_{bf}\delta_{cg}\delta_{dh} + \delta_{ag}\delta_{bh}\delta_{ce}\delta_{df}) \\
& + J(\delta_{ac}\delta_{bd}\delta_{eh}\delta_{fg} + \delta_{ad}\delta_{bc}\delta_{eg}\delta_{fh} + \delta_{ae}\delta_{bf}\delta_{ch}\delta_{dg} \\
& \quad + \delta_{af}\delta_{be}\delta_{cg}\delta_{dh} + \delta_{ag}\delta_{bh}\delta_{cf}\delta_{de} + \delta_{ah}\delta_{bg}\delta_{ce}\delta_{df}) \\
& + K(\delta_{ad}\delta_{bc}\delta_{eh}\delta_{fg} + \delta_{af}\delta_{be}\delta_{ch}\delta_{dg} + \delta_{ah}\delta_{bg}\delta_{cf}\delta_{de}). \tag{A.10}
\end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned}
A &= -\frac{2}{105}I_1, & B &= \frac{1}{105}I_1 + \frac{1}{140}I_2 - \frac{4}{105}I_3, & C &= \frac{1}{105}I_1 - \frac{1}{140}I_2 + \frac{4}{105}I_3, \\
D &= -\frac{1}{140}I_1 - \frac{1}{210}I_2 + \frac{1}{70}I_3, & E &= -\frac{1}{140}I_1 + \frac{1}{70}I_2 - \frac{3}{70}I_3, & F &= \frac{1}{280}I_1, \\
G &= \frac{1}{280}I_1 + \frac{1}{70}I_2 - \frac{3}{70}I_3, & H &= \frac{1}{280}I_1 - \frac{1}{70}I_2 + \frac{3}{70}I_3, \\
I &= -\frac{1}{420}I_2 + \frac{2}{35}I_3 + \frac{1}{240}I_4, & J &= -\frac{1}{240}I_4, & K &= \frac{1}{420}I_2 - \frac{2}{35}I_3 + \frac{1}{240}I_4 \tag{A.11}
\end{aligned}$$

である。いくつかの成分をあげると、

$$\begin{aligned}
\langle (\partial_1 u_1)^4 \rangle &= \frac{4}{105}I_1, \\
\langle (\partial_1 u_1)^2 (\partial_2 u_2)^2 \rangle &= \frac{2}{105}I_1, \\
\langle (\partial_1 u_2)^4 \rangle &= \frac{3}{140}I_1 + \frac{11}{140}I_2 - \frac{3}{35}I_3 + \frac{1}{80}I_4, \\
\langle (\partial_1 u_1)^2 (\partial_1 u_2)^2 \rangle &= \langle (\partial_1 u_1)^2 (\partial_2 u_1)^2 \rangle = \frac{1}{105}I_1 + \frac{1}{70}I_2 - \frac{1}{105}I_3, \\
\langle (\partial_1 u_1)^2 (\partial_2 u_3)^2 \rangle &= \frac{1}{105}I_1 + \frac{1}{210}I_2 + \frac{2}{105}I_3, \\
\langle (\partial_1 u_2)^2 (\partial_2 u_1)^2 \rangle &= \frac{3}{140}I_1 - \frac{11}{420}I_2 + \frac{1}{35}I_3 + \frac{1}{80}I_4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle (\partial_1 u_2)^2 (\partial_1 u_3)^2 \rangle &= \langle (\partial_2 u_1)^2 (\partial_3 u_1)^2 \rangle = \frac{1}{140} I_1 + \frac{11}{420} I_2 - \frac{1}{35} I_3 + \frac{1}{240} I_4, \\ \langle (\partial_1 u_2)^2 (\partial_3 u_1)^2 \rangle &= \frac{1}{140} I_1 - \frac{1}{420} I_2 + \frac{2}{35} I_3 + \frac{1}{240} I_4\end{aligned}\quad (A.12)$$

である。

引用文献

- Ashurst, W.T., A.R. Kerstein, R.M. Kerr & C.H. Gibson 1987 Alignment of Vorticity and Scalar Gradient with Strain Rate in Simulated Navier-Stokes Turbulence. *Phys. Fluids* **30**, 2343 - 2353.
- Batchelor, G.K. 1970 *An Introduction to Fluid Dynamics*. Camb. Univ. Press.
- Hosokawa, I. & K. Yamamoto 1989 Fine Structure of a Directly Simulated Isotropic Turbulence. *J. Phys. Soc. Japan* **58**, 20 - 23.
- Hussain, A.K.M.F. 1984 Coherent Structures and Incoherent Turbulence. in *Turbulence and Chaotic Phenomena in Fluids*, ed. T. Tatsumi, North-Holland pp. 453 - 460.
- Kerr, R.M. 1985 Higher-Order Derivative Correlations and the Alignment of Small-Scale Structures in Isotropic Numerical Turbulence. *J. Fluid Mech.* **153**, 31 - 58.
- Kerr, R.M. 1987 Histograms of Helicity and Strain in Numerical Turbulence. *Phys. Rev. Lett.* **59**, 783 - 786.
- Kida, S. & Y. Murakami 1987 Kyoto U. RIMS Kokyuroku **606**, 151 - 187.
- Kida, S. & Y. Murakami 1989 Statistics of Velocity Gradients in Turbulence at Moderate Reynolds Numbers. *Fluid Dyn. Res.* **4**, 347 - 370.
- Kida, S. & K. Ohkitani 1991 Error Growth and Spatio-Temporal Intermittency of a Forced Turbulence. (submitted to *Phys. Fluids*)
- Kline, S.J., W.C. Reynolds, F.A. Schraub & P.W. Runstadler 1967 The Structure of Turbulent Boundary Layers. *J. Fluid Mech.* **30**, 741 - 773.
- Kuo, A.Y.S. & S. Corrsin 1972 Experiment on the Geometry of the Fine-Structure Regions in Fully Turbulent Fluid. *J. Fluid Mech.* **56**, 447 - 479.

- Monin, A.S. & A.M. Yaglom: *Statistical Fluid Mechanics*, Vol. 2. (M.I.T. Press, Cambridge, MA, 1975).
- Pumir, A. & E. Siggia 1990 Collapsing Solutions to the 3-D Euler Equations. *Phys. Fluids* **A2**, 220 - 241.
- She, Z.S., E. Jackson & S.A. Orszag 1990 Intermittent Vortex Structures in Homogeneous Isotropic Turbulence. *Nature* **344**, 226 - 228.
- Siggia, E.D. 1981a Numerical Study of Small-Scale Intermittency in Three-Dimensional Turbulence. *J. Fluid Mech.* **107**, 375 - 406.
- Siggia, E.D. 1981b Invariants for the One-Point Vorticity and Strain Rate Correlation Functions. *Phys. Fluids* **24**, 1934 - 1936.
- Tennekes, H. 1968 Simple Model for the Small-Scale Structure of Turbulence. *Phys. Fluids* **11**, 669 - 671.

図説明

- 図 1. (a) 一辺 $\pi/4$ の立方体内の等渦度面。面上での渦度は $\omega^2 = 4 \langle \omega^2 \rangle$ で、面の内部で渦度は大きな値をとる。(b) (a) で示した高渦度領域内での渦線。
- 図 2. バーガース渦に対する渦度自乗（実線）と速度ひずみテンソルの自乗の対角和の径方向の空間分布。レイノルズ数 $R = |I|/\nu$ は (a) 20、(b) 50、(c) 100、(d) 200、(e) 500、(f) 1000 である。縦座標は原点での渦度の自乗で規格化してある。
- 図 3. Tennekes (1968) によって提案された乱流の小スケールの構造を記述するための渦管モデル。乱流場は、コルモゴロフ長さ l を直径とし、テイラー長さ λ を代表長さとする多数の渦管からなっていると仮定されている。

表 I

	F_1	F_2	F_3	F_4
Gaussian	$\frac{7}{5}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$
$R_\lambda = 60 \sim 90^\dagger$	2.6	2.4	0.37	3.9
$R_\lambda \approx 180$	2.7	2.4	0.34	5.4

速度勾配の4次モーメントの規格化回転不変量。[†] Siggia (1981a) より。

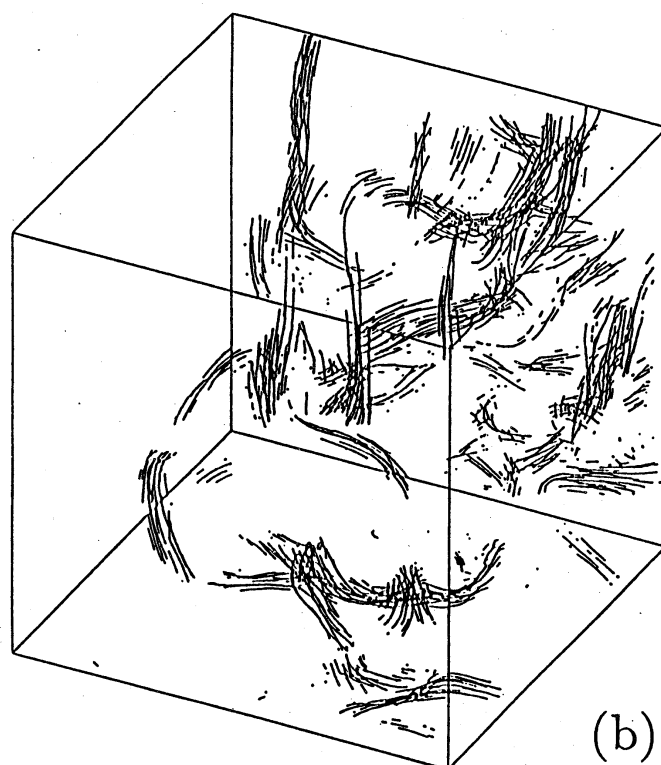
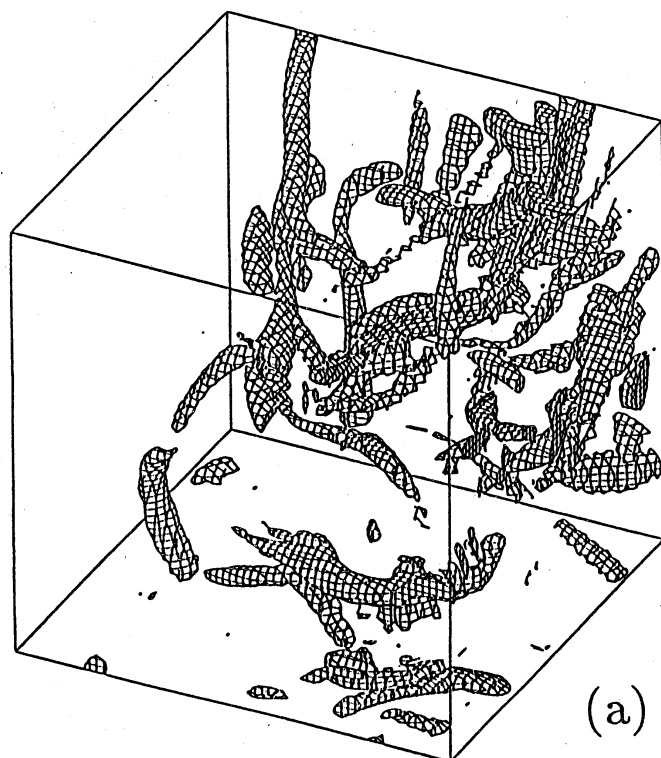


图 1

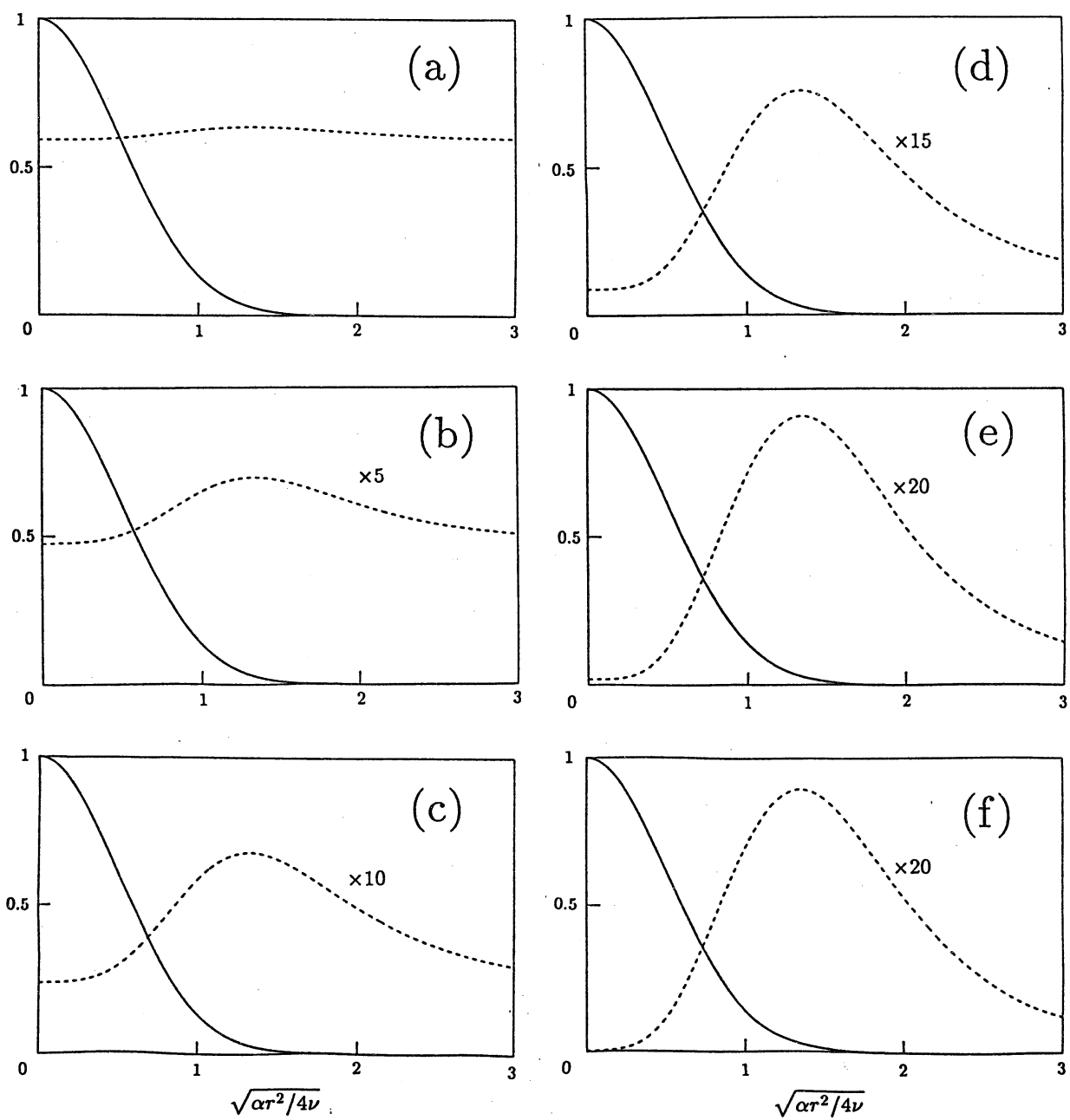


图 2

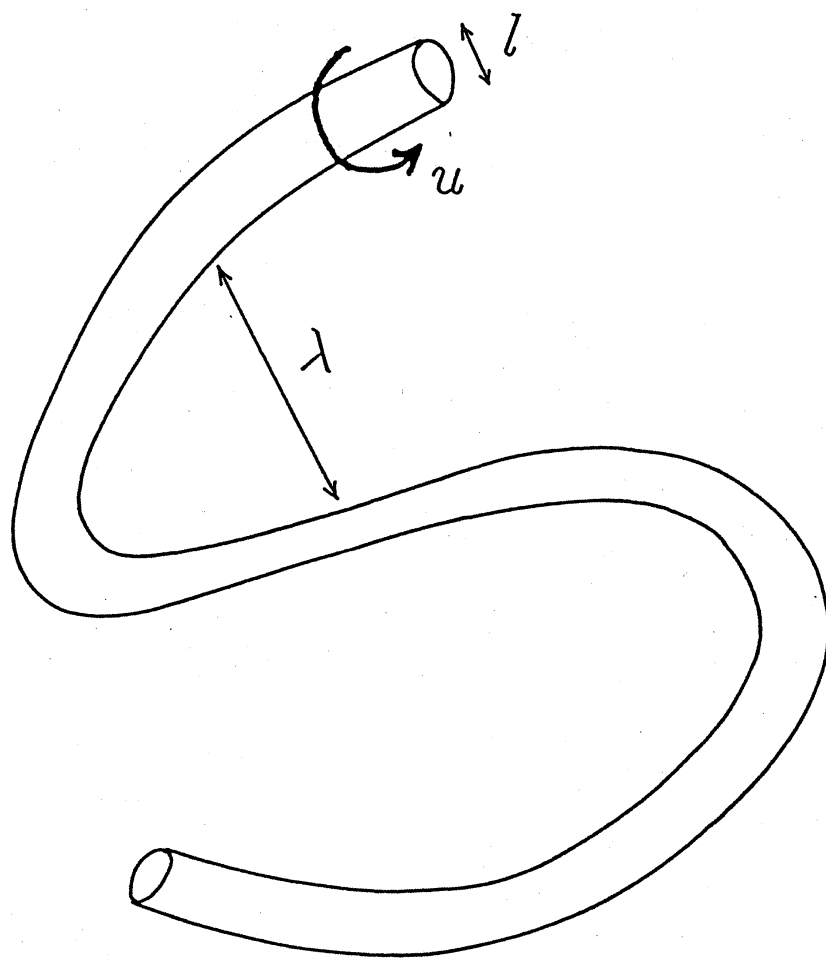


图 3