

ブロック・イデアルのコホモロジー環

佐々木 洋城

Sasaki, Hiroki

信州大学全学教育機構

Shinshu University, School of General Education

1 対称多元環

block ideal のコホモロジーを語るとき, (目下のところ) Hochschild コホモロジー環との関わりの中で考えざるをえない. そこで, はじめに, 関連事項を振り返っておく.

R を単位元を含む可換環とする. A を対称 R 多元環とする. すなわち, (A, A) -両側加群としての同型

$$\Phi: A \rightarrow A^* = \text{Hom}_R(A, R)$$

が指定されている. $\sigma = \Phi(1): A \rightarrow R$ とおく. 任意の $\alpha, \alpha' \in A$ に対して $\sigma(\alpha\alpha') = \sigma(\alpha'\alpha)$ が成り立つ. このことから, σ を A の対称化形式とよぶ. (A, A) -両側加群としての同型 $A \rightarrow A^*$ はひと通りではなく, 従って, A の対称化形式のとり方もひと通りではない.

B も対称 R 多元環とする. 以下は A, B の対称化形式を固定しての話である.

(A, B) -両側加群 X に対して $X^* = \text{Hom}_R(X, R)$ を X の R -dual とする.

(A, B) -両側加群 X が左 A -加群として有限生成射影的であり, 右 B -加群としても有限生成射影的であるとき, 次が成り立つ:

$$(1) \text{Hom}_A(X, A) \simeq X^* \simeq \text{Hom}_B(X, B).$$

$$(2) \text{左 } A\text{-加群 } L \text{ と左 } B\text{-加群 } M \text{ について } \text{Hom}_A(X \otimes_B M, L) \simeq \text{Hom}_B(M, X^* \otimes_A L).$$

(1) の同型は, 例えば, $\varphi: {}_A X \rightarrow A$ に対して $\sigma \circ \varphi: X \rightarrow R$ を対応させることで得られる.

(2) の同型は, (2) の同型の特別な場合として得られる

$${}_X \varepsilon: X \otimes_B X^* \rightarrow A, \quad {}_X \eta: A \rightarrow X \otimes_B X^*$$

を用いて記述される. これらを adjunction maps とよぶ. adjunction maps を用いて Hochschild コホモロジー環の transfer 写像

$$t_{AX_B}: HH^*(B) \rightarrow HH^*(A),$$

$$t_{BX_A^*}: HH^*(A) \rightarrow HH^*(B)$$

が定義される. 特に, 0 次の Hochschild コホモロジーは多元環の中心に同型であることから $t_{AX_B}(1_B) \in HH^0(A)$ に対応する $Z(A)$ の元を π_X とかく. また $t_{BX_A^*}(1_A) \in HH^0(B)$ に対応する $Z(B)$ の元を π_{X^*} とかく. これらを相対射影元とよぶ.

写像

$$\text{Ext}_{A \otimes A^{\text{op}}}^*(A, A) \rightarrow \text{Ext}_{A \otimes B^{\text{op}}}^*(X, X); \zeta \mapsto \zeta \otimes 1_X$$

$$\text{Ext}_{B \otimes B^{\text{op}}}^*(B, B) \rightarrow \text{Ext}_{A \otimes B^{\text{op}}}^*(X, X); \theta \mapsto 1_X \otimes \theta$$

との pullback を $HH^*(A) \times_X HH^*(B)$ と書く:

$$HH^*(A) \times_X HH^*(B) = \{ (\zeta, \theta) \in HH^*(A) \oplus HH^*(B) \mid \text{Res}_X(\zeta) = {}_X\text{Res}(\theta) \}.$$

$$\begin{array}{ccc} HH^*(A) & \longrightarrow & \text{Ext}_{A \otimes B^{\text{op}}}^*(X, X) \\ \uparrow & & \uparrow \\ HH^*(A) \times_X HH^*(B) & \longrightarrow & HH^*(B) \end{array}$$

$(\zeta, \theta) \in HH^*(A) \times_X HH^*(B)$ を X -stable pair とよぶことにする. $(\zeta, \theta) \in HH^*(A) \oplus HH^*(B)$ が X -stable pair であることと $(\theta, \zeta) \in HH^*(B) \oplus HH^*(A)$ が X^* -stable pair であることは同値である. それゆえ, $\zeta \in HH^*(A)$ は X -stable であるといい, $\theta \in HH^*(B)$ は X^* -stable であるという. ただし, $\zeta \in HH^*(A)$ が X -stable であるというとき, 相棒の $\theta \in HH^*(B)$ の存在を忘れてはならない.

$$HH_X^*(A) = \{ \zeta \in HH^*(A) \mid \zeta \text{ は } X\text{-stable である} \},$$

$$HH_{X^*}^*(B) = \{ \theta \in HH^*(B) \mid \theta \text{ は } X^*\text{-stable である} \}$$

をそれぞれ X -stable subring, X^* -stable subring とよぶ.

相対射影元 $\pi_X \in Z(A)$ が可逆のとき, 正規化された transfer 写像

$$T_X : HH^*(B) \rightarrow HH^*(A); \theta \mapsto \pi_X^{-1} t_X(\theta)$$

は, その定義域を X^* -stable subring $HH_{X^*}^*(B)$ に制限すれば X -stable subring $HH_X^*(A)$ への全射となる. この写像を R_X と書く:

$$R_X : HH_{X^*}^*(B) \rightarrow HH_X^*(A); \theta \mapsto \pi_X^{-1} t_X(\theta).$$

ここで注意しなければならないことは, $T_X^{-1}(HH_X^*(A)) = HH_{X^*}^*(B)$ であると主張しているわけではないということである.

もし, さらに, $\pi_{X^*} \in Z(B)$ も可逆ならば, 全射 $R_{X^*} : HH_X^*(A) \rightarrow HH_{X^*}^*(B)$ が得られ, 同型

$$R_X : HH_{X^*}^*(B) \xrightarrow{\sim} HH_X^*(A)$$

が得られる. すなわち, 制限かつ正規化された transfer 写像により, stable elements 同士は互いに移り合うのである

2 ブロックのコホモロジー環

B を kG の block ideal とし, D をその defect 群とする. このとき B を直既約 $k[G \times G^{\text{op}}]$ -加群とみて, $\Delta D = \{ (a, a^{-1}) \mid a \in D \}$ を vertex としてもつ. B の $k[G \times D^{\text{op}}]$ -加群としての直和因子 X で ΔD を vertex にもつものを B の source 加群とよぶ. source 加群は互いに同型であるとは限らないが, それらは $N_G(D)$ で共役である: X と X' がともに B の source 加群ならばある $t \in N_G(D)$ によって $X' \simeq X \otimes t$ である. source 加群 X は source べき等元 $i \in B^D$ を用いて, $X = kGi$ と表される.

source 加群 $X = kGi$ を指定する. $\text{Br}_D^G(i) \in kC_G(D)$ は原始的である. 従って, Brauer construction

$$X(D) = X^D / \sum_{Q < D} \text{Tr}_Q^D X^Q \simeq kC_G(D) \text{Br}_D^G(i)$$

は直既約左 $kC_G(D)$ -加群である. よって, $kC_G(D)$ のただひとつの block ideal $kC_G(D)e_D$ に属する. このとき, $k[DC_G(D)]$ の block ideal $b_D = k[DC_G(D)]e_D$ をとれば, (D, b_D) は Sylow

B -subpair である. (D, b_D) は source module $X(D_\gamma)$ に associate されるという. ここでは Sylow (B, X) -subpair とよぶことにする. Sylow (B, X) -subpair (D, b_D) から定められる圏

$$\mathcal{F}_{(D, b_D)}(B, X) = \{(Q, b_Q) \mid (Q, b_Q) \leq (D, b_D)\}$$

を考える. (Q, b_Q) から (R, b_R) への morphism は $x \in G$ で ${}^x(Q, b_Q) \leq (R, b_R)$ をみたすものが引き起こす共役写像 $c_x : Q \rightarrow R; a \mapsto {}^x a$ である. このような $x \in G$ のなす集合を $T_G((Q, b_Q), (R, b_R))$ と書く. 圏 $\mathcal{F}_{(D, b_D)}(B, X)$ を Brauer 圏とよぶ.

定義 2.1 (Linckelmann [2]) いままでの記号の下で, ブロック B のコホモロジー環を次のように定義する. $\zeta \in H(D, k)$ が条件

$$\text{res}_Q {}^g \zeta = \text{res}_Q \zeta \quad \forall (Q, b_Q) \leq (D, b_D) \quad \forall g \in N_G(Q, b_Q)$$

をみたすとき, ζ は $\mathcal{F}_{(D, b_D)}(B, X)$ -stable であるという. D のコホモロジー環 $H(D, k)$ の部分集合

$$H(G, B; X) = \{\zeta \in H(D, k) \mid \zeta \text{ は } \mathcal{F}_{(D, b_D)}(B, X)\text{-stable}\}$$

を B の $(X$ によって定められる) コホモロジー環とよぶ.

Linckelmann はさらに次を示した. 通常のコホモロジー環はいわゆる diagonal embedding により Hochschild コホモロジー環に埋め込まれるのだが, ブロックのコホモロジー環はこの diagonal embedding によって Hochschild コホモロジー環の中ではある stable な部分環に含まれる. すなわち

定理 2.1 (Linckelmann) 今までの記号の下で

$$\zeta \in H^*(G, B; X) \implies \delta_D \zeta \in HH^*(kD) \text{ は } {}_{kD}ikGi_{kD}\text{-stable である.}$$

ここで, $ikGi = X^* \otimes_B X$ であり, (kD, kD) -両側加群とみている. $ikGi$ は群環 kG の (kD, kD) -両側加群としての直和因子であり, それ自身環である. ブロック B も source algebra とよばれ, B と多くの環論的性質を共有している.

これの逆が成り立つことを示した.

定理 2.2 ([4]) 今までの記号の下で $\zeta \in H^*(D, k)$ について, $\delta_P \zeta \in HH^*(kD)$ ${}_{kD}ikGi_{kD}$ -stable であるならば, ζ は $H^*(G, B; X)$ に属する.

これらをまとめると, $\zeta \in H^*(D, k)$ について,

$$\zeta \in H^*(G, B; X) \iff \delta_D \zeta \in HH^*(kD) \text{ は } {}_{kD}ikGi_{kD}\text{-stable である.}$$

例 2.1 B_0 を principal block とする. defect 群は G の Sylow p -部分群である. その一つを P とする. e_0 を B_0 の block べき等元とする. すなわち, $e \in Z(kG)$ で $B_0 = kGe_0$ である. 任意の $Q \leq P$ について, $\text{Br}_Q(e_0) \in kC_G(Q)$ は原始的である. (Brauer の第 3 主定理) つまり, $(Q, \text{Br}_Q(e_0))$ は B_0 -subpair である. ゆえに, $(Q, b_Q) \leq (P, \text{Br}_P(e_0))$ ならば, $(Q, b_Q) = (Q, \text{Br}_P(e_0))$ が成り立つ.

よって, 任意の $N_G(Q, b_Q) \leq (P, b_P)$ に対して $N_G(Q, b_Q) = N_G(Q)$ が成り立つ. すなわち

$$H^*(G, B_0) = \{\zeta \in H^*(P, k) \mid \zeta \text{ は } G \text{ 安定}\}$$

を得る. 通常のコホモロジー環 $H(G, k)$ についてのいわゆる stable element theorem により

$$\begin{aligned} &= \text{Im} [\text{res}_P : H^*(G, k) \rightarrow H^*(P, k)] \\ &\simeq H^*(G, k) \end{aligned}$$

このように, principal block においては, その block べき等元によって Brauer 圏が決まってしまうのである. しかし, 一般の block にあつては, このようなことは期待できない. むしろ, そのゆえに, コホモロジーという道具をかぶせることによって, B -subpair の様子を調べようとしたのかもしれない.

例 2.2 一般の block ideal に戻り, 以前の記号を使う. defect 群 D が G で正規であるとき

$${}_k D i k G i {}_k D = \bigoplus_{g D C_G(D) \in N_G(D, b_D) / D C_G(D)} k[gD]$$

であるから, $\zeta \in H^*(D, k)$ について,

$$\zeta \text{ が } {}_k D i k G i {}_k D\text{-stable である} \iff {}^g \zeta = \zeta \quad \forall g \in N_G(D, b_D).$$

よって

$$H^*(G, B; X) = H^*(D, k)^{N_G(D, b_D)}.$$

例 2.3 defect 群 D が可換のとき, $T = N_G(D, b_D)$ は Brauer 圏 $\mathcal{F}_{(D, b_D)}(B, X)$ における fusion を統制する. すなわち, 任意の $(Q, b_Q) \leq (D, b_D)$ について

$$N_G(Q, b_Q) = N_T(Q, b_Q) C_G(Q)$$

が成り立つ. よって, 任意の $H^*(D, k)^T$ は安定性条件をみたし

$$H^*(G, B; X) = H^*(D, k)^{N_G(D, b_D)}$$

であることがわかる.

例 2.4 G が p -可解群のときを考える. Harris–Linckelmann ([1] etc) により詳しく調べられている. e を B の block べき等元とする: $B = kGe$. G のある部分群 H と H -stable な $O_{p'}(H)$ の block ideal $b = kO_{p'}(H)f$ が存在して次が成り立つ:

- (1) $O_{p'}(G) \leq H$, $f \in Z(kO_{p'}(H))$ は $Z(kH)$ でも原始的である. よって, $C = kHf$ は kH の block ideal である.

$$e = \sum_{xH \in G/H} {}^x f$$

とおく.

- (2) D は C の defect 群でもあり, X は C の source 加群でもある. D は H の Sylow p -部分群であり, さらに $\mathcal{F}_{(D, b_D)}(B, X)$ と $\mathcal{F}_{(D, b_D)}(C, X)$ は同値である. それゆえ, $H^*(G, B; X) = H^*(H, C; X)$ である!
- (3) 任意の $Q \leq D$ について, $\text{Br}_Q(f) \in kC_G(Q)$ は原始的である. すなわち, $k[QC_G(Q)] \text{Br}_Q(f)$ は $k[QC_G(Q)]$ の block ideal である. ちょうど principal block と同じような状況であり, $N_H(Q, \text{Br}_Q(f)) = N_H(Q)$ が成り立つ. よって

$$\begin{aligned} H^*(H, C; X) &= \{\zeta \in H^*(D, k) \mid \zeta \text{ は } H\text{-stable}\} \\ &\simeq H^*(H, k). \end{aligned}$$

例えば,

- (1) $H^*(G, B; X) = H^*(D, k)$ ならば Tate の定理により, H は normal p -complement をもち, block C はべき零である. $\mathcal{F}_{(D, b_D)}(B, X)$ と $\mathcal{F}_{(D, b_D)}(C, X)$ は同値であるから, B もべき零である.
- (2) 任意の素 ideal $\mathfrak{p} \subset H^*(G, B; X)$ が $H^*(D, k)$ のある素 ideal $\mathfrak{q}$ を用いて $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap H^*(G, B; X)$ と表されるならば, Quillen の定理により, B はべき零である.

これらは、もちろん、一般の群についても正しいと信じられていることである。しかし、未だその証明は文献には見られないと思う。

3 Brauer 対応

ここでは、講演では述べられなかったが、その後わかったことをつけ加えておきたい。

H を G の部分群で

$$DC_G(D) \leq H$$

であるものと仮定する。 C を kH の block ideal とし、

$$C^G = B, \quad D \text{ は } C \text{ の defect 群である}$$

と仮定する。

B の source module X と C の source module Y は $(G \times D^{\text{op}}, \Delta D, H \times D^{\text{op}})$ に関する Green 対応で対応していると仮定する。

直既約 $k[H \times H^{\text{op}}]$ -加群 C の $G \times H^{\text{op}}$ への Green correspondent を L とおく。

このとき

定理 3.1 (Sasaki [5]) (1) L が定める相対射影元 $\pi_L \in Z(B)$ および L^* が定める相対射影元 $\pi_{L^*} \in Z(C)$ は可逆である。

(2)

$$L^* \otimes_B X \simeq Y \oplus O(\mathcal{Y}(G \times D^{\text{op}}, \Delta D, H \times D^{\text{op}})).$$

(3)

$$L \otimes_{kH} Y \simeq X \oplus Z$$

と直和分解され、 Z の直既約直和因子は $\mathcal{X}(G \times D^{\text{op}}, \Delta D, H \times D^{\text{op}})$ -射影的で、trivial source をもつ。

(4) $D \triangleleft H$ ならば、 $L \otimes_{kH} Y \simeq X$ 。

(5) $L \mid X \otimes_{kD} Y^*$ である。

(6) Sylow C -subpair (D, b_D) を $b_D Y(D) \neq 0$ ととる。 (D, b_D) は Sylow B -subpair でもあり、さらに、 $b_D X(D) \neq 0$ である。この Sylow subpair によって定められるコホモロジー環について、次は可換である：

$$\begin{array}{ccccc}
 H^*(G, B; X) & \xrightarrow{\delta_D} & HH_{X^*}^*(kD) & \begin{array}{c} \xrightarrow{R_X} \\ \xleftarrow{R_{X^*}} \end{array} & HH_X^*(B) \\
 & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & HH_{X^* \otimes_B L \otimes_C Y}^*(kD) & \begin{array}{c} \xrightarrow{R_X} \\ \xleftarrow{R_{X^*}} \end{array} & HH_{L \otimes_C Y}^*(B) \hookrightarrow HH_L^*(B) \\
 & & \parallel & & \uparrow \downarrow R_L \quad \uparrow \downarrow R_{L^*} \\
 & & HH_{Y^* \otimes_C L^* \otimes_B X}^*(kD) & \begin{array}{c} \xrightarrow{R_Y} \\ \xleftarrow{R_{Y^*}} \end{array} & HH_{L^*}^*(C) \cap HH_Y^*(C) \hookrightarrow HH_{L^*}^*(C) \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 H^*(H, C; Y) & \xrightarrow{\delta_D} & HH_{Y^*}^*(kD) & \begin{array}{c} \xrightarrow{R_Y} \\ \xleftarrow{R_{Y^*}} \end{array} & HH_Y^*(C)
 \end{array}$$

この記号の下で

定理 3.2

$$H^*(G, B; X) \subseteq H^*(H, C; Y) \iff \delta_D H^*(G, B; X) \subseteq HH_{Y^* \otimes_C L^* \otimes_B X}^*(kD).$$

この条件が成り立つとき, 次の可換図式を得る:

$$\begin{array}{ccccc} H^*(G, B) & \xrightarrow{\delta_D} & HH_{X^* \otimes_B L \otimes_C Y}^*(kD) & \begin{array}{c} \xrightarrow{R_X} \\ \xleftarrow{R_{X^*}} \end{array} & HH_{L \otimes_C Y}^*(B) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow R_{L^*} \\ H^*(H, C) & \xrightarrow{\delta_D} & HH_{Y^*}^*(kD) & \begin{array}{c} \xrightarrow{R_Y} \\ \xleftarrow{R_{Y^*}} \end{array} & HH_Y^*(C) \end{array} .$$

参考文献

- [1] M. E. Harris and M. Linckelmann, Splendid derived equivalences for blocks of finite p -solvable groups, J. London Math. Soc. **62** (2000), 85–96.
- [2] M. Linckelmann, Transfer in Hochschild cohomology of blocks of finite groups, Algebr. Represent. Theory **2** (1999), 107–135.
- [3] H. Nagao and Y. Tsushima, Representations of finite groups, Academic Press, New York, London, 1989.
- [4] H. Sasaki, Cohomology of block ideals of finite group algebras and stable elements, Algebr. Represent. Theory, submitted.
- [5] H. Sasaki, Cohomology algebras of blocks of finite groups and Brauer correspondence II, Algebr. Represent. Theory **13** (2010), 445–465.