

ある Dirichlet 級数について

慶大理工, 江上 繁樹

0. $x > 0$ に対して, $[x]$ で Gauss の整数部をあらわす.

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\sqrt{n}]}{n^s} \quad (\operatorname{Re} s > \frac{3}{2})$$

の解析接続の問題が [1] において述べられている. 筆者は [2] において, $f(s)$ は全平面に有理型に解析接続されることを示したが, ここでは一つの別証明を述べる.

1. r を自然数とし.

$$g_r(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^r t} \quad (t > 0)$$

とおく.

$$g_1(t) = \frac{1}{e^t - 1}$$

であり, $r=2$ のときには π - $\sqrt{x}$ 級数であることに注意する.

逆 Mellin 変換により.

$$g_r(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \Gamma(s) \zeta(rs) t^{-s} ds$$

積分路を左に移動することにより、容易に次を得る

Lemma. 任意の $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ に対し

$$\varphi_r(t) = r \cdot \Gamma\left(\frac{1}{r}\right) t^{-\frac{1}{r}} + \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n}{n!} \zeta(rn) t^n + O(t^{k+1-\varepsilon})$$

($t \rightarrow 0$)

2. $f(s)$ を一般化して証明を行う. $r \in \mathbb{N}$ に対し

$$f_r(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(m^r + n)^s}$$

とあくと. $f_r(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[n^{\frac{1}{r}}]}{n^s}$ であるから $\operatorname{Re} s > 1 + \frac{1}{r}$ で収束する. ($f_2(s) = f(s)$)

$$\begin{aligned} g_r(s) &= f_r(s) - \zeta(rs) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(m^r + n)^s} \end{aligned}$$

を $\mathbb{F}_s$ における積分.

$$\begin{aligned} g_r(s) \Gamma(s) &= \int_0^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(m^r + n)t} \right) t^{s-1} dt \\ &= \int_0^{\infty} \varphi_1(t) \varphi_r(t) t^{s-1} dt \quad \text{—————} (*) \end{aligned}$$

(*) の解析接続のためには

$$\int_0^1 \varphi_1(t) \varphi_r(t) t^{s-1} dt$$

を与えれば十分である。Lemma 1 により

$$\varphi_1(t) \varphi_r(t) = \sum_{n=1}^N A_n t^{\alpha_n} + O(t^{\alpha_{N+1}-\varepsilon})$$

$$(\alpha_1 = 1 + \frac{1}{r} < \alpha_2 < \dots, \quad \alpha_j \in \mathbb{Z} + \frac{1}{r}\mathbb{Z}).$$

従って

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \varphi_1(t) \varphi_r(t) t^{s-1} dt \\ &= \sum_{n=1}^N A_n \int_0^1 t^{s+\alpha_n-1} dt + \int_0^1 R_N(t) t^{s-1} dt, \quad \text{--- (**)} \end{aligned}$$

$$t \rightarrow t+L. \quad R_N(t) = \varphi_1(t) \varphi_r(t) - \sum_{n=1}^N A_n t^{\alpha_n}.$$

(**) の第 1 項は有理関数, 第 2 項は $\operatorname{Re} s > -\alpha_{N+1} + \varepsilon$

で正則であるから, $g_r(s) P(s)$ が全平面に有理型に解析接続されることかわかる. (証明終)

Remark. この証明法は P. Cassou-Nogues [3] に依り従う.

(Lemma の証明は少し異なる). また, 結果自身も [3] の一般論

に含まれる. ここでは $\sum_{(m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{N}^r} P(m_1, \dots, m_r)^{-s}$ の形の Dirichlet

級数 $(P(\cdot))$ はある条件をみたす多項式 $(\cdot)$ の解析接続が Lemma に相当する結果を Euler-Maclaurin の公式を用いて示すことにより証明されている。また講演後、岡山大鹿野先生から Hardy-Littlewood の研究の中でも同様の級数が扱われているとの御教示を頂いた。

[1] 三井孝美, 行列の分割問題に現れる特殊関数について, 日本数学会代数分科会 (1982, 三重) 講演アブストラクト

[2] S. Egami, On the analytic continuation of certain Dirichlet series, Comm. Math. Univ.

[3] P. Cassou-Noguès, Prolongement de certaines séries de Dirichlet, Amer. J. Math. (1983) pp. 13-58

—————, Valeurs aux entiers négatifs de séries de Dirichlet associées à un polynôme I , J. Number Theory 14 (1982), pp. 32-64