

定常過程に対する MA ブートストラップ

広島大学・大学院理学研究科 藤本 智博 (Tomohiro Fujimoto)
Graduate School of Science, Hiroshima University

広島大学・大学院理学研究科 井上 昭彦 (Akihiko Inoue)
Graduate School of Science, Hiroshima University

オリックス生命保険株式会社 清水 亮 (Ryo Shimizu)
ORIX Life Insurance Corporation

1 設定

これは、定常過程に対する MA ブートストラップの研究に関する我々の最近の結果の報告である。証明等の詳細については、別の場所で発表予定である。

$d \in \mathbb{N}$ とする。 $a \in \mathbb{R}^{d \times d}$ に対し、 $\|a\| := \sup_{u \in \mathbb{R}^d, |u|=1} |au|$ をそのスペクトル・ノルムとする。 平均 $\mu_X \in \mathbb{R}^d$ を持つ $\mathbb{R}^d$ -値の定常過程 $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ は MA (∞) 表現

$$X_k - \mu_X = \sum_{j=-\infty}^k \psi_{k-j} \epsilon_j, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (1.1)$$

により記述されるとする。ここで $\{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$ は $\mathbb{R}^{d \times d}$ -値の列で、次を満たすとする：

$$(A1) \quad \psi_0 = I_d,$$

$$(A2) \quad \sum_{j=0}^{\infty} j \|\psi_j\| < \infty,$$

$$(A3) \quad \Psi(z) := \sum_{j=0}^{\infty} z^j \psi_j \text{ は } \det \Psi(z) \neq 0 \ (z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1) \text{ を満たす.}$$

また、次も仮定する：

$$(A4) \quad \{\epsilon_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \text{ は } \mathbb{R}^d\text{-値の i.i.d. 確率ベクトル列で, } E[\|\epsilon_0\|^4] < \infty, E[\epsilon_0] = 0 \text{ および } E[\epsilon_0 \epsilon_0^T] > 0 \text{ を満たす.}$$

$X_1, \dots, X_n$ を $\{X_t\}$ からの標本とする。経験自己共分散関数 $\{\hat{\gamma}(j)\}$ を次の様に定義する：

$$\hat{\gamma}(j) := \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-j} (X_{k+j} - \bar{X}_n)(X_k - \bar{X}_n)^T, & j = 0, 1, \dots, n-1, \\ \frac{1}{n} \sum_{k=-j+1}^n (X_{k+j} - \bar{X}_n)(X_k - \bar{X}_n)^T, & j = -n+1, \dots, -1. \end{cases}$$

ここで、 $\bar{X}_n$ は次で定義される $X_1, \dots, X_n$ の標本平均である：

$$\bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k.$$

2 推定 MA 係数

標本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ のサイズ n が増加するにつれて増加する MA 次数 $p(n)$ を考える．ここで， $\{p(n)\}$ は $\mathbb{N}$ -値の数列で

$$p(n) \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

および

$$p(n) = o(n) \quad (n \rightarrow \infty)$$

を満たすとする．以下，簡単のため， $p(n)$ を p と書く．

$1 \ll n$ に対し，推定 AR 係数 $(\hat{\phi}_{1,n}, \hat{\phi}_{2,n}, \dots, \hat{\phi}_{n,n})$ を次の経験 Yule–Walker 方程式の解として定義する：

$$\sum_{j=1}^p \hat{\phi}_{j,n} \hat{\gamma}(i-j) = \hat{\gamma}(i), \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

推定 MA 係数 $\hat{\psi}_{k,n} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ ($k = 0, 1, \dots, p$) を次により定義する：

$$\hat{\psi}_{k,n} := \hat{v}_{k,n} \hat{v}_{0,n}^{-1}, \quad k = 0, \dots, p. \quad (2.1)$$

ここで，

$$\hat{v}_{k,n} := \hat{\gamma}(k) - \sum_{j=1}^p \hat{\gamma}(k+j) \hat{\phi}_{j,n}^T, \quad k = 0, \dots, p. \quad (2.2)$$

さらに，簡単のため，次のようにおく：

$$\hat{\psi}_{k,n} := 0, \quad k \geq p+1.$$

次の定理は [1, Theorem 3.2] の類似物である．

定理 2.1. (A1)–(A4) および $p(n) = O((n/\log n)^{1/4})$ ($n \rightarrow \infty$) を仮定する．すると次を満たす確率変数 n_1 が存在する：

$$\sup_{n \geq n_1} \sum_{j=0}^{\infty} j \|\hat{\psi}_{j,n}\| < \infty \quad \text{almost surely.}$$

次の定理は [1, Theorem 3.1] の類似物である．

定理 2.2. (A1)–(A4) および $p(n) = O((n/\log n)^{1/2})$ ($n \rightarrow \infty$) を仮定する．すると，次が成り立つ：

$$\sup_{0 \leq j < \infty} \|\hat{\psi}_{j,n} - \psi_j\| = o(1) \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{almost surely.}$$

3 MA ブートストラップ

n が増加するにつれて増加する $q(n)$ を考える. ここで, $\{q(n)\}$ は $\mathbb{N}$ -値の数列で

$$q(n) \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

および

$$q(n) = o(n) \quad (n \rightarrow \infty)$$

を満たすとする. 以下, 簡単のため, $q(n)$ を q と書く.

定義 1. (1.1) の $\{\epsilon_k\}_{k=q+1}^n$ の推定値として, $\sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$ -可測な $n - q$ 個の確率変数 $\{\hat{\epsilon}_{k,n}\}_{k=q+1}^n$ が得られているとする. これらを

$$\tilde{\epsilon}_{k,n} := \hat{\epsilon}_{k,n} - \frac{1}{n-q} \sum_{j=q+1}^n \hat{\epsilon}_{j,n}, \quad k = q+1, \dots, n$$

と中心化し, $\{\tilde{\epsilon}_{k,n}\}_{k=q+1}^n$ の経験分布

$$\frac{1}{n-q} \sum_{k=q+1}^n \delta_{\tilde{\epsilon}_{k,n}}$$

の分布関数を $\hat{F}_{\epsilon,n}$ と表す. $\{\tilde{\epsilon}_{t,n}\}$ のリサンプリング $\{\epsilon_t^*\}_{t \in \mathbb{Z}}$ を

$\{\epsilon_t^*\}$ は i.i.d. でかつ各 ϵ_t^* の分布は $\hat{F}_{\epsilon,n}$ に従う

ように取る. 観測データ $X_1, \dots, X_n$ のリサンプリング $\{X_t^*\}_{t \in \mathbb{Z}}$ を, 次の近似移動平均表現に従い構成する:

$$X_t^* = \bar{X}_n + \sum_{j=0}^p \hat{\psi}_{j,n} \epsilon_{t-j}^* \quad (t \in \mathbb{Z}). \quad (3.1)$$

以上の構成によるブートストラップを **MA ブートストラップ** とよぶ.

MA ブートストラップは, 標本 $X_1, \dots, X_n$ による条件付確率 P^* を導く. P^* に関する量を $*$ をつけて書く.

$\{\hat{\epsilon}_{k,n}\}_{k=q+1}^n$ に対し, 次の 2 つの性質を仮定する:

(B1) 任意の $\xi \in \mathbb{R}^d$ に対し, $E^*[(\xi^T \epsilon_t^*)^2] = E[(\xi^T \epsilon_t)^2] + o_P(1) \quad (n \rightarrow \infty)$.

(B2) $n \rightarrow \infty$ のとき, $\epsilon_t^* \xrightarrow{d^*} \epsilon_t \quad (n \rightarrow \infty)$ in probability.

注意 3.1. (B2) をもっと明示的に書くと次の通りである: 任意の $\xi \in \mathbb{R}^d$ と $x \mapsto P(\xi^T \epsilon_t \leq x)$ の任意の連続点 x に対し,

$$P^*(\xi^T \epsilon_t^* \leq x) = P(\xi^T \epsilon_t \leq x) + o_P(1) \quad (n \rightarrow \infty).$$

定義 2. 推定値 $\{\hat{\epsilon}_{k,n}\}_{k=q+1}^n$ が次の近似 AR 方程式により与えられる場合を考える：

$$\hat{\epsilon}_{k,n} = \sum_{j=0}^q \hat{\phi}_{j,n} (X_{t-j} - \bar{X}_n). \quad (3.2)$$

ただし、 $q = p$ とする．この場合の MA ブートストラップを部分 MA ブートストラップとよぶ．

次は [2, Lemmas 5.3 and 5.4] の多次元への拡張であり，証明も同様である．

定理 3.2. (A1)–(A4) および $p(n) = q(n) = o((n/\log n)^{1/2})$ を仮定する．すると，(3.2) で決まる $\{\hat{\epsilon}_{k,n}\}_{k=q+1}^n$ は，(B1) と (B2) を満たす．

定理 2.1 と定理 2.2 および仮定 (B1)，(B2) を用いると，AR ブートストラップに対する結果 [2, Lemma 5.5] (の多次元版) に対して，次の MA 類似を証明することができる．

定理 3.3. (A1)–(A4)，(B1)，(B2) および $p(n) = O((n/\log n)^{1/2})$ ($n \rightarrow \infty$) を仮定する．すると次が成り立つ：

$$X_k^* \xrightarrow{d^*} X_k \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{in probability.}$$

定義 3. MA(p) 表現の変形

$$\varepsilon_k = X_k - \bar{X}_n - \sum_{l=1}^p \hat{\psi}_{l,n} \varepsilon_{k-l}$$

と初期値 $\varepsilon_k = 0$ ($k = 0, \dots, p-1$) を用いて， ε_k ($k = p, \dots, n$) を求めることにより，推定値

$$\hat{\epsilon}_{k,n} = \varepsilon_k, \quad k = p+1, \dots, n$$

を定める．ただし， $q = p$ とする．この $\{\hat{\epsilon}_{k,n}\}_{k=p+1}^n$ による MA ブートストラップを完全 MA ブートストラップとよぶ．

完全 MA ブートストラップは，次節のシミュレーションの結果から分かるように，ブートストラップとしてよい性質を持つ．しかし，完全 MA ブートストラップの $\{\hat{\epsilon}_{k,n}\}_{k=p+1}^n$ に対しては，まだ (B1) と (B2) の性質は証明はされておらず，open problem である．

4 シミュレーション

ここでは，[1] による AR ブートストラップ，前節の部分ブートストラップおよび完全 MA ブートストラップに対するシミュレーションの結果を比較する．

以下のシミュレーションでは， $d = 1$ とし， $\sigma_n^2 = \text{var}(T_n)$ の推定を行う．ただし，

$$T_n = \text{median}\{X_1, \dots, X_n\}$$

であり，サンプルサイズ n は 512 とする．次のモデルについてシミュレーションを行う：

(M1) AR(15), $X_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{15} \phi_j X_{t-j}$, $\phi_j = (-1)^{j+1} 7.5/(j+1)^3$ ($j = 1, \dots, 15$).

(M2) MA(15), $X_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{15} \sigma_j \varepsilon_{t-j}$, $\sigma_j = (-1)^{j+1} 1.5/(j+1)^3$ ($j = 1, \dots, 15$).

(M3) ARMA(2, 15), $X_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^2 \phi_j X_{t-j} + \sum_{j=1}^{15} \sigma_j \varepsilon_{t-j}$,
 $\phi_j = (-1)^{j+1} 7.5/(j+1)^3$, ($j = 1, 2$), $\sigma_j = (-1)^{j+1} 1.5/(j+1)^3$ ($j = 1, \dots, 15$).

(M4) ARMA(10, 10), $X_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{10} \phi_j X_{t-j} + \sum_{j=1}^{10} \sigma_j \varepsilon_{t-j}$,
 $\phi_j = (-1)^{j+1} 5.5/(j+1)^5$, ($j = 1, \dots, 10$), $\sigma_j = (-1)^{j+1} 1.5/(j+1)^2$ ($j = 1, \dots, 10$).

(M5) MA(6), $X_t = \varepsilon_t + 0.1\varepsilon_{t-2} - 0.3\varepsilon_{t-6}$.

ただし, (M1) から (M4) に対しては

$$\varepsilon_t \text{ i.i.d. } \sim N(0, 1)$$

とし, (M5) に対しては

$$\varepsilon_t \text{ i.i.d. } \sim 0.95N(0, 1) + 0.05N(0, 100)$$

とする. また, 次のモデルについてもシミュレーションを行う:

(M6) ARFIMA(0, -0.25, 0).

分散 σ_n^2 は 1000 回のシミュレーションから求める. ブートストラップによる推定は次のように行う:

- (a) 標本を発生させ, 有限近似次数 p を AIC を最小にする $0 \leq p \leq 10 \log_{10} n$ から選ぶ. ただし, AR および 部分 MA ブートストラップの場合には AR モデルに対する AIC を用い, 完全 MA ブートストラップの場合には MA モデルに対する AIC を用いる.
- (b) リサンプリング $X_1^*, \dots, X_n^*$ を発生させ $T_n^* = \text{median}\{X_1^*, \dots, X_n^*\}$ を計算する.
- (c) (b) を 300 回行い, 300 個の T_n^* から $(\sigma_n^2)^* = n\text{var}^*(T_n^*)$ を計算する.
- (d) (a) から (c) を 100 回行い $E[(\sigma_n^2)^*]$ と $SD((\sigma_n^2)^*)$ を求める.

シミュレーションの結果は表 1 から 3 のようになった. これらから次のようなことが見て取れる.

- (1) 一般に, MA ブートストラップは, $SD((\sigma_n^2)^*)$ の値が AR ブートストラップよりも小さな値をとる傾向にあるという利点を持つ.
- (2) (M3) の ARMA(2, 15) モデルに対しては, MA ブートストラップの方が AR ブートストラップよりも良い結果を与えている.

- (3) 一方で (M1) の AR モデルに対しては，部分 MA ブートストラップは AR ブートストラップと比較して，大きく異なる値を推定してしまっているという点で劣ってしまう．
- (4) モデル (M2), (M5) の MA モデルに対する結果を見ると，ノイズが正規か否かにかかわらず，いずれも同程度の良い推定値を与えている．
- (5) 完全 MA ブートストラップにおいては，(M3) のようなモデルでは他の 2 つよりも良い結果が得られ，他の場合でも同程度の結果が得られている．

	σ_n^2	$E[(\sigma_n^2)^*]$	$SD((\sigma_n^2)^*)$
$n = 512$			
(M1)	16.4	17.2	4.3
(M2)	1.7	1.9	0.4
(M3)	13.4	14.0	3.5
(M4)	3.1	3.1	0.9
(M5)	1.5	1.4	0.3
(M6)	0.7	1.0	0.2

表 1: AR ブートストラップ

	σ_n^2	$E[(\sigma_n^2)^*]$	$SD((\sigma_n^2)^*)$
$n = 512$			
(M1)	16.4	10.6	3.1
(M2)	1.7	1.8	0.3
(M3)	13.4	13.1	3.0
(M4)	3.1	2.8	0.7
(M5)	1.5	1.6	0.4
(M6)	0.7	0.9	0.2

表 2: 部分 MA ブートストラップ

参考文献

[1] BÜHLMANN, P. (1995). Moving-average representation of autoregressive approximations. *Stochastic Process. Appl.* **60** 331–342.

[2] BÜHLMANN, P. (1997). Sieve bootstrap for time series. *Bernoulli* **3** 123–148.

	σ_n^2	$E[(\sigma_n^2)^*]$	$SD((\sigma_n^2)^*)$
$n = 512$			
(M1)	16.4	14.9	3.7
(M2)	1.7	1.9	0.4
(M3)	13.4	13.7	2.8
(M4)	3.1	3.0	0.6
(M5)	1.5	1.6	0.4
(M6)	0.7	0.9	0.2

表 3: 完全 MA ブートストラップ