

バナッハ空間における単調作用素に対する近接点法 Proximal point methods for monotone operators in Banach spaces

千葉大学・法経学部 青山 耕治

Koji Aoyama

Faculty of Law and Economics,
Chiba University

2010 *Mathematics Subject Classification.* 47H05, 47J25.

Keywords and phrases. 不動点, 単調作用素, 近接点法, 零点, Banach 空間

概要

バナッハ空間で定義された単調作用素の零点に関する存在定理および収束定理を紹介する。

1 序論

本稿では, 文献 [2, 6] で得られた結果の紹介と解説を行う。文献 [6] は, Banach 空間における単調作用素の零点問題とそれを解くための近接点法に関する研究成果をまとめたものである。一方, [2] は, ある種の非拡大性をもつ写像列の共通不動点の近似法に関する最近の結果である。

さて, 本稿ではもっぱら単調作用素の零点問題とその解の近似方法に注目するが, ここではまず, それらの先行研究として重要な Rockafellar による次の定理を見ておこう。

定理 1.1 (Rockafellar [18]). H を Hilbert 空間, A を H 上の極大単調作用素, $\{r_n\}$ を正の実数列とし, $\inf_n r_n > 0$ を仮定する。さらに, H の点列 $\{x_n\}$ を, $x_1 = x \in H$ および各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = (I + r_n A)^{-1} x_n \quad (1.1)$$

で定義する。ここで, I は H 上の恒等写像である。このとき, 次の二つが成り立つ。

- (1) $\{x_n\}$ が有界であることと, A の零点が存在することは同値である。
- (2) A の零点が存在するならば, $\{x_n\}$ は A のある零点に弱収束する。

式 (1.1) の $(I + r_n A)^{-1}$ は A のリゾルベントと呼ばれ, 定理 1.1 で用いられている点列構

成方法は**近接点法** (proximal point algorithm) と呼ばれる*¹。

本稿ではこの後、第 2 節で、極大単調作用素やそのリゾルベントなどの定義を説明する。そして、第 3 節では、定理 1.1 の結論 (1) の一般化、特に、Banach 空間の設定での結果を述べる。最後の第 4 節では、近接点法の変形アルゴリズムによる零点への強収束定理を紹介する*²。

2 準備

以下、本稿では、 E を実 Banach 空間、 E^* を E の共役空間、 $\|\cdot\|$ を E または E^* のノルム、 $\langle x, x^* \rangle$ を $x \in E$ における $x^* \in E^*$ の値、 $\mathbb{N}$ を正の整数全体の集合とする。また、 J は E の双対写像 (duality mapping) とする。つまり、すべての $x \in E$ に対して

$$Jx = \{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

である。

以下、滑らか (smooth) な Banach 空間、狭義凸 (strictly convex) な Banach 空間、一様凸 (uniformly convex) な Banach 空間、一様 Gâteaux 微分可能 (uniformly Gâteaux differentiable) なノルムを持つ Banach 空間などを取り上げる。これらの定義については、文献 [21] に詳しく書かれているが、特に次のことが重要である。

- E が一様凸ならば、 E は狭義凸かつ回帰的である。
- E が滑らか、狭義凸かつ回帰的ならば、双対写像 J は、 E から E^* へ一価写像とみなすことができ、さらに全単射である。このとき、 J の逆写像 J^{-1} は、 E^* の双対写像である。
- E のノルムが一様 Gâteaux 微分可能ならば、 E は滑らかである。

E が滑らか、狭義凸かつ回帰的なとき、関数 $\phi: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ を、 $x, y \in E$ に対して

$$\phi(x, y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy \rangle + \|y\|^2 \quad (2.1)$$

で定義する*³。さらに、 C を E の空でない閉凸部分集合とすると、各 $x \in E$ に対して

$$\phi(z, x) = \inf\{\phi(y, x) : y \in C\}$$

*¹ 定理 1.1 の仮定のもとで、 $(I + r_n A)^{-1}$ は H から H への 1 価写像なので、点列 $\{x_n\}$ は well-defined である。

*² 定理 1.1 の仮定のもとで、点列 $\{x_n\}$ は一般に強収束しないことが知られている [8]。

*³ E が Hilbert 空間のとき、 J は恒等写像とみなすことができるので、 $\phi(x, y) = \|x - y\|^2$ となる。

となる $z \in C$ がただ一つ存在することが知られている。この点 z を $Q_C(x)$ と表し、 Q_C を E から C の上への一般化射影 (generalized projection)^{*4}と呼ぶ [1, 12]。

A を E から E^* への多価写像とすると、 $\{(x, x^*) \in E \times E^* : x^* \in Ax\}$ を A のグラフという。一般に、 E から E^* への多価写像は、そのグラフと同一視できるので、以下において、 A が E から E^* への多価写像であることを、 $A \subset E \times E^*$ と表す。

多価写像 $A \subset E \times E^*$ が、単調作用素 (monotone operator) であるとは、すべての $(x, x^*), (y, y^*) \in A$ に対して

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0$$

が成り立つときをいう。さらに、単調作用素 $A \subset E \times E^*$ が極大 (maximal) であるとは

$$B \subset E \times E^* \text{ が単調作用素で } A \subset B \text{ ならば } A = B$$

が成り立つときをいう。

$A \subset E \times E^*$ を極大単調作用素とする。 $z \in E$ に対して $0 \in Az$ が成り立つとき、 z を A の零点 (zero point) という。 A の零点を求める問題を A の零点問題といい、その解の集合を $A^{-1}0$ で表す。つまり、 $A^{-1}0 = \{z \in E : 0 \in Az\}$ である。 $A^{-1}0$ は閉凸であることが知られている [22]。また、 $r > 0$ に対して、 $L_r = (J + rA)^{-1}J$ とおく。 L_r は A のレゾルベント (resolvent) と呼ばれ、 E から E への一価写像であることが知られている^{*5}[17, 22]。さらに、 $z \in A^{-1}0$ であることと、 $z = L_r z$ となることは同値、つまり、 z が A の零点であることと、 L_r の不動点であることは同値になることが容易にわかる。

3 近接点法と零点の存在

本節では、定理 1.1 の結論 (1) に関連する結果を述べる。以下、 E を滑らか、狭義凸、回帰的な Banach 空間、 $A \subset E \times E^*$ を極大単調作用素とし、 A のレゾルベントを L_r などと表す。つまり、 $r > 0$ に対して $L_r = (J + rA)^{-1}J$ である。

まず、定理 1.1 の結論 (1) を Banach 空間の設定へ一般化した次の結果が知られている。

定理 3.1 ([10, 16]). $\{r_n\}$ を正の実数列とし、 $\inf_n r_n > 0$ を仮定する。さらに、 E の点列 $\{x_n\}$ を、 $x_1 = x \in E$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = L_{r_n} x_n \tag{3.1}$$

^{*4} E が Hilbert 空間のとき、一般化射影は距離射影 (metric projection) と一致する。

^{*5} このレゾルベント L_r は、定理 1.1 で用いたレゾルベントの一般化である。実際、 E が Hilbert 空間のとき、双対写像 J は恒等写像 I とみなすことができるので、 $L_r = (I + rA)^{-1}$ となる。

で定義する*⁶。このとき、 $\{x_n\}$ が有界であることと、 $A^{-1}0 \neq \emptyset$ であることは同値である。

定理 3.1 の仮定のもとで、零点の存在性から $\{x_n\}$ の有界性が得られることは文献 [10] で、その逆、点列 $\{x_n\}$ の有界性から零点の存在性が得られることは文献 [16] で示された。

文献 [6] では、定理 1.1 のさらなる一般化に成功し、次の結果を得た。

定理 3.2. $\{r_n\}$ を正の実数列とし、 $\sum_{n=1}^{\infty} r_n = \infty$ を仮定する。さらに、 E の点列 $\{x_n\}$ を、 $x_1 = x \in E$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して (3.1) で定義する。このとき、 $\{x_n\}$ が有界であることと、 $A^{-1}0 \neq \emptyset$ であることは同値である。

定理 3.2 は、次の定理の特別な場合である。

定理 3.3 ([6, Theorem 4.1]). C を空でない E の閉凸部分集合、 $A \subset E \times E^*$ を単調作用素*⁷とし

$$D(A) \subset C \subset \bigcap_{r>0} J^{-1}R(J+rA) \quad (3.2)$$

を仮定する*⁸。さらに、 C の点列 $\{x_n\}$ を、 $x_1 = x \in C$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} y_n &= L_{r_n}x_n; \\ x_{n+1} &= Q_C J^{-1}[\alpha_n Jx_n + (1 - \alpha_n)Jy_n] \end{cases}$$

で定義する*⁹。ここで、 $\{\alpha_n\}$ は $[0, 1]$ の数列、 $\{r_n\}$ は正の数列で、 $\limsup_n \alpha_n < 1$ および $\sum_{n=1}^{\infty} r_n = \infty$ を仮定する。このとき、 $\{x_n\}$ が有界であることと、 $A^{-1}0 \neq \emptyset$ であることは同値である。

定理 3.3 で、 A を極大単調作用素、 $\alpha_n \equiv 0$ とすれば、定理 3.2 が得られる*¹⁰。

この節の最後に、定理 3.3 の証明において重要な役割を果たした補助定理 (不等式) を紹介しておこう。

補助定理 3.4 ([6, Lemma 3.1]). C および A は定理 3.3 と同じとする。このとき、任意の $x, y \in C$ および $r, s > 0$ に対して

$$r\phi(L_r x, L_s y) + s\phi(L_s y, L_r x) + s\phi(L_r x, x) + r\phi(L_s y, y) \leq r\phi(L_r x, y) + s\phi(L_s y, x)$$

*⁶ このとき、 $L_{r_n}: E \rightarrow E$ であるから、 $\{x_n\}$ は well-defined である。

*⁷ ここでは、 A の極大性を仮定しない。

*⁸ ここで、 $D(A)$ は A の定義域、つまり、 $D(A) = \{y \in E : Ay \neq \emptyset\}$ である。また、 $R(J+rA)$ は $J+rA$ の値域、つまり、 $R(J+rA) = \bigcup_{y \in D(A)} (Jy + rAy)$ である。

*⁹ 各 L_{r_n} は C 上で定義されているので、 $\{x_n\}$ は well-defined である。

*¹⁰ $C = E$ として、(3.2) が成り立つ [17]。

が成り立つ。ここで、 ϕ は式 (2.1) で定義される実数値関数である。

4 近接点法の変形と強収束定理

この節では、極大単調作用素の零点の近似、特に、近接点法の変形アルゴリズムを用いた零点近似に関する強収束定理を述べる。

定理 1.1 の結論 (2) より、近接点法を使えば、零点へ弱収束する点列が得られるが、近接点法による点列は必ずしも強収束しないことが知られている [8]。そこで、零点へ強収束する点列を構成するには、別のアルゴリズムを用いるなどの工夫が必要である。

例えば、文献 [20] では、定理 1.1 と同じ設定のもとで、零点の集合を近似する閉半空間とその上への距離射影を用いることによって、強収束する点列を得ることに成功している。一方、[11] では、非拡大写像の不動点近似で用いられていた手法^{*11}を応用し、極めて単純な演算の繰り返しによって、強収束点列を得ることに成功している。

ここではまず、[11] の結果を Banach 空間の設定へ一般化した、文献 [13] の結果を紹介する。

定理 4.1 ([13, Theorem 3.3]). E を滑らか、一様凸な Banach 空間、 $\{r_n\}$ を正の実数列、 $\{\alpha_n\}$ を $[0, 1]$ の数列、 $A \subset E \times E^*$ を極大単調作用素とし、 $A^{-1}0 \neq \emptyset$, $r_n \rightarrow \infty$, $\alpha_n \rightarrow 0$ および $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ を仮定する。さらに、 E の点列 $\{x_n\}$ を、 $x_1 = x \in E$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = J^{-1}[\alpha_n Jx + (1 - \alpha_n)JL_{r_n}x_n] \quad (4.1)$$

で定義する。ここで、 $L_{r_n} = (J + r_n A)^{-1}J$ である。このとき、 $\{x_n\}$ は $Q_{A^{-1}0}(x)$ へ強収束する。

文献 [2] では、定理 4.1 と似た次の結果が得られた。

定理 4.2 ([2, Theorem 5.2]). E を一様 Gâteaux 微分可能なノルムをもつ、一様凸な Banach 空間、 $\{r_n\}$ を正の実数列、 $\{\alpha_n\}$ を $(0, 1]$ の数列、 $A \subset E \times E^*$ を極大単調作用素とし、 $A^{-1}0 \neq \emptyset$, $\inf_n r_n > 0$, $\alpha_n \rightarrow 0$ および $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ を仮定する。さらに、 E の点列 $\{x_n\}$ を、 $x_1 = x \in E$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して (4.1) で定義する。このとき、 $\{x_n\}$ は $Q_{A^{-1}0}(x)$ へ強収束する。

定理 4.1 と 4.2 を比べると

^{*11} 例えば、[9, 19]。

- 空間および $\{\alpha_n\}$ に対する仮定は、定理 4.1 の方が弱く、
- $\{r_n\}$ に対する仮定は、定理 4.2 の方が弱い

ことがわかる。つまり、これら二つの定理は、互いに独立した結果である。

定理 4.2 は、文献 [2] の主結果である次の定理の系である。

定理 4.3 ([2, Theorem 4.1]). E を一様 Gâteaux 微分可能なノルムをもつ、一様凸な Banach 空間、 C を E の空でない閉凸部分集合、 $\{S_n\}$ を C から E への写像の列、 F を $\{S_n\}$ の共通不動点の集合、 $\{\alpha_n\}$ を $(0, 1]$ の数列とし、 $F \neq \emptyset$, $\alpha_n \rightarrow 0$ および $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ を仮定する。 u を E の点とし、 E の点列 $\{x_n\}$ を、 $x_1 \in E$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = Q_C J^{-1}(\alpha_n J u + (1 - \alpha_n) J S_n x_n)$$

で定義する。さらに、以下を仮定する。

- $\{S_n\}$ は、強擬非拡大列 (strongly relatively nonexpansive sequence) である。
- $\{S_n\}$ は条件 (Z) を満たす。

このとき、 $\{x_n\}$ は $Q_F(u)$ へ強収束する。

定理 4.2 の仮定のもとで、 $\{L_{r_n}\}$ の共通不動点は $A^{-1}0$ であり、 $\{L_{r_n}\}$ は強擬非拡大列で、条件 (Z) を満たすので、定理 4.3 より、直ちに定理 4.2 が得られる。

参考文献

- [1] Y. I. Alber, *Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications*, Theory and applications of nonlinear operators of accretive and monotone type, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 178, Dekker, New York, 1996, pp. 15–50.
- [2] K. Aoyama, Y. Kimura, and F. Kohsaka, *Strong convergence theorems for strongly relatively nonexpansive sequences and applications*, J. Nonlinear Anal. Optim. **3** (2012), 67–77.
- [3] K. Aoyama, Y. Kimura, W. Takahashi, and M. Toyoda, *Approximation of common fixed points of a countable family of nonexpansive mappings in a Banach space*, Nonlinear Anal. **67** (2007), 2350–2360.
- [4] K. Aoyama, F. Kohsaka, and W. Takahashi, *Strong convergence theorems by*

- shrinking and hybrid projection methods for relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Proceedings of the Fifth International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (W. Takahashi and T. Tanaka Eds.), Yokohama Publ., Yokohama, 2009, pp. 7–26.
- [5] ———, *Strongly relatively nonexpansive sequences in Banach spaces and applications*, J. Fixed Point Theory Appl. **5** (2009), 201–225.
 - [6] ———, *Proximal point methods for monotone operators in Banach spaces*, Taiwanese J. Math. **15** (2011), 259–281.
 - [7] K. Aoyama and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for a family of relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Fixed Point Theory **8** (2007), 143–160.
 - [8] O. Güler, *On the convergence of the proximal point algorithm for convex minimization*, SIAM J. Control Optim. **29** (1991), 403–419.
 - [9] B. Halpern, *Fixed points of nonexpanding maps*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 957–961.
 - [10] S. Kamimura, F. Kohsaka, and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for maximal monotone operators in a Banach space*, Set-Valued Anal. **12** (2004), 417–429.
 - [11] S. Kamimura and W. Takahashi, *Approximating solutions of maximal monotone operators in Hilbert spaces*, J. Approx. Theory **106** (2000), 226–240.
 - [12] ———, *Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space*, SIAM J. Optim. **13** (2002), 938–945.
 - [13] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Strong convergence of an iterative sequence for maximal monotone operators in a Banach space*, Abstr. Appl. Anal. **2004** (2004), 239–249.
 - [14] ———, *Existence and approximation of fixed points of firmly nonexpansive-type mappings in Banach spaces*, SIAM J. Optim. **19** (2008), 824–835.
 - [15] ———, *Fixed point theorems for a class of nonlinear mappings related to maximal monotone operators in Banach spaces*, Arch. Math. (Basel) **91** (2008), 166–177.
 - [16] S. Matsushita and W. Takahashi, *The existence of zeros of monotone operators concerning optimization problems*, Sūrikaiseikikenkyūsho Kōkyūroku **1461** (2005), 40–46 (Japanese).

- [17] R. T. Rockafellar, *On the maximality of sums of nonlinear monotone operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **149** (1970), 75–88.
- [18] ———, *Monotone operators and the proximal point algorithm*, SIAM J. Control Optimization **14** (1976), 877–898.
- [19] N. Shioji and W. Takahashi, *Strong convergence of approximated sequences for nonexpansive mappings in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 3641–3645.
- [20] M. V. Solodov and B. F. Svaiter, *Forcing strong convergence of proximal point iterations in a Hilbert space*, Math. Program. **87** (2000), 189–202.
- [21] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis. Fixed Point Theory and its Applications*, Yokohama Publ., Yokohama, 2000.
- [22] ———, *Convex Analysis and Application of Fixed Points*, Yokohama Publ., Yokohama, 2000 (Japanese).