

間欠的のり移りと揺らぎスペクトル

九大理 柴田博史 藤坂博一 森 肇

I. はじめに

目標

間欠的にいくつかの状態をのり移る時系列の統計的特徴をとらえる。

(例) ロジステックマップ, 強制振子, ダフィング方程式, ヘノンマップ, スタンダードマップ etc.

(解析の手段)

n-state model

連分数展開法

II. 揺らぎスペクトルと時間相関

粗視化された物理量の導入と取り扱う関数の構造

$$\xi_n(X_0) = (1/n) \sum_{i=0}^{n-1} u(X_i)$$

$$M_q(n) \equiv \langle \exp[q n \xi_n(X_0)] \rangle \\ = Q_q(n) e^{n \phi(q)}$$

$$(\phi(q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln M_q(n))$$

$$\xi(q) = \frac{\partial \phi(q)}{\partial q}$$

$$\psi(\xi) = \max_q (\xi q - \phi(q))$$

$$P(\xi; n) \equiv \langle \delta(\xi_n(X_0) - \xi) \rangle \\ \propto e^{-n \psi(\xi)}$$

散逸系では、一般に次のようなスケーリング則がなりたつ。

$$\phi(q) = \kappa \bar{\phi}(q/\kappa)$$

$$\xi(q) = \bar{\xi}(q/\kappa)$$

$$\psi(\xi) = \kappa \bar{\psi}(\xi)$$

 κ : 遷移確率

$$Q_q(n) = J_q^{(0)} + \sum' J_q^{(l)} \exp[-(i\omega_q^{(l)} + \gamma_q^{(l)})n]$$

$$\gamma_q = \kappa \bar{\gamma}(q/\kappa)$$

$$\omega_q = \kappa \bar{\omega}(q/\kappa)$$

 $\psi(\xi) \cdots$ 揺動スペクトル $Q_q(n) \cdots q$ 次相関関数

III. 具体的計算

(例) ロジスティックマップの3バンドクライシス直後

$$X_{n+1} = f(X_n) = a - X_n^2, \quad a > a_c = 1.79032 \dots$$

3回イテレート写像は、3つの状態をのりうつる。

a) 直接数値シミュレーション

$$M_q(n) = \langle e^{q \sum_{i=1}^n \xi_i} \rangle$$

$$(\xi_n(X_0) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} X_{3i})$$

$$\phi(q) = \frac{1}{n} \ln M_q(n), \quad \xi(q) = \frac{\partial \phi(q)}{\partial q}$$

nとしては1500ぐらい、アンサンブル数は、 10^7 ぐらいとる。

b) 3-state model

 $\phi(q), Q_q(n)$: 一般化遷移行列 T_q の固有値で決まる。

近似A

$$T_q = \begin{pmatrix} (1-\kappa)e^{q\xi_1} & 0 & \kappa e^{q\xi_3} \\ \kappa e^{q\xi_1} & (1-\kappa)e^{q\xi_2} & 0 \\ 0 & \kappa e^{q\xi_2} & (1-\kappa)e^{q\xi_3} \end{pmatrix}$$

$$\bar{\psi}(\xi) = \left(\frac{1}{z^3 + az + b} \right)^{1/3} \{ \xi - (z+c) \} + 1$$

$$z = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 3(\xi - c)\{a(\xi - c) + 3b\}}}{3(\xi - c)}$$

近似B

$$T_q = \begin{pmatrix} \{1 - (h_{21} + h_{31})\kappa\}e^{q\xi_1} & h_{12}\kappa e^{q\xi_2} & h_{13}\kappa e^{q\xi_3} \\ h_{21}\kappa e^{q\xi_1} & \{1 - (h_{12} + 1)\kappa\}e^{q\xi_2} & h_{23}\kappa e^{q\xi_3} \\ h_{31}\kappa e^{q\xi_1} & \kappa e^{q\xi_2} & \{1 - (h_{13} + h_{23})\kappa\}e^{q\xi_3} \end{pmatrix}$$

c) 連分数展開法 (2極近似)

 $M_q(n)$ をラプラス変換したものの連分数展開の打ち切りからでる極より $\phi(q), \gamma_q$ を求める。

A). 完全に数値的な方法

B). $|q| \ll 1$ として、2極近似より導出される極を与える2次方程式の各係数を κ で展開。係数は数値的に求める。

$$\bar{\phi}(y) = \sqrt{a_1 + a_2 y + a_3 y^2} + a_4 + a_5 y$$

$$\bar{\gamma}(y) = 2\sqrt{a_1 + a_2 y + a_3 y^3}$$

(a_i : オーダー1の定数)

IV. まとめ

散逸系では、n-state model あるいは、連分数展開が成功しているように思われる。

ハミルトン系では、一般化遷移行列のような行列を使つてのマルコフモデルが成立しない。なにか別の方法が必要。

1) H. Shibata, H. Fujisaka and H. Mori, submitted to Physica D.