

Part について

奈良高専 貴志 一男

§1. 序

二つの事を述べる. A を compact Hausdorff 空間 X 上の function algebra (または uniform algebra), $M(A)$ を A の maximal ideal space とする. $M(A)$ の任意の元 φ に対して, X 上の確率測度で $\varphi(f) = \int f dm$ ($\forall f \in A$) なる m (φ の表現測度という) が一意に決まるとする. A の $L^p(m)$ ($1 \leq p \leq \infty$) における closure ($p = \infty$ のときは w^* -closure) といて, 抽象的 Hardy 空間 $H^p(m)$ を定義したとき, これらの空間と単位円上の古典的 Hardy 空間 $H^p(d\theta)$ との間にはどのような関係があるか, G. Lumer [12] (abstract のみ發表されて "ふつて略証" をつケ), S. Merrill [13, 14] を中心にして考えてみる.

次に, B を compact Hausdorff 空間 X 上の function space としたとき, H. S. Bear [1] は Harnack の不等式を使って, function algebra における Gleason part を拡張した形で,

part を定義し, part metric なる概念を導入したが, これらは更に線形 (位相) 空間の convex 集合に拡張し, 研究される。ここではその一部 [1, 2, 3, 4] を紹介する。

§2 抽象的 Hardy 空間 $H^p(m)$ と複素平面の単位円上の古典的 Hardy 空間 $H^p(d\theta)$ との関係

1°) G. Lumer [12] を中心にして.

A を compact Hausdorff 空間 X 上の function algebra とする。すなわち $C(X)$ の uniformly closed subalgebra で定数関数を含み, X の点と分離し且つ sup norm を持つものとする。特に, $A_R = \{ \operatorname{Re} f : f \in A \}$ は $C_R(X)$ で dense であるとき, A は Dirichlet algebra という。また $\log \|A^{-1}\|$ ($A^{-1} = \{ f : f \in A \text{ and } 1/f \in A \}$) は $C_R(X)$ で dense であるとき, A は logmodular algebra という。 A の maximal ideal 空間を $M(A)$, A の Gelfand 表現を $\hat{A}$ と書く。 $\varphi \in M(A)$ に対して X 上の確率測度 m_φ で $\varphi(f) = \int f dm_\varphi$ ($\forall f \in A$) なるものが存在するが, この m_φ を φ の表現測度と呼び, φ の表現測度の全体を M_φ と書く。すべての $\varphi \in M(A)$ に対して M_φ は唯一点からなること, A は URM (unique representing measure)

という。 A は dirichlet algebra または logmodular algebra のとき $\forall R M$ である。このとき $\varphi \in M(A)$ とその表現測度とを同一視する事にする。 $m \in M(A)$ を固定し、 m に関する A の $L^p(m)$ closure ($p=\infty$ のときは w^* -closure) を $H^p(m)$ と書いて Hardy 空間という。 $H^\infty(m)$ の Gelfand 表現 $\hat{H}^\infty$ の Šilov boundary は $M(L^\infty(m)) = \hat{X}$ であり、 $\hat{H}^\infty$ は $\hat{X}$ 上の $\mathcal{H}$ であり、 logmodular algebra である。 また $L_R^\infty = \log |(H^\infty)^{-1}|$ または、 $(\hat{X}) = \log |(\hat{H}^\infty)^{-1}|$ である。

定理 2.1 $\varphi \in M(H^\infty)$ とする。

$\varphi \in M(L^\infty) \iff |\varphi(\gamma)|=1$ for every inner function $\gamma \in H^\infty(m)$.

($| \gamma | = 1$ (a.e.-dm) なる $\gamma \in H^\infty(m)$ を inner function とする。)

証明. ($\Rightarrow$) $\gamma \bar{\gamma} = 1$ かつ $\varphi(\gamma) \overline{\varphi(\gamma)} = 1$

($\Leftarrow$) $L_R^\infty = \log |(H^\infty)^{-1}|$ を使って、 [10] (pp. 177-180) と

同様に出る。 //

系 2.2 $H^p(m)$ ($1 \leq p \leq \infty$) はすべて定数関数のみからなるか、または $H^\infty(m)$ に属する定数でない inner function が存在する。

証明 $H^p(m) = \{\text{const.}\} \iff H^\infty(m) = \{\text{const.}\}$. $H^\infty(m) \neq \{\text{const.}\}$

とする。いま、 $f = u + i v \in H^\infty(m)$ を定数でないとする、 u

も v も定数でない。 ($\because H^\infty(m) \cap H_R^\infty(m) = \{\text{const.}\}$). $m \in M(H^\infty)$

であるが $m \notin M(L^\infty)$ (∵ $u \in M(L^\infty)$ ならば H^∞ , $u = \frac{1}{2}(f + \bar{f}) \in L^\infty$ であるから, $\int u^2 dm = \int u dm \int u dm = (\int u dm)^2$ にならねば, u は定数にならねば) かつ, $H(H^\infty) \not\subset M(L^\infty)$. さて, $H^\infty(m)$ に属する inner function はすべて定数であるとするとき, 定理から, $M(H^\infty) = M(L^\infty)$ となり矛盾する //

$J \in H^\infty(m)$ の定数でない inner function とする. $\int J dm = \alpha$ とすると, $|\alpha| < 1$. (∵ $|\alpha| = 1$ とすると, $\int |J - \alpha|^2 dm = 0$ より $J = \alpha$ a.e.-dm 矛盾) そこで $J' = \frac{\alpha - J}{1 - \bar{\alpha}J}$ とすると, $|J'| = 1$, $\int J' dm = 0$. (したがって, $H^\infty(m)$ に属する inner function J で定数でない $\int J dm = 0$ なるものがあると仮定してよい).

$d\theta$ は複素平面上の単位円上の normalized Lebesgue measure, $H^p(d\theta)$ ($1 \leq p \leq \infty$) は Banach 空間 ($p = \infty$ のときは Banach algebra) と考えられるところの classical Hardy 空間とする.

定理 2.3 $H^\infty(m)$ に属する定数でない inner function J で, $\int J dm = 0$ となるものがあると仮定する. $1 \leq p \leq \infty$ とする.

対応

$$(\#) \quad \sum_{n=-k}^k a_n e^{in\theta} \longrightarrow \sum_{n=-k}^k a_n J^n$$

は, $L^p(d\theta)$ から $\text{sp}\{J^n\}$ (n : 整数) の $L^p(m)$ -closure $L^p(m)$ ($p = \infty$ のときは w^* -closure) への isometric isomorphism T .

1. 拡張定理 2.

また, $\mathcal{A}_p\{J^n\}$ ($n \geq 0$) の $L^p(m)$ -closure ($p = \infty$ のときは w^* -closure) を $\mathcal{H}^p(m)$ で表わすと, T は $H^p(d\theta)$ から $\mathcal{H}^p(m)$ 上への isometric isomorphism である.

$p = \infty$ のときは, T は algebra isomorphism である.

証明. $f \in L^p(d\theta)$ ($1 \leq p \leq \infty$) とする. f の T -イテ級数の Cesaro means は f に $L^p(d\theta)$ -norm ($p = \infty$ のときは w^* -topology) で収束する.

さて, $p(\lambda) = \sum_{n=-k}^k a_n \lambda^n$ とする.

$$\int P^n(e^{i\theta}) \overline{P^n(e^{i\theta})} d\theta = \int P^n(J) \overline{P^n(J)} dm$$

よって, $p = 2n$ (偶数) のとき, (†) は求める isometric isomorphism T に拡張される.

$f \in L^\infty(d\theta)$ とする. Tf は $p = 2n$ の n に依らずに決まる.

$$\therefore \|Tf\|_\infty = \lim \|Tf\|_{2n} = \lim \|f\|_{2n} = \|f\|_\infty.$$

よって, T は $L^\infty(d\theta)$ 上でも isometry である.

Riesz convexity theorem によって, $\|T\|_p \leq 1$ ($2 \leq p \leq \infty$).
同様にして, $\|T^{-1}\|_p \leq 1$. $\therefore \|Tf\|_p = \|f\|_p$, $\forall f \in L^p(d\theta)$, $2 \leq p \leq \infty$.

次に, $1 \leq p < 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ とする. 任意の多項式 $P(e^{i\theta})$ に対して,
 $\|P(e^{i\theta})\|_p = \sup \left| \int P(e^{i\theta}) \overline{Q(e^{i\theta})} d\theta \right|$
ただし $\sup$ は (1) ... $\int |Q(e^{i\theta})|^q d\theta \leq 1$ なるすべての

多項式. また, $\|p(\gamma)\|_p = \sup \left| \int p(\gamma) \bar{q}(\gamma) d\mu \right|$, したがって

$$\sup_p \text{ は } (2) \dots \int |q(\gamma)|^2 d\mu \leq 1 \text{ なる } q \in C \text{ の多項式.}$$

(注意. $Q(\gamma)$ は $L^2(m)$ へ一般にはは dense ではないが, $L^2(m)$ の単位球の σ -閉包の Q としても $\sup$ に影響ない).

$p > 2$ であるから, (1) と (2) とは同値である. よって,

(H) は $1 \leq p \leq \infty$ なるすべての p について, isometric isomorphism

Γ に拡張出来る. その他の部分については, 容易に証明出来る. //

2°) S. Merrill [13, 14] が中心に 1 である.

function algebra A の maximal ideal 空間 $M(A)$ の二元 φ_1, φ_2 に対して

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\| = \sup \{ |\varphi_1(f) - \varphi_2(f)| : f \in A, \|f\| \leq 1 \}$$

とおき,

$$\varphi_1 \sim \varphi_2 \iff \|\varphi_1 - \varphi_2\| < 2$$

によつて, $\sim$ を定義すると, $\sim$ は同値関係と満足する[8].

$$\Sigma(\varphi) = \{ \varphi' \in M(A) : \varphi \sim \varphi' \}$$

を φ を通る (Gleason) part といい. $\Sigma(\varphi) \neq \{\varphi\}$ のとき,

$\Sigma(\varphi)$ を nontrivial part といい.

定理 2.4 次の3つの条件は同等である. [7]

$$(1) \quad \varphi_1 \sim \varphi_2$$

$$(2) \quad \sup \{ |\varphi_1(f)| : f \in A, \|f\| \leq 1, \varphi_2(f) = 0 \} < 1$$

$$(3) \quad M_{\varphi_1} \rightarrow \exists \mu, \quad M_{\varphi_2} \rightarrow \exists \nu, \quad d\mu \leq c d\nu, \quad d\nu \leq c d\mu \quad \text{とある定数 } c \text{ が存在する.}$$

$A \in \text{URM}$, $P \in M(A)$ の nontrivial part とする.

$m, \rho \in P$ とすると, $dm \leq c d\rho$, $d\rho \leq c dm$ となる $c (\geq 1)$ が存在する. よって, $H^p(m)$ と $H^p(\rho)$ とは測度, 集合としては同じで, (ゆえに, 単に H^p と書くことがある) Banach 空間としては異なるが同値な norm をもつ.

$m \in P$ を固定する. 不等式 ($g \in A$)

$$|\int g d\rho| = |\rho(g)| = |\int g d\rho| = (\int |g|^p d\rho)^{1/p} \leq K (\int |g|^p dm)^{1/p}$$

(K は定数) を使って, ρ は $H^p(m)$ の有界な linear functional に一意に拡張される. 故に algebra $H^\infty(m)$ に拡張した全体は $M(H^\infty)$ において nontrivial な part となる.

Wermer の定理 [18, I, 11].

ある inner function $Z \in H^\infty(m)$ が存在して,

$$ZH^2 = H_m^2, \quad H_m^2 = \{f \in H^2, \int f dm = 0\}$$

となり, D を複素平面内の開単位円板とすると,

$\hat{Z} : P \rightarrow D$ は one-to-one, onto である. また

その逆 $\tau = \hat{Z}^{-1} : D \rightarrow P$ は one-to-one, onto の連続で

ある. $\forall f \in H^2(m)$ は $(\hat{f} \cdot \tau)(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$, $a_n = \int \bar{z}^n f dm$
と展開できて, D で正則な関数 $\hat{f} \cdot \tau$ を得る.

さて, Lumer の定理 2.3 を $J = Z$ として応用する.

$1 \leq p \leq \infty$ のとき, 対応 T は $H^p(d\theta)$ を $\mathcal{A}_p\{Z^n\}_{n \geq 0}$ の $L^p(m)$ closure $JH^p(m)$ ($p = \infty$ のときは w^* -closure) に isometric isomorphic に移す. さて, これから

$$\underline{H^p(m) = JH^p(m) \text{ となる条件}}$$

を求めていく. $H^2(m) = JH^2(m) \oplus (JH^2(m))^{\perp}$ (直交分解) とする.

補題 2.5 次の3つの条件は同等である.

- (1) $f \in (JH^2(m))^{\perp}$
- (2) $a_n = \int \bar{z}^n f dm = 0 \quad (\forall n \geq 0)$
- (3) $\hat{f}(\rho) = 0, \quad \forall \rho \in P$

証明 (1) $\Leftrightarrow$ (2) は明らか. (2) $\Rightarrow$ (3): $\hat{f}(\rho) = \sum a_n \lambda^n$,
 $a_n = \int \bar{z}^n f dm$, $\lambda = \hat{z}(\rho)$ より明らか. (3) $\Rightarrow$ (2):
 $\hat{f}(\rho) = \sum a_n \lambda^n = 0, \quad \forall \lambda \in \{|\lambda| < 1\} \quad \therefore a_n = 0 \quad //$

特に,

$$f \in H^{\infty}(m), \quad \hat{f}(\rho) = 0, \quad \forall \rho \in P \Rightarrow f \equiv 0 (dm) \quad \text{と}$$

$$f \in H^{\infty}(m), \quad \int \bar{z}^n f dm = 0 \quad (\forall n \geq 0) \Rightarrow f \equiv 0 (dm)$$

とは同等である. ここに関連して, 次の事が成り立つ.

補題 2.6 次の (1), (2) は同等である

$$(1) \quad f \in H^\infty(m), \quad a_n = \int \bar{z}^n f dm = 0 \Rightarrow f \equiv 0 \quad (dm)$$

$$(2) \quad f \in H^1(m), \quad a_n = \int \bar{z}^n f dm = 0 \Rightarrow f \equiv 0 \quad (dm)$$

これから, $\{z^n\}_{n \geq 0}$ は $H^p(dm)$ で $L^p(m)$ dense ($p = \infty$ のときは w^* -dense) である事は p に依存しない。よって,

$$\left[f \in H^\infty(m), \hat{f}(p) = 0 \quad (\forall p \in P) \Rightarrow f \equiv 0 \quad (dm) \right] \Leftrightarrow H_f^p(m) = H^p(m), \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

定理 2.7 次の (1), (2) は同等である。

$$(1) \quad f \in H^\infty(m), \quad \hat{f}(p) = 0, \quad \forall p \in P \Rightarrow f \equiv 0 \quad (dm)$$

$$(2) \quad H^\infty(m) \text{ は } L^\infty \text{ の } w^* \text{-closed subalgebra として maximal}$$

証明 (1) $\Rightarrow$ (2); $T(H^\infty(dm)) = (\text{sp. } \{z^n\}_{n \geq 0} \text{ の } w^* \text{ closure}) = H^\infty(m)$, $L^\infty(m) \supset T(L^\infty(dm)) = (\text{sp. } \{z^n\}_{n \geq 0} \text{ (n: 整数) の } w^* \text{ closure}) \supset H^\infty(m) + \overline{H^\infty(m)}$ であり, $H^\infty(m) + \overline{H^\infty(m)}$ は $L^\infty(m)$ の w^* -dense であるから, $T(L^\infty(dm)) = L^\infty(m)$. 一方, $H^\infty(dm)$ は $L^\infty(dm)$ の w^* -closed subalgebra として maximal である ([10], p. 174).

(2) $\Rightarrow$ (1); $K \subset H^\infty(m)$ と $\bar{z}$ とによって生成される algebra の w^* -closure とすると, $K = L^\infty(m)$. $f \in H^\infty(m)$, $\hat{f}(p) = 0$ ($\forall p \in P$) とする. 補題 2.5 より $a_n = \int \bar{z}^n f dm = 0$ ($\forall n \geq 0$). $g \in H^\infty(m)$, $b_n = \int \bar{z}^n g dm$ とすると

$$\int \bar{z}^n g f dm = b_0 a_n + b_1 a_{n-1} + \dots + b_n a_0 = 0$$

$$\therefore \int k f dm = 0, \quad \forall k \in L^\infty(m). \quad \therefore f \equiv 0 (dm) //$$

Example (定理 2.7 の条件を満足しない例)

T^2 は torus ($= T \times T$ の cartesian product),
 $dm = dx dy$ は T^2 上の normalized Haar measure,
 $S = \{(m, n) : n > 0\} \cup \{(m, 0) : m \geq 0\}$ (m, n 整数とて),
 $A = A(T^2) = \{f \in C(T^2) : a_{mn} = \iint f(x, y) e^{-imx} e^{-inx} dx dy = 0$
for $\forall (m, n) \notin S\}$

とすると, A は dirichlet algebra ([19] - p.69) である.

$$M(A) = \{(x, y) : |x|=1, |y| \leq 1\} \cup \{(x, 0) : |x| < 1\}$$

を, 表現測度と書く.

$$M(A) = \{\delta_x \times \delta_y : x \in X, y \in Y\} \cup \{\delta_x \times P_r(\theta - y) dy : x \in X, re^{i\theta} \in D\}$$

$$\cup \{P_r(\theta - x) dx dy : re^{i\theta} \in D\}$$

ここで, δ_x は Dirac measure, $P_r(\theta - x)$ は Poisson kernel,

D は 複素平面上の open unit disk と表わす.

$dm = dx dy$ と置くと Gleason part は $P(m) = \{(x, 0) : |x| < 1\}$
である. さて, $f = e^{iy} \in H^\infty(m)$, $\hat{f}(p) = \iint e^{iy} P_r(\theta - x) dx dy$
 $= 0$ ($\forall p \in P$) であるから, $f \neq 0$. ところで, 定理の条
件を満足しない. さて, $\bar{P}(m) = \{(x, 0) : |x| \leq 1\}$ であ
るから, $\bar{P}(m) \cap T^2 = \emptyset$. これは (Gleason part's closure)
 $\cap$ Silov boundary $= \emptyset$ であることが示す.

補題 2.8 $\mathcal{F} \cap H(\mathbb{D}) \neq \emptyset$ とする. ($\mathcal{F}$ については p.6 参照) $H^1(\mathbb{D}) \ni f$, $S(f) = 0$ $\forall f \in \mathcal{F} \Rightarrow \int \log |f| dm = -\infty$

証明 $\int \log |f| dm > -\infty$ とすると, $f = gh$ (g は outer function, h は inner function). A_g は $H^1(\mathbb{D})$ に dense であるから, $\alpha_n g \rightarrow 1$ ($L^1(\mathbb{D})$) となる列 $\{\alpha_n\} \subset A$ が存在する. よって, $\alpha_n gh \rightarrow h$ ($L^1(\mathbb{D})$). $\therefore S(\alpha_n gh) \rightarrow S(h)$, $\forall f \in \mathcal{F}$. $\therefore \int \alpha_n gh = S(\alpha_n f) = S(\alpha_n) S(f) = 0 \therefore S(h) = 0$. $h \in H^\infty(\mathbb{D})$ であるから, $S(h) = 0 \quad \forall f \in \mathcal{F}$. よって, 定理 2.1 から, $\mathcal{F} \cap H(\mathbb{D}) = \emptyset$. 仮定に反する. //

上の例に帰すると, $f = e^{i\theta} \in H^\infty(\mathbb{D}) \subset H^1(\mathbb{D})$, $S(e^{i\theta}) = 0$, $\forall f \in P(\mathbb{D})$. $\therefore \int \log |e^{i\theta}| dm = 0 > -\infty$. したがって, $\mathcal{F} \cap H(\mathbb{D}) = \emptyset$ であることを示す.

問題 $H(\mathbb{D}) \not\supseteq \mathcal{F} \cap H(\mathbb{D}) \neq \emptyset$ とする例はあるだろうか.

§3 Part の拡張 — 特に part metric について —

B を compact Hausdorff 空間 X 上の function space, すなわち $C_{\mathbb{R}}(X)$ の subspace で, 定数関数を含む X の点と分

例 1, $\phi: B \ni u \rightarrow \text{norm } \|u\| = \sup |u(x)|$ が与えられているとする.

1°) X の part に $\sim$ について

$x, y \in X$ とする.

$$x \sim y (a) \text{ (ある } a \text{ は } x \sim y) \Leftrightarrow \exists a > 0 \text{ such that } \frac{1}{a} < \frac{u(x)}{u(y)} < a \\ \text{for } \forall u \in B, u > 0.$$

により, $\sim$ を定義すると, $\sim$ は同値関係に満足する.

$\Pi_{X(x)} = \{y \in X : x \sim y\}$ を x を通る part と書く. 特に, A は X 上の function algebra, $B = \text{Re } A$ とすると,

$$\|x - y\| = \sup \{ |f(x) - f(y)| : f \in A, \|f\| \leq 1 \} < 2 \Leftrightarrow x \sim y (a)$$

となり, A -parts と B -parts とは一致する.

$x \sim y$ のとき,

$$d(x, y) = \inf \log \{a : x \sim y (a)\} = \sup_{u > 0} |\log u(x) - \log u(y)|$$

とすると, $d(x, y)$ は X の part 上の metric である.

この metric は part metric である.

2°) state space T_B 上の part について.

B^* は B の dual space として, B^* に topology $\sigma(B^*, B)$

を入れたと, $B = (B^*)^*$ と考へる事が出来る. また X は B^* の中に homeomorphic に埋め込む事が出来る. B^* における X の閉包を T_B とすると,

$$T_B = \{F \in B^* : \|F\| = F(1) = 1\}$$

となる. T_B は B^* の compact 集合である. この T_B を B の state space (または carrier space) という.

$x, y \in T_B$ のとき,

$$(1) \quad x \sim y \iff \begin{cases} x=y \text{ または } x, y \text{ は } T_B \text{ のある開線分} \\ \text{に含まれる.} \end{cases}$$

により $\sim$ を定義すると, $\sim$ は同値関係と満足する.

$$\Pi_{T_B}(x) = \{y : x \sim y, y \in T_B\}$$

と, x を通る part という. この時, $x \in X$ ならば

$$X \cap \Pi_{T_B}(x) = \Pi_X(x)$$

となり, (1) を, X に定義した part の T_B への拡張と考へる事が出来る.

Example. X は複素平面上の閉単位円板 $\{ |z| \leq 1 \}$, B は X 上の連続で, 内部 $X^\circ = \{ |z| < 1 \}$ で調和な関数全体とする. $\Gamma = \{ |z| = 1 \}$ とする. X° は一つの part であり, また Γ 上の各点は一つの part である. $T_B \supsetneq X$ であり, $\{ |z| < 1 \}$ と T_B との関係については, [2] を参照のこと.

注意. B を X を含む compact 集合 K 上の function space に isometric isomorphic に拡張出来る. そのような K のうちで最大なのは, T_B である. この意味で, T_B は function algebra の maximal ideal 空間と類似した性質をもつ.

3°) 実線形空間の convex 集合での part について.

L を実線形空間, C を L の直線を含む convex 集合とする. $[x, y] = \{\lambda x + (1-\lambda)y ; 0 \leq \lambda \leq 1\}$, $[x, y]$ extends (in C) by $r(>0)$ とは $x+r(x-y) \in C$ かつ $y+r(y-x) \in C$ の事と言う.

$$x \sim y \Leftrightarrow [x, y] \text{ extends by some } r(>0).$$

ここで $\sim$ を定義すると, $\sim$ は同値関係と満足する [3].

$\Pi(x) = \{y \in C ; x \sim y\}$ は x を通る part という.

i) $x \sim y$ のとき:

$$d(x, x) = 0, \quad x \neq y \text{ ならば } d(x, y) = \inf \left\{ \log \left(1 + \frac{1}{r} \right) : [x, y] \text{ extends by } r \right\}$$

$$[x, y] \text{ extends by } r$$

ii) $x \not\sim y$ のとき:

$$d(x, y) = \infty$$

と $d(x, y)$ を定義したとき, d は C 上で (∞ の値もとり得る) metric である. これを part metric という.

次に $\Pi(x)$, $d(x, y)$ の性質を列記する.

a) $\Pi(x)$ は convex である.

b) $\Pi(x) = \{y \in C : d(x, y) < \infty\}$, よって $\Pi(x)$ は open かつ closed である.

c) $x, y \in C$, $\phi(\lambda) = \lambda x + (1-\lambda)y$ (λ : 実数) とすると,
 $\lambda_0 \in (0, 1)$, $\lambda \rightarrow \lambda_0$ ならば $d(\phi(\lambda), \phi(\lambda_0)) \rightarrow 0$, 更に,
 $x \sim y$ のとき, $\lambda_0 \in [0, 1]$, $\lambda \rightarrow \lambda_0$ ならば $d(\phi(\lambda), \phi(\lambda_0)) \rightarrow 0$

d) C の part は C の component である.

e) $\psi(\lambda, x, y) = \lambda x + (1-\lambda)y$ に対し, $x, y \in C$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

Π は C の任意の part と一致し, 写像

$$\psi: [0, 1] \times \Pi \times \Pi \rightarrow \Pi$$

は連続である. 更に, $\psi: (0, 1) \times C \times C \rightarrow C$ は連続である.

f) ノルム空間 E における有界な開凸集合 C は一つの part であり, C 上には part metric による topology は norm topology と同等である.

補題 3.1 u は C 上定義される concave 関数 (特に affine 関数) で, Π は C の一つの part とする.

$$u(x) > 0, \forall x \in \Pi \quad \text{or} \quad u \equiv 0 \text{ on } \Pi.$$

証明 $x, y \in \Pi$ とする, $[x, y]$ extends by $r (> 0)$.

$$\therefore x_0 = x + r(x-y) \in C \quad \therefore x = \frac{1}{1+r} x_0 + \frac{r}{1+r} y. \quad \text{よって,}$$

$$u(x) \geq \frac{1}{1+r} u(x_0) + \frac{r}{1+r} u(y) \geq \frac{r}{1+r} u(y). \quad u(x)=0 \text{ とする}$$

$$\text{と, } u(y) \geq 0 \quad \text{より } u(y)=0. \quad //$$

4°) convex cone における part について

Example. B は compact Hausdorff 空間上の function space.

$P = \{f \in B^+ : f \geq 0\}$ とすると, P は 原点 $0 \in P$ とする

convex cone になる. この例を B の principal example として
証明を述べる.

P は 実線形空間 E における 直線を含む $\neq \emptyset$ convex cone,
原点 $0 \in P$ とする. 従って $P \cap (-P) = \{0\}$ であり, $0 \neq$
直線を含む $\neq \emptyset$. $x, y \in L$ のとき

$$x \leq y \iff y-x \in P$$

により L 上は partial order $\leq$ となる.

$x, y \in P$ とし $x \leq y$ の事実が成り立つ.

$$a) [x, y] \text{ extends by } r \iff (1+\frac{1}{r})x \geq y, (1+\frac{1}{r})y \geq x$$

$$b) [x, y] \text{ extends by } r, z \in P \implies [x+z, y+z] \text{ extends by } r.$$

$$c) [x, y] \text{ extends by } r \iff [px, py] \text{ extends by } r$$

(p は任意の正数)

$$d) \quad x \sim px \quad \forall p, p \text{ 正数}$$

$$e) \quad x \sim y \Rightarrow x \sim x+y$$

d), e) から

P の δ の part は P の convex subcone である。

P の part metric による " τ は,

$$a) \quad x \sim y, \quad x \neq 0 \Rightarrow d(x, y) = \inf \{ \log a : ax \geq y \text{ and } ay \geq x \}$$

$$b) \quad d(px, py) = d(x, y), \quad \forall p > 0, \quad \forall x, y \in P.$$

$$c) \quad d(x+z, y+z) \leq d(x, y), \quad \forall x, y, z \in P.$$

$$d) \quad d(rx, sx) = |\log r - \log s| \quad x \in P, \quad x \neq 0, \quad r > 0, \quad s > 0.$$

$$e) \quad d(\lambda x, \lambda_0 x_0) \leq d(x, x_0) + |\log \lambda - \log \lambda_0|$$

$$(x, x_0 \in P, \quad x_0 \neq 0, \quad \lambda > 0, \quad \lambda_0 > 0)$$

即ち, $(0, +\infty) \times P \xrightarrow{\text{into}} P$ の写像 $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$ は

P 上の part metric に関して連続

$$f) \quad d(x+y, x_0+y_0) = \max [d(x_0, x), d(y_0, y)] \quad (x, y, x_0, y_0 \in P)$$

即ち, $P \times P \xrightarrow{\text{into}} P$ の写像 $(x, y) \rightarrow x+y$ は P 上の

part metric に関して連続である。

5°) part metric の completeness による " τ 。

線形空間 L は weak space とする。即ちある線形空間 M があ

さて

i) $L \times M$ 上の bilinear form $(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle$ が定義されていゝ。

ii) かつ L の linear functional $x \rightarrow \langle x, y \rangle, y \in M$ は連続になるから σ -weak topology の (L, M) 双対性からいゝ。したがって、 σ の (L, M) は L 上の locally convex topology である。更に σ は L 上の weak topology である。

iii) $\langle x, y \rangle = 0, \forall y \in M \Rightarrow x = 0$ と仮定する。よって、 L は Hausdorff 空間である。

C は L 上の closed convex subset とする。 C^+ は C 上の dual cone とし、 L 上の連続な affine 関数の全体 $\mathcal{F}$ とする。

$$x \in C \iff F(x) \geq 0, \forall F \in C^+.$$

定理 3.2 C は weak Hausdorff 空間 L の直線集合 C である。closed convex 集合とする。 $\forall x, y \in C$ のとき

$$d(x, y) = \sup \{ |\log F(x) - \log F(y)| : F \in C^+, F(y) > 0 \}$$

証明. i) $x \sim y$ とする。補題 3.1 より $F(y) > 0 \iff F(x) > 0, \forall x \in \Pi(y)$ 。

$$x + r(x - y) = (1+r)x - ry \in C \iff (1+\frac{1}{n})F(x) \geq F(y), \forall F \in C^+$$

$$y + r(y - x) = (1+r)y - rx \in C \iff (1+\frac{1}{n})F(y) \geq F(x), \forall F \in C^+$$

よって、

$$[x, y] \text{ extends by } n \iff (1+\frac{1}{n})^{-1} \leq F(x)/F(y) \leq 1+\frac{1}{n}$$

$$\therefore |\log F(x) - \log F(y)| \leq \log \left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right)$$

$$\therefore d(x, y) = \inf \log \left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right) = \sup |\log F(x) - \log F(y)|.$$

ii) $x \neq y$ とする. $y + \epsilon(y-x) \notin C$ ($\forall \epsilon > 0$). $\epsilon > 0$ を固定すると, ある $F \in C^+$ が存在して, $F(y + \epsilon(y-x)) < 0$. $\therefore$ したがって $\frac{1+\epsilon}{\epsilon} F(y) < F(x)$. $F(y) > 0$ のときは $|\log F(x) - \log F(y)| = \log F(x) - \log F(y) > \log \left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right)$. $\epsilon \rightarrow 0$ のときは $\log \left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right) \rightarrow \infty$. $F(y) = 0$ のときは $F \in F + \alpha$ ($\alpha > 0$, 十分小) となる様子が得られる.

系 3.3 C は weak Hausdorff 空間 L の直線を含む凸集合である. $x_0 \in C$ の α -neighborhood の基本系は,

$$\{x \in C : |F(x) - F(x_0)| < \epsilon, \text{ all } F \in C^+, F(x_0) = 1\}$$

$$= \{x \in C : |F(x) - F(x_0)| < \epsilon, \text{ all } F \in C^+, 0 < F(x_0) \leq 1\} \quad (\forall \epsilon > 0)$$

による. $\therefore$ したがって, α -topology は $\forall x_0 \in C$ に対して, $\{F \in C^+ : F(x_0) = 1\}$ は同程度連続になる. weakest topology である.

Choquet の定理 C が weak Hausdorff 空間 L の直線を含む凸集合ならば, L 上のすべての連続な affine 関数は C^+ の ∞ の関数の差である. [20].

この定理から次のことが従う.

定理 3.4 C は weak Hausdorff 空間 L の直線を含み、complete convex 集合とする。この時

- i) part metric による topology は C の topology より強い。
- ii) C は d -complete である。したがって、左 part も d -complete である。

次に、convex 集合 C は convex cone P (ただし頂点 $0 \in P$) であり特別の場合を考える事にする。このとき、定理 3.2 は次のようになる。

定理 3.5 L は weak Hausdorff 空間、 P は直線を含み、 L の closed convex cone の頂点 $0 \in P$ とする。また、 $P^+ \in P$ 上に真に与えられ、 L 上の連続な linear functional の全体とする。 $\forall x, y \in P$ に対して、

$$d(x, y) = \sup \{ |\log f(x) - \log f(y)| : f \in P^+, f(x) > 0, f(y) > 0 \}$$

注意。 $x \sim y$ のとき、 $f(x) > 0$ (または $f(y) > 0$) と $f > 0$ on $\Pi = \Pi(x)$ とは同値である。(補題 3.1) かつ、

$$\{ x \in \Pi : |f(x) - f(y)| < \varepsilon, f \in P^+, 0 < f(x) \leq 1 \} \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

は Π における x_0 の d -neighborhood の基の逆像系である。(系 3.3)

closed convex cone が直線を含むかどうかについては、次の判定法がある。

補題 3.6 P は weak Hausdorff 空間の closed convex cone
 であるとき、原点 $0 \in P$ とする。

P は直線を含む $\Leftrightarrow P \cap (-P) = \{0\}$.

P を原点 $0 \in P$ である convex cone とする。 K は P の convex
 な部分集合で、各 ray $\{rx : r > 0\}$, $x \in P$, $x \neq 0$ は K とはた
 一点のみで交わる時、 K は P の section という。従って、
 $P = \{rx : x \in K, r > 0\}$

定理 3.7 P は weak Hausdorff 空間の convex cone である。
 $P \cap (-P) = \{0\}$ とする。もし P は compact な section K
 を含むならば、 P は d -complete である。

section K をとり、直線を含む convex cone P について、
 これは、 K の parts は P の parts と K との交わりである。こ
 れは次のことから従う。

定理 3.8 $x, y \in K$ とする。

$[x, y]$ extends by r in $K \Leftrightarrow [x, y]$ extends by r in P

6. Examples

1) B is compact Hausdorff space X の function space $C(X)$,
 B の dual space is $B^* = L$ である. L is topology $\sigma(L, B)$ である.
 $B = (B^*)^* = L^*$ である.

$P = \{F \in B^*; F \geq 0\}$ is convex cone である, 原点 $0 \in P$
 $\therefore P \cap (-P) = \{0\}$ である. $K = \{F \in P; F(1) = 1\}$ is P の
 section である, weak topology $\sigma(L, L^+)$ である compact である.
 したがって, 定理 3.7 によれば P, K は part metric d に関して
 complete である.

次に, $B = C_R(X)$ である場合を考える.

2) compact Hausdorff space X 上の real Radon measures 全体の
 空間 $\mathcal{M}(X) = \mathcal{M}$ である.

$B = C_R(X)$ であるとき, $B^* = \mathcal{M}$. また $P = \mathcal{M}_+ = \{\mu \in \mathcal{M}; \mu \geq 0\}$
 である, $K = \{\mu \in P; \mu(X) = 1\}$. 次に $\mathcal{M}_+$ 上の part と part metric
 を説明する. 4) によれば, $\mathcal{M}_+ \ni \mu, \nu$ であるとき

$$(i) \dots \mu \sim \nu \iff \exists \alpha > 0, \alpha \mu \geq \nu, \quad \alpha \nu \geq \mu$$

$$(\text{ただし, } \mu \neq 0 \text{ かつ } \nu \neq 0 \text{ かつ } \alpha \geq 1)$$

(P によつて λ による order $\mu \geq \nu$ は, $f \geq 0$ である measurable
 集合 E に対して $\mu(E) \geq \nu(E)$ を意味する.) 特に,
 zero measure はそれ自身一つの part である. (ii) によれば

$$\mu \sim \nu \iff \mu \ll \nu, \nu \ll \mu, \text{ so } 0 < L \leq \frac{d\mu}{d\nu}, \frac{d\nu}{d\mu} \leq M < \infty$$

for some constants K, M .

今 $M_+ \ni \mu$ に対して固定する。

$$P(\mu) = \{g \in L^\infty(\mu) : g \text{ positive, bounded away from zero}\}$$

とすると, $\mu \in M_+$ に対して $\Pi(\mu)$ は

$$\Pi(\mu) = \{g\mu : g \in P(\mu)\}$$

と表す。対応

$$P(\mu) \ni g \longrightarrow g\mu \in \Pi(\mu)$$

は, $P(\mu)$ から $\Pi(\mu)$ への one-one 対応である。 g と

$g\mu$ とは同一視する。すなわち, $L^\infty(\mu)$ metric と $\Pi(\mu)$ 上の metric とは等しい。このとき, 次のことが成り立つ。

定理 3.9 $\mu \in M_+(X)$ とする。 $M_+(X)$ の μ part における part metric d は P_μ の対応する norm 上の $L^\infty(\mu)$ -metric と同等な位相を与える。即ち, $g_0, g_1, g_2, \dots \in P_\mu$ の列とすると,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n - g_0\| = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} d(g_n\mu, g_0\mu) = 0$$

文献

- [1] H.S. Bear: A geometric characterization of Gleason parts. Proc. Amer. Math. Soc., 16 (1965), 407-412.

- [2] ——— : Continuous subparts for functions spaces.
Function algebra (Proc. International symposium) (1965),
292 — 299.
- [3] H. S. Bear and M. L. Weiss : An intrinsic metric
for parts. Proc. Amer. Math. Soc., 18 (1967), 812 — 817.
- [4] H. Bauer and H. S. Bear : the part metric in convex
sets. Pacif. J. Math., 30 (1969), 15 — 33.
- [5] H. S. Bear and B. Walsh ; Integral kernel for
one-part function spaces, Pacif. J. Math., vol. 23
(1967), 209 — 215.
- [6] E. Bishop ; Representing measures for points in a
uniform algebra, Bull. Amer. Math. Soc., 70 (1964), 121 — 122.
- [7] A. Browder : Introduction to function algebras.
Benjamin, New York, (1969).
- [8] A. M. Gleason : Function algebras, Seminars on
Analytic Functions II, Princeton, 1957
- [9] K. Hoffman : Analytic functions and logmodular
Banach algebras. Acta Math. 108 (1962).
- [10] ——— Banach spaces of Analytic functions.
Prentice Hall, 1962.

- [11] G. Lumer: Analytic functions and Dirichlet problem,
Bull. Amer. Math. Soc., 70 (1964)
- [12] ——— : H^∞ and the imbedding of the classical
 H^p spaces in arbitrary ones. Function algebra
(Proc. International symposium) (1965), 285—286.
- [13] S. Merrill: H^p spaces derived from function algebras,
Dissertation, Yale Univ., (1966).
- [14] ——— : Maximality of certain Algebras $H^\infty(m)$.
Math. Zeitschr. 106 (1968), 261—266.
- [15] N. Mochizuki: Function algebras & Gleason parts.
第五回, Functional analysis symposium, (1967)
東北大理.
- [16] ——— : Gleason parts & characterization.
第一回, Function algebras 共同研究会 (1967)
京都大数理解析研究所.
- [17] 和田 淳蔵: Abstract harmonic function & integral
representation : 第五回, Function algebras 共同研究会
(1968), 京都大数理解析研究所.
- [18] J. Wermer: Dirichlet algebras. Duke Math. J.
27 (1960), 273—282.

[19] ——— : Banach algebras and analytic functions.

Advances in Math. I (1961), 51 — 102.

[20] G. Choquet : Ensembles et cônes convexes faiblement complets , C. R. Académie Science 254 (1962), 1908 — 1910 ; 2123 — 2125.