

バスタブ渦の起源

同志社大学 工学研究科 田中 大介 (Daisuke Tanaka)

同志社大学 工学部 水島 二郎 (Jiro Mizushima)

京都大学 工学研究科 木田重雄 (Shigeo Kida)

1. はじめに

バスタブやキッチンの流し台で水が渦を巻きながら流れ出るのが日常生活でよく見られる。これまで、この現象に多くの人々が関心をもち研究を行ってきたにもかかわらず、その発生のメカニズムはまだ明らかになっていない。

この問題に対して初めて詳細な実験を行ったのは Shapiro¹⁾ である。Shapiro は北半球にあるボストンで、円形の貯水槽の中心に設けられた流出口から水が流出するときに発生する渦の回転方向を可視化により調べる実験を行った。攪乱が渦の発生に影響を与えないように非常に注意深く実験を行った結果、常に反時計回りの渦が確認され、渦の回転方向は地球自転の影響によるコリオリ力によって決定されると結論づけた。また、彼は容器のもつわずかな非軸対称性や温度差などの攪乱がコリオリ力よりも大きい場合は、その攪乱によって渦の回転方向が決定づけられることも同時に指摘した。この結果は台風などの地球規模で発生する自然現象における渦の回転方向と一致しているために広く支持されてきた。

Shapiro が行ったバスタブ渦の実験では、水が排出されて時間とともに水面高さが変化するので定常問題として扱うことはできない。それに対し、川久保²⁾ は流入流量と流出流量を調整し、水面高さ一定の条件で実験を行った。彼はいろいろな流出流量について周方向速度を計測し、バスタブ渦の発生する臨界流出流量を求めた。またバスタブ渦の発生には 2 つのタイプがあり、その発生の仕方は周辺の流れの状況に強く左右されることを報告した。その後、Shingubara and Kawakubo³⁾ は流出口周辺にできる渦を詳しく調べ、時間的に変化するいくつかの弱い渦が、流出流量の増加とともに安定な 1 つの渦に統合されることを実験的に見いだした。

Fernandez-Feria and Sanmiguel-Rojas⁴⁾ は自由表面をもたない密閉された容器に満たされた流体中のバスタブ渦の発生を流速測定実験により調べた。その結果、川久保の結果と同様にバスタブ渦はレイノルズ数がある臨界値を超えたときに発生し、また解の分岐構造は超臨界ピッチフォーク分岐であると結論づけた。彼らは時計回りと反時計回りのどちらの渦も観測されたと報告している。

渦の構造を詳しく調べたのは Noguchi *et al.*⁵⁾ である。彼らは一定速度で回転している円筒容器中に形成される渦を計測するために、PIV (Particle Image Velocimetry) を用いた流速測定と LIF (Laser Induced Fluorescence) による可視化実験を行い、発生した渦とランキン渦との比較を行った。その結果、流出流量が多いときには、渦はランキン渦と同様の構造をしており、流出流量が少ないときには渦が発生しないことが確認された。また、流出口付近では渦を伴った上昇流が存在し、流入口から流入した流体は、容器の壁と底に形成される境界層を通り、流出口に近づくと上昇した後、再び下降して排出口に流れ込むと結論づけた。このような渦の核の周りに形成される上昇流については、Anderson *et al.*⁶⁾ による数値解析によっても示されている。

本研究では、円筒容器中に満たされた流体が、水面高さを一定に保った状態で底中央に設けられた流出口から流出する場合に生じるバスタブ渦の起源および構造を、数値シミュレーション、線形安定性解析および実験により調べる。また流れ場は中心軸に対して軸対称であり、流体は非圧縮性流体であると仮定する。

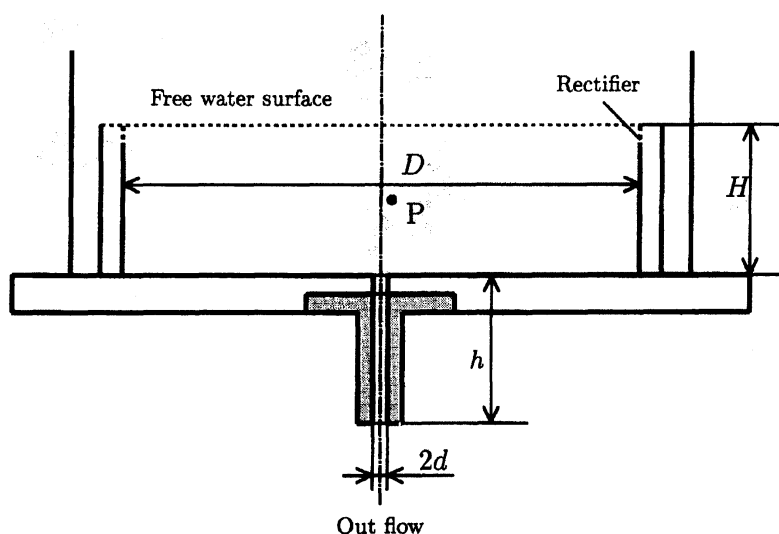


図 1 実験装置の概略図.

2. 実験

2-1. 実験装置および実験方法

バスタブ渦の起源とその構造を明らかにするために流れ場の可視化実験および流速測定実験を行う。実験装置の概略を図 1 に示す。実験槽として内径 $D=290\text{mm}$ 、高さ $H=50\text{mm}$ の円筒容器を使用し、材質は可視化のためにアクリルを採用した。円筒容器外縁部に 2 種類のスポンジを組み合わせた整流壁を設置して、そこから水を溢れ出させることにより水面高さを一定に保つ。流出口は直径 $2d = 20\text{mm}$ 、流出パイプ長さ $h=100\text{mm}$ とした。代表長さを流出口半径 d 、代表速度を流出流量 Q から算出した流出口における平均流速 $Q/(\pi d)$ にとり、レイノルズ数を $Re = Q/(\pi d\nu)$ で定義する。水温は常に 20°C に保った。そのときに動粘性係数 ν は $1.004\text{mm}^2/\text{s}$ である。また実験におけるロスビー数は $Ro = 6.0 \times 10^4$ から $Ro = 3.0 \times 10^5$ の間をとった。実験は京都 (緯度 35°) で行っており、そこでの地球の自転による角速度は $\Omega = 4.17 \times 10^{-5}(\text{rad/s})$ である。

流れ場をレーザー・ドップラ流速計 (LDV) による流速測定と水素気泡法およびポスターカラーを用いた流れの可視化によって調べる。LDV による流速測定では水素気泡法で発生した水素および水道水に含まれる不純物をトレーサーとして用いた。LDV はカノマックス社製の FLV SYSTEM8851 および DANTEC DYNAMICS 社製の BSA F60 を使用し、周方向速度の測定は図 1 に示される点 P で行う。点 P は流出口の円周部の延長直線上 ($r = 10\text{mm}$)、容器底面 $z = 25\text{mm}$ の高さである。流れの可視化実験では水素気泡法によって発生した水素に対してスリット光を容器側面からあて、側面および上面から撮影する。スリット光源はモリテックス社製の MHF-G150LR を用い、撮影にはニコン社製デジタルカメラ D100 を用いた。

2-2. 実験結果

Shapiro の報告はバスタブ渦が容器のもつわずかな非軸対称性や周方向の攪乱に大きく影響されることを示している。したがって、実験装置を製作するにあたっては、装置が軸対称性を保つように精度よく工作を行い、実験においても周方向の攪乱の発生を出来るだけ抑制するように努めた。図 2 に $Re = 625$ および $Re = 1280$ のときの上方から見たポスターカラーによる流れ場の可視化写真を示す。図 2(a) よ

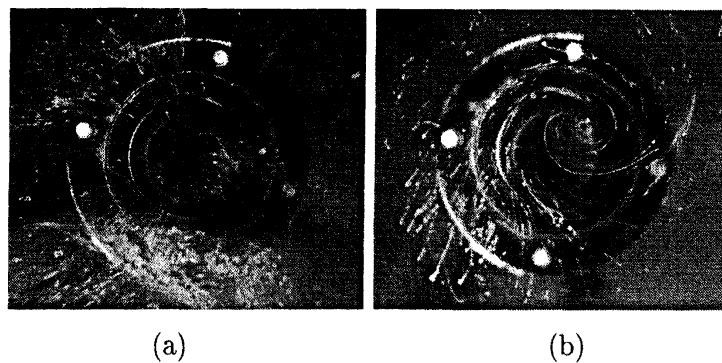


図 2 流れの可視化写真. (a) $Re = 625$. 非回転流れ. (b) $Re = 1280$. バスタブ渦流れ.

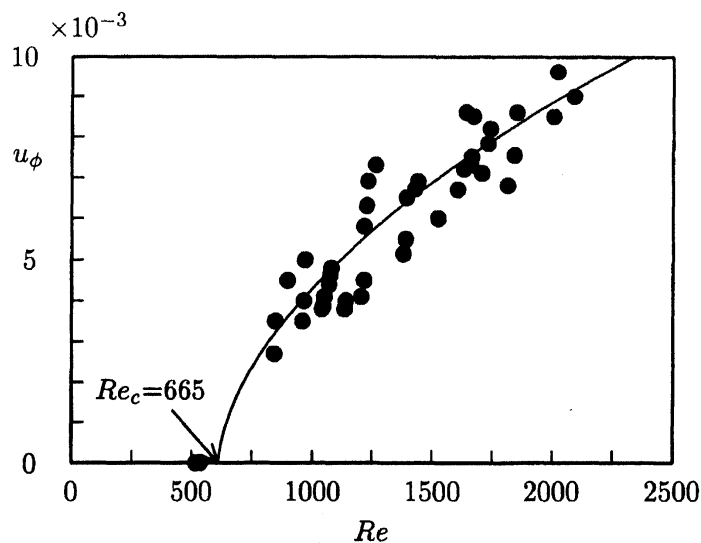


図 3 分岐ダイアグラム (実験結果). u_ϕ : 代表点 P での周方向速度.

り $Re = 625$ のときは渦は発生しておらず回転無しの吸い込み流れとなっているが, $Re = 1280$ (図 2(b)) では時計回りのバスタブ渦流れとなっていることがわかる. ここで, 回転無しの吸い込み流れを非回転流れと呼ぶことにする. この結果から, 非回転流れからバスタブ渦流れに移移する臨界レイノルズ数が存在すると考えられる. 図 1 に示される代表点 P における周方向速度をそれぞれのレイノルズ数について計測した. その計測値を図 3 に黒丸で示す. 計測点に最小 2 乗法を用いて 2 次曲線近似し, 得られた曲線が実線である. この近似曲線が横軸と交わる点 (周方向速度が 0 となる点) のレイノルズ数の値は 665 となる. すなわち, 本実験において非回転流れからバスタブ渦流れに移移する臨界レイノルズ数が $Re_c = 665$ であることを示している. 川久保と Fernandez-Feria and Sanmiguel-Rojas もそれぞれ臨界レイノルズ数を求めているが, 実験条件が異なるために本実験とその値を直接比較することはできない. しかし臨界レイノルズ数が存在するという点については一致している. 今回の実験で, バスタブ渦が発生しているときの渦の回転方向は, 時計回りおよび反時計回りどちらも同じ程度観測されており, この実験に関する限りバスタブ渦の回転方向は偶然に支配されていると考えられる.

$Re = 1200$ における周方向速度 u_ϕ の動径方向の分布は図 4 のように求められた. また, そのときの流れ場 (可視化写真) は図 5 のようになった. 図 4 と図 5(a) は底面からの高さ $z = 10 \text{ mm}$, 図 5(b) は $z = 30 \text{ mm}$ における速度分布である. それぞれの図より周方向速度 u_ϕ は流出円筒上部 ($r = 10 \text{ mm}$) まで

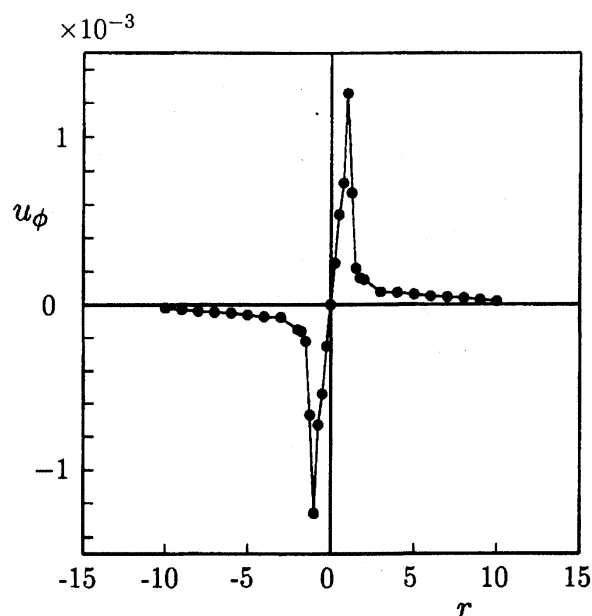


図 4 周方向速度 u_ϕ の動径方向分布 (実験結果). $Re = 1200$, $z = 10$ mm.

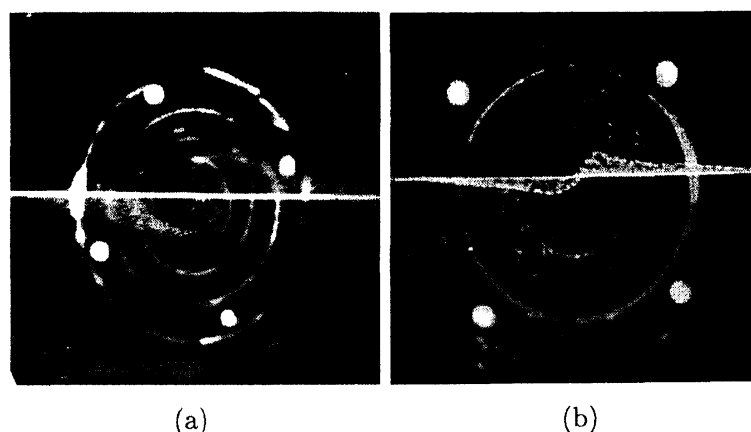


図 5 タイムライン (水素気泡による可視化写真). $Re = 1200$. (a) $z = 10$ mm, (b) $z = 30$ mm.

線形に増加しており、そこから半径が大きくなるにしたがい漸的に減少している。これらの結果から、バスタブ渦の構造は内側が強制渦、外側が自由渦の組合せであるランキン渦⁵⁾であると考えられる。

3. 数値シミュレーション

3-1. 定式化および数値計算法

実験から得られた結果をより詳しく分析するために、数値シミュレーションを行った。数値シミュレーションで用いるモデルの概略を図6に示す。円筒容器上部から流入した流体は容器内を通過し、底中心に設けられた流出口から流出する。計算領域における流れ場は完全な軸対称であると仮定する。基礎方程式はナビエ・ストークス方程式と連続の式である。モデルの軸を通る鉛直断面を図7に示す。流れを支配する無次元パラメータであるレイノルズ数およびロスビー数は

$$Re = \frac{Q^*}{\pi r_2^* \nu}, \quad Ro = \frac{Q^*}{2\pi r_2^{*3} \Omega} \quad (1)$$

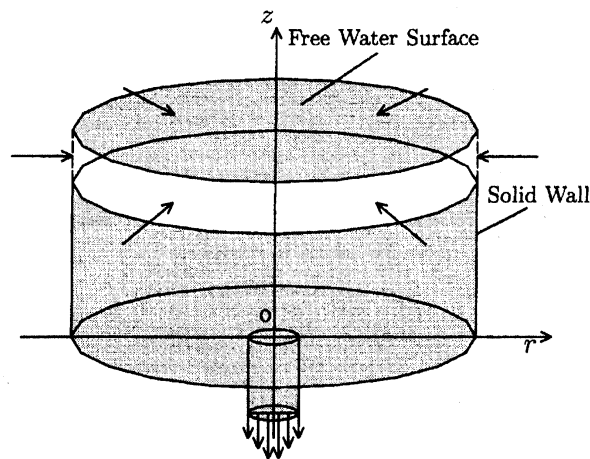


図 6 流れ場の概略図.

で定義される. ここでは, 流出口 (図 7 の FG) における平均流速 $Q^*/\pi r_2^{*2}$ および流出口半径 r_2^* を代表速度および代表長さとしており, Q^* は流出流量である. アスタリスク * は物理変数が次元量であることを示している. また, ν は動粘性係数である.

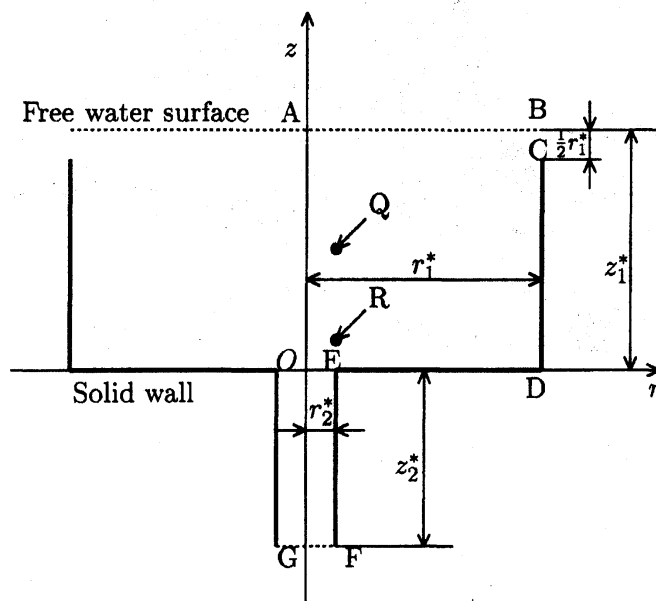


図 7 容器の鉛直断面と座標系.

すべての物理量を代表長さ r_2^* と代表流速 $Q^*/\pi r_2^{*2}$ で無次元化し, アスタリスクの付けた物理変数を無次元化したときそのアスタリスクを省略することとする. 座標系には円筒座標系 (r, ϕ, z) を用いる. 軸対称性の仮定より流れ場は ϕ 方向の依存性をもたず, 計算領域は片側半分の領域 (図 7 の ABCDEFGA) についてのみ行う. この仮定より, 子午面内の流れ関数 $\psi(r, z, t)$ を導入することができる. 流れ関数と速度 u_r と u_z の関係は

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad u_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (2)$$

で表される.

流れ関数 $\psi(r, z, t)$, 周方向渦度 $\omega_\phi(r, z, t)$, 周方向速度 $u_\phi(r, z, t)$ を用いて定式化を行う。系全体は角速度 Ω で回転しているものとし, 系と共に回転する円筒座標系を用いる。発展方程式はナビエ・ストークス方程式とポアソン方程式であり, それぞれ,

$$\frac{\partial \omega_\phi}{\partial t} - J(\psi, \omega_\phi) - \frac{1}{r^2} \omega_\phi \frac{\partial \psi}{\partial z} - \left(\frac{2}{r} u_\phi + \frac{1}{Ro} \right) \frac{\partial u_\phi}{\partial z} = \frac{1}{Re} \left(\Delta_2 \omega_\phi - \frac{\omega_\phi}{r^2} \right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial u_\phi}{\partial t} - J(\psi, u_\phi) + \frac{1}{r^2} u_\phi \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{Ro} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{1}{Re} \left(\Delta_2 u_\phi - \frac{u_\phi}{r^2} \right), \quad (4)$$

$$\omega_\phi = \frac{1}{r} D^2 \psi \quad (5)$$

で表される。ここで,

$$J(g, h) \equiv \frac{1}{r} \left(\frac{\partial g}{\partial r} \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial r} \right), \quad \Delta_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad D^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

である。運動方程式には回転系の効果としてコリオリ力による項と遠心力による項が現れるが, 遠心力は保存則なので圧力項に含むことができる。

境界条件は, 自由表面 (図7の AB) では水面高さ一定の仮定から鉛直方向速度が0である条件を用いる。また, 水平方向の応力がないという条件より, 渦度と周方向速度の鉛直方向微分を0とする。

$$\psi = \psi_0, \quad \frac{\partial \omega_\phi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u_\phi}{\partial z} = 0. \quad (6)$$

ここで, ψ_0 は定数である。流入口 (図7の BC) では一様流入条件を用いる。このとき, 流入口と流出口における流量が等しいことより, 流入条件は

$$\psi = \frac{Q}{2\pi r_1 d} r z + \psi_1, \quad \omega_\phi = 0, \quad u_\phi = 0 \quad (7)$$

となる。ただし, ψ_1 は定数である。また, ψ_2 を定数として, 壁 (図7の CDEF) における粘着条件は

$$\psi = \psi_2, \quad \omega_\phi = \frac{1}{r} D^2 \psi, \quad u_\phi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad (8)$$

と表せる。流出口 (図7の FG) ではつぎの流出条件を用いる。

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial \omega_\phi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u_\phi}{\partial z} = 0. \quad (9)$$

また軸対称性の仮定より, 中心軸 (図7の GA) の境界条件として, 中心軸を横切る流れと渦度が0である条件

$$\psi = 0, \quad \omega_\phi = 0, \quad u_\phi = 0 \quad (10)$$

を用いる。

数値計算においては差分法を用いる。図7に示される計算領域を r, z 方向にそれぞれ等間隔 $\Delta r, \Delta z$ に分割する。時間微分をオイラーの前進差分で近似し, 発展方程式の数値シミュレーションでは (3)–(5) 式を境界条件 (6)–(10) のもとで初期値境界値問題として数値的に解く。空間微分は全て2次精度の中心差分で近似する。またポアソン方程式はSOR法 (Successive Over Relaxation method) により解く。収束条件として反復計算中のある計算ステップでの流れ関数と, 一つ前の計算ステップでの流れ関数の値の差を全ての格子点について和をとり, その残差の相対誤差が 10^{-10} 以下となったときには解は収束し

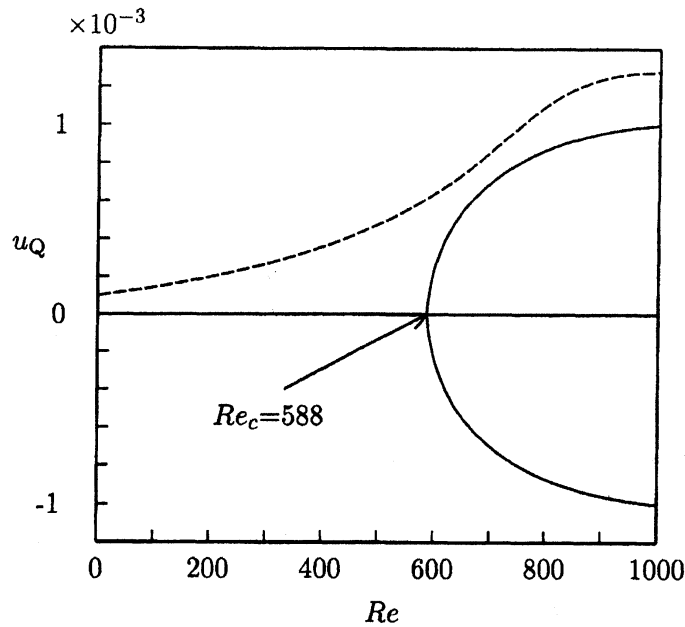


図 8 分岐図. 数値シミュレーション結果. 実線: $Ro = \infty$, 波線: $Ro = 5000$.

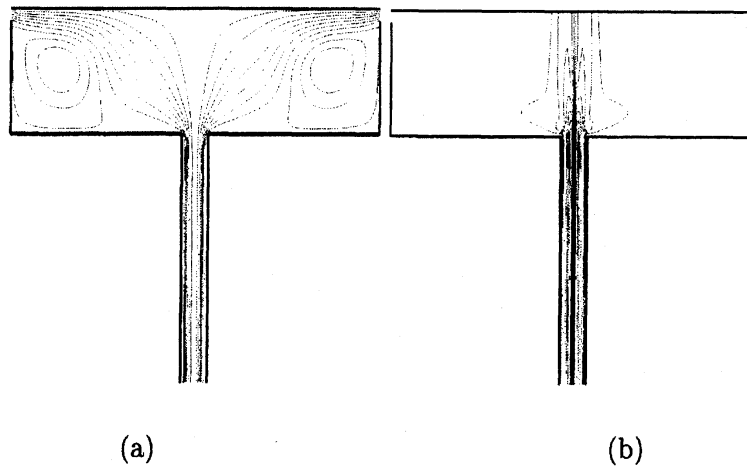


図 9 流れ場. $Re = 625$, $Ro = \infty$. (a) 鉛直断面内の流線, (b) u_ϕ の等速度線.

たと判断して, SOR 法の反復計算を終了する. また, ある時間ステップと一つ前の時間ステップで, つぎの条件を ω_ϕ と u_ϕ が満たすとき, 解は定常状態に達したものとして計算を打ち切る.

$$\frac{\sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N |(\omega_\phi, u_\phi)_{i,j}^{t+1} - (\omega_\phi, u_\phi)_{i,j}^t|}{\sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N |(\omega_\phi, u_\phi)_{i,j}^{t+1}|} < 10^{-10}.$$

3-2. 数値シミュレーション結果

計算領域を $r_1=15$, $r_2=1$, $z_1=5$, $z_2=10$ とおき, 系が静止している場合 ($Ro=\infty$) と回転している場合 ($Ro=5000$) について, $0 < Re \leq 1000$ の範囲で数値シミュレーションを行った. 図 7 に示される定点 $Q(r=1.0, z=2.5)$ における周方向速度 u_Q のレイノルズ数に対する依存性を図 8 に示す. 図 8 において実線は系が静止しているとき ($Ro = \infty$) の分岐図を表し, 破線は回転しているとき ($Ro=5000$) の分岐図を表す. 系が静止している場合, レイノルズ数が小さいときには流れ場は非回転流れであるが, レイノルズ数がある臨界値よりも大きいところでバスタブ渦流れが分岐していることがわかる. このバス

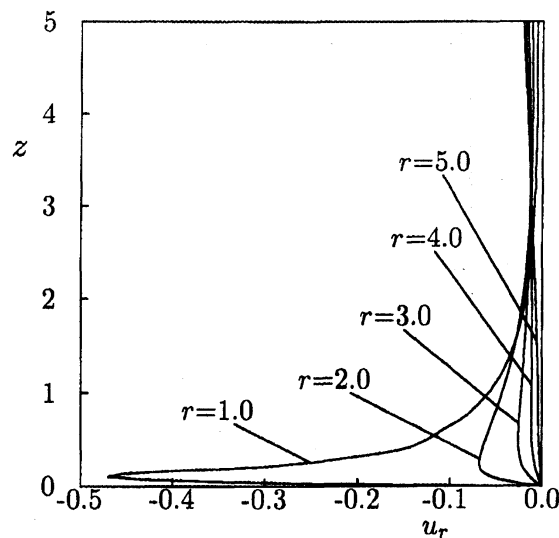


図 10 半径方向速度 u_r の z 分布. $Re = 625$, $Ro = \infty$.

タブ渦が発生する臨界レイノルズ数は $Re_c = 588$ であり、臨界レイノルズ数近傍での流れのふるまいを詳しく調べた結果、解の分岐構造はピッチフォーク分岐であることがわかった。また、系が回転している場合には、レイノルズ数が小さいときでもある程度の周方向速度をもっており、レイノルズ数によらずバスタブ渦が存在する。このときの渦の回転方向は系の回転方向により一意的に決定される。この解の構造は、ピッチフォーク分岐の構造不安定⁹⁾によって発生することがわかっている。すなわち、地球の自転に代表される系の回転はピッチフォーク分岐を構造不安定にし、どんな小さなレイノルズ数でもバスタブ渦が発生することを示している。

系が静止している場合の $Re = 625$ における流線および周方向速度の等高線を図 9 に示す。図 9(a) より流入口から一様に流入した流体が、求心的に流出口に出て行く様子がわかる。また容器の角には再循環領域が生じている。 $Re = 625$ における各半径での中心方向の流速 u_r の z 方向分布は図 10 のようになる。この図より半径方向速度 u_r は中心軸に近いほど大きく、容器の底付近のほうが上部に比べて半径方向速度が大きくなっていることがわかる。容器の底に形成される境界層と流出口上方の流れ場の様子を詳しく調べた結果、Noguchi *et al.* や Anderson *et al.* が報告した渦周りの上昇流の存在は確認されなかった。容器底面から高さ $z = 1.0$ における周方向速度 u_ϕ の分布を図 11 に示す。周方向速度 u_ϕ は原点から r 方向に $u_\phi \propto r$ で増加しており、流出部円筒上部 $r = 0.4$ で最大値をとる。また流出口円筒上部 ($r = 1.0$) より外側では $u_\phi \propto r^{-1}$ で減衰している。次に $z = 1.0$ における鉛直方向の渦度 $\omega_z (= 1/r \times \partial(ru_\phi)/\partial r)$ の分布を図 12 に示す。渦度 ω_z は軸中心付近のみで大きな値をもち、流出口上部 ($r \leq 1$) 以外ではほぼ 0 となっている。図中の破線は流出口の幅を示している。鉛直方向の渦度 ω_z が 0 である流れは自由渦流れと呼ばれる。これらの結果から、バスタブ渦の構造は渦の内側が強制渦、流出口円筒上部外側が自由渦となっていることが確認された。この結果は実験結果とも良く一致している。

4. 非回転流れの線形安定性

4-1. 非線形定常解

非線形非回転流れの線形安定性を調べる。非線形定常解は、基礎方程式 (3), (4) を時間発展法で数値シミュレーションすることによっても得られるが、より正確な定常解を求める場合には基礎方程式 (3),

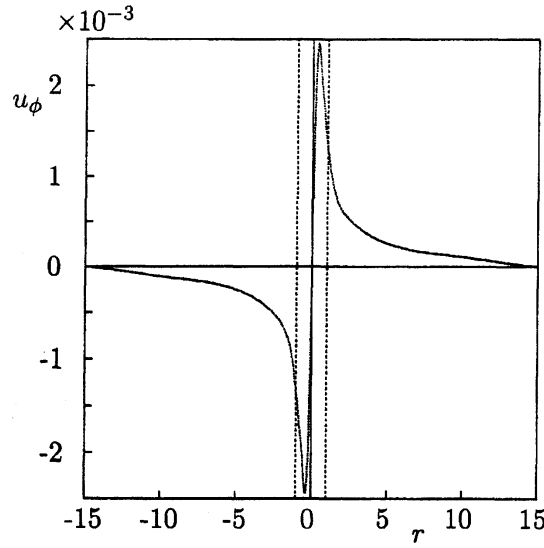


図 11 周方向速度 u_ϕ の半径方向分布. $Re = 625$, $Ro = \infty$.

(4) で時間項を省略した次の定常方程式を解く.

$$-J(\psi, \omega_\phi) - \frac{1}{r^2} \omega_\phi \frac{\partial \psi}{\partial z} - \left(\frac{2}{r} u_\phi + \frac{1}{Ro} \right) \frac{\partial u_\phi}{\partial z} = \frac{1}{Re} \left(\Delta_2 \omega_\phi - \frac{\omega_\phi}{r^2} \right), \quad (11)$$

$$-J(\psi, u_\phi) + \frac{1}{r^2} u_\phi \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{Ro} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{1}{Re} \left(\Delta_2 u_\phi - \frac{u_\phi}{r^2} \right). \quad (12)$$

定常解を直接計算するためには SOR 法を用い, 境界条件式 (6)–(10) のもとで方程式 (11)–(12) を解く. ここでは非回転流れを考えているので周方向速度 u_ϕ は 0 である.

数値計算においては時間発展方程式の数値シミュレーションと同様に, 空間微分を 2 次精度の中心差分で近似し, 得られた代数方程式を数値的に解く. あるステップと一つ前のステップで, ψ と ω_ϕ がつぎの条件

$$\frac{\sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N |(\omega_\phi, \psi)_{i,j}^{n+1} - (\omega_\phi, \psi)_{i,j}^n|}{\sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N |(\omega_\phi, \psi)_{i,j}^{n+1}|} < 10^{-10}$$

を満たせば, 解は定常状態に達したものと計算を打ち切る.

4-2. 線形安定性理論

系が静止している場合の非回転流れの線形安定性解析⁹⁾を行う. 流れ場を基本解 (非回転定常解) と攪乱の和で表し, この攪乱の時間発展を調べることで基本解の線形安定性を調べることができる. ここでは, 基本解だけでなく攪乱も軸対称であると仮定する. 基本解 $\bar{\psi}$ と $\bar{u}_\phi$ に微小攪乱 $\psi'(r, z, t)$ と $u'_\phi(r, z, t)$ を加え, ψ と u_ϕ をそれぞれ $\psi = \bar{\psi} + \psi'$, $u_\phi = \bar{u}_\phi + u'_\phi$ のように表す. 静止系すなわちロスビー数は無限大なので攪乱を支配する方程式は,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega'_\phi}{\partial t} &= J(\bar{\psi}, \omega'_\phi) + J(\psi', \bar{\omega}_\phi) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} \omega'_\phi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi'}{\partial z} \bar{\omega}_\phi + \frac{1}{Re} \left(\Delta_2 \omega'_\phi - \frac{\omega'_\phi}{r^2} \right), \\ \omega'_\phi &= \frac{1}{r} D^2 \psi', \\ \frac{\partial u'_\phi}{\partial t} &= J(\bar{\psi}, u'_\phi) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} u'_\phi + \frac{1}{Re} \left(\Delta_2 u'_\phi - \frac{u'_\phi}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

のように表され, この式より ψ' と u'_ϕ は分離していることがわかる. すなわち, $\psi' \neq 0$ となるモードと $u'_\phi \neq 0$ となるモードが存在する. ここでは周方向の攪乱のみを考えるので, 攪乱方程式は u'_ϕ につ

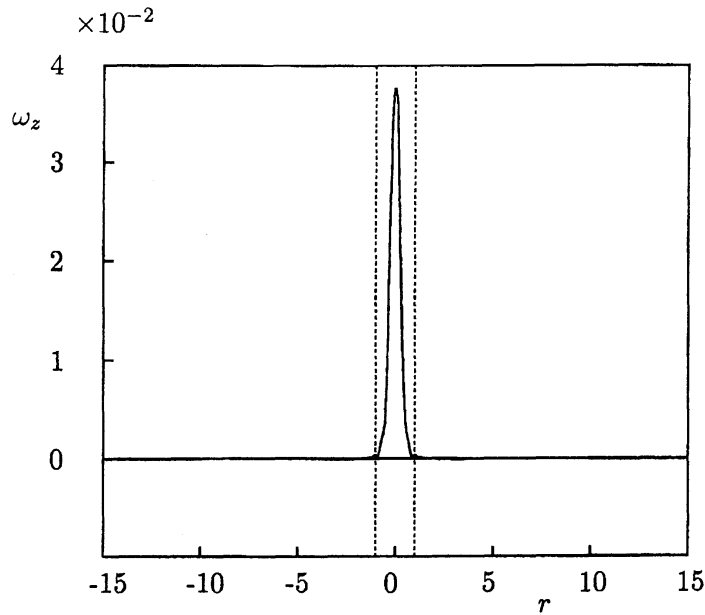


図 12 鉛直方向渦度 ω_z の半径方向分布. $Re = 625$, $Ro = \infty$.

いてのみ解けばよい. このときの流れ関数の攪乱成分は $\psi' = 0$ である. 線形攪乱方程式の解として $u'_\phi(r, z, t) = \hat{u}_\phi(r, z) \exp(\lambda t)$ を仮定する. ここで, λ は線形増幅率と呼ばれ, 一般には複素数であるが, 数値シミュレーションの結果から線形増幅率は実数であることが示されており, 線形増幅率が正であれば攪乱は時間と共に指数関数的に成長する. この u'_ϕ を (13) 式の第 3 式に代入すると, 線形増幅率 λ を支配する方程式

$$\lambda \hat{u}_\phi - J(\bar{\psi}, \hat{u}_\phi) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} \hat{u}_\phi = \frac{1}{Re} \left(\Delta_2 \hat{u}_\phi - \frac{\hat{u}_\phi}{r^2} \right) \quad (14)$$

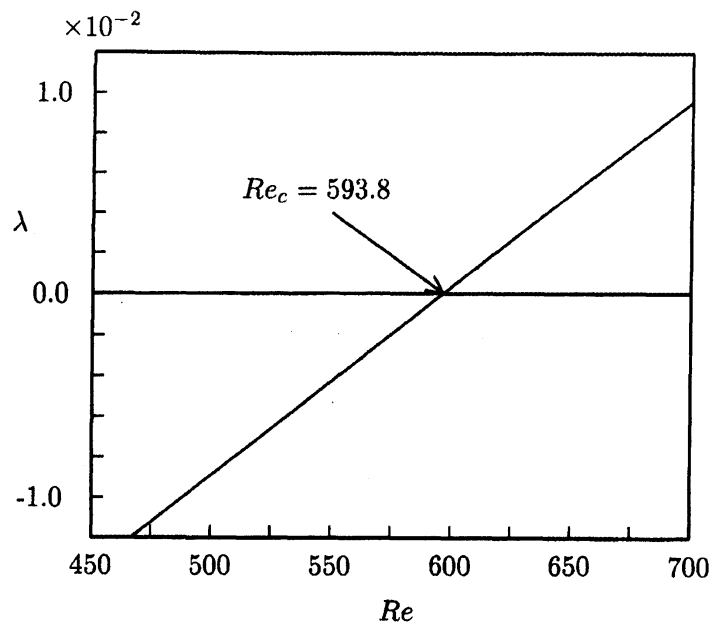
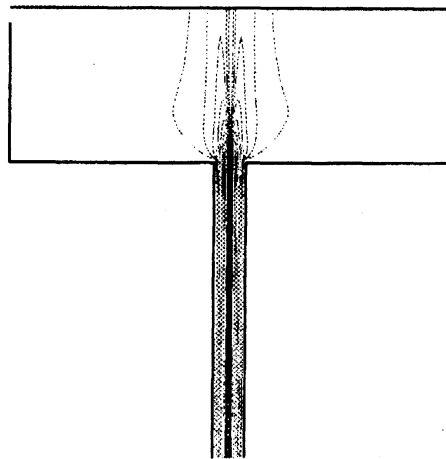
が得られる. $\hat{u}_\phi$ の境界条件は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}_\phi}{\partial z} &= 0 \quad (\text{AB}), \quad \hat{u}_\phi = 0 \quad (\text{CDEF}) \\ \frac{\partial \hat{u}_\phi}{\partial r} &= 0, \quad (\text{BC}), \quad \frac{\partial^2 \hat{u}_\phi}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{FG}) \end{aligned} \quad (15)$$

となる.

線形増幅率 λ を支配する方程式 (14) は λ を固有値とした固有値問題となっており, この固有値問題を SOR 法により境界条件 (15) のもとに数值的に解く. 空間微分は 2 次精度の中心差分で近似し, 等間隔格子を用いる. SOR 法の収束条件はすべての点で, 一つ前の繰り返し計算ステップでの流れ関数と比較を行い, その最大値が 10^{-10} 以下になれば計算を収束したと判定する. また, 線形固有関数を図 7 で示される R 点の値で規格化する.

このようにして求めた線形増幅率を図 13 に示す. 線形増幅率 λ が 0 となる点は中立安定であり, 計算の結果その点は $Re = 593.8$ となった. すなわち, 基本流の安定性は臨界レイノルズ数 $Re_c = 593.8$ で入れ替わり, $Re > Re_c$ では基本流が不安定になる. この結果は, 数値シミュレーションの結果とも非常によく一致しており, 両者の臨界レイノルズ数の相対誤差は約 1% となった. 線形安定性理論によって得られた線形固有関数 $\hat{u}_\phi$ の $Re = 625$ における等速度分布線を図 14 に示す. 図 14 に示される分布線は数値シミュレーションによって得られた周方向速度の等高線 (図 9(b)) と非常によく似ている. 線形安定

図 13 線形増幅率 λ .図 14 線形固有関数. 周方向速度 $\hat{u}_\phi$ の等速度分布. $Re = 625, Ro = \infty$.

性の結果から, Kawahara and Mizushima⁷⁾の結論と同様にバスタブ渦は非回転流れの不安定性によって生じていると結論される.

5. 結論

数値シミュレーションおよび線形安定性解析の結果, バスタブ渦の起源は非回転流れの不安定性により発生しており, 解の分岐構造はピッチフォーク分岐であることがわかった. このことから, 静止系ではバスタブ渦の回転方向は一意的に決まらず偶然に支配されることになる. しかし, 系が回転系におかれている場合は, ピッチフォーク分岐は構造不安定なのでコリオリ力の影響を考慮すると, どんなに小さなレイノルズ数でもバスタブ渦は発生し, そのときの渦の回転方向は系の回転方向により一意的に決定される. ただし, そのように決まる渦の回転方向は絶対的なものではなく, コリオリ力よりも大きな攪乱が加われば簡単に逆回転の渦が発生する可能性がある. 実験で渦の回転方向が一意に決定されなかった理由は, 容器の非軸対称性および攪乱がコリオリ力よりも大きかったためである.

一般に装置の非軸対称性や温度などの攪乱はコリオリ力に比べて非常に大きい。つまり我々が日常見ているバスタブ渦の回転方向はコリオリ力だけでは決定できない。このことは、非常に厳密な実験を行った場合にはバスタブ渦はコリオリ力によって回転方向を決定づけられることを示している。この結論はShapiroの実験結果に非常によく一致している。

参考文献

- 1) A.H. Shapiro, "Bath-tub vortex" *Nature*, **196**, 1080-1081 (1962).
- 2) 川久保達之, "吸い込み口のまわりの渦流" *日本物理学会誌*, **36**, 831-833 (1981).
- 3) S. Shingubara, T. Kawakubo, "Formation of vortices around a sinkhole" *J. Phys. Soc. Japan*, **57**, 1026-1030 (1984).
- 4) R. Fernandez-Feria and E. Sanmiguel-Rojas, "On the appearance of swirl in a confined sink flow" *Physics of Fluid*, **12**, 3082-3085 (2000).
- 5) T. Noguchi, S. Yukimoto, R. Kimura and H. Niino, "Structure and instability of a sink vortex" *Chamonix*, **F4080**, 1-6 (2003).
- 6) A. Anderson, T. Bohr, B. Stenum, J. Juul Rasmussen, B. Lautrup, "Anatomy of a bathtub vortex" *Phys. Lett*, **91**, 1-4 (2003).
- 7) H. Kawahara and J. Mizushima, "Generation mechanism of sink-hole vortex" Private communication, (2000).
- 8) 西島製作所, "取水部に発生する旋回流" 社内研修資料, 1-63 (1992).
- 9) 水島二郎, 藤村薫, 「流れの安定性」(朝倉書店, 東京, 2003), 1-118.