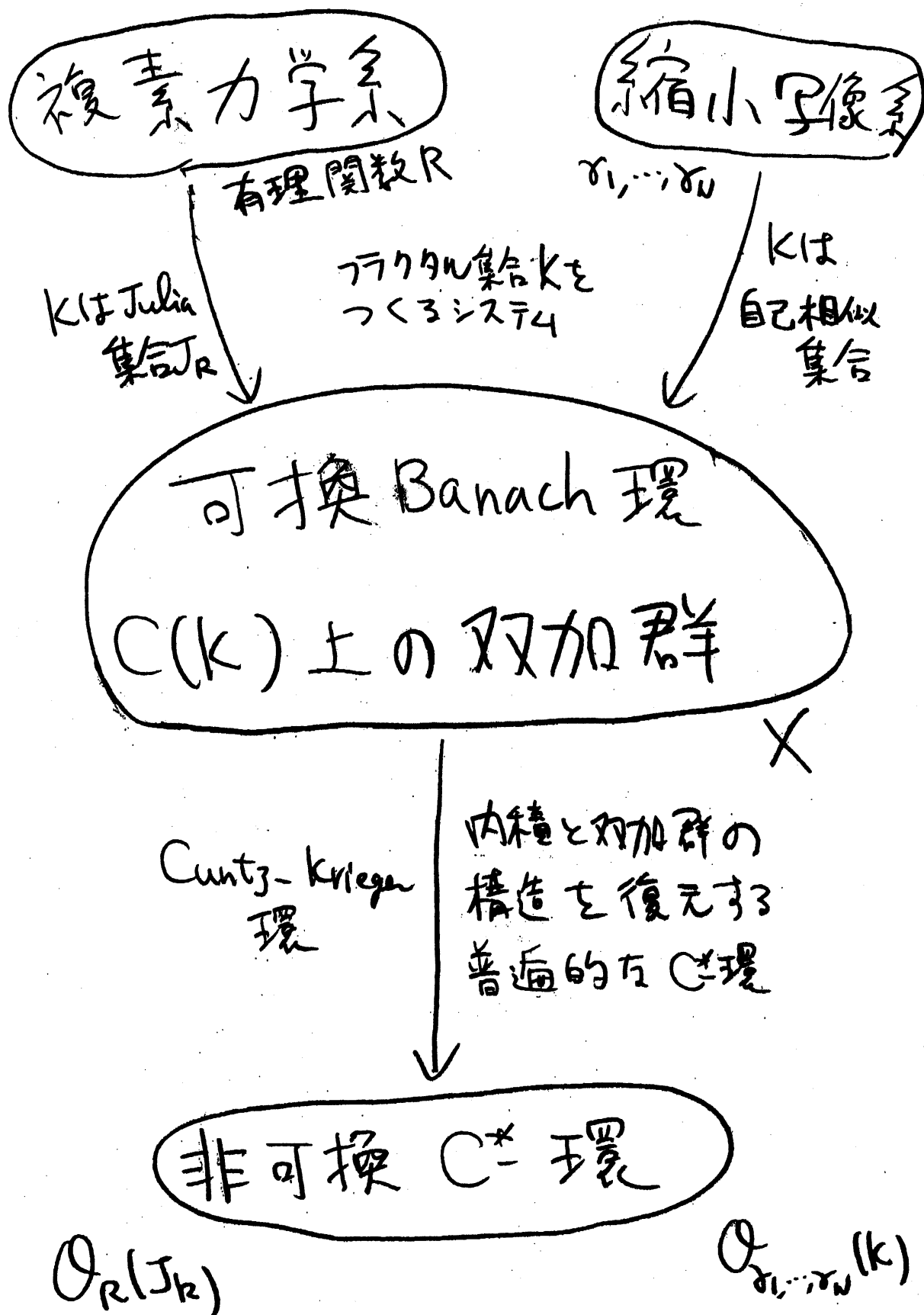


可換 Banach 環上の 双加群と C^* -環

九州大学大学院数理学研究院 綿谷安男
(Kyushu University Watatani, Yasuo)

①はじめに

可換 Banach 環 A のものを非可換な C^* -環と関連づけるのは少し無理がありそうな気がする。しかしここでもう一度あきらめないうちに、可換 Banach 環 A 上の双加群 X を考えると、その X には非可換な C^* -環 O_X が対応できるだけでなく、 X の「幾何学的構造」が C^* -環の「環論的構造」に反映できることを考察する。この意味で可換 Banach 環 A だけでなくその上の加群構造も考えると、さうに豊かな世界が開かれているといえよう。



① ヒルベルト空間の場合

最も簡単と思われた場合をまず考えよう。

可換 Banach 環 A として $A = \mathbb{C}$ とする。 A 上の双加群として $X = \mathbb{C}^n$ とおく。

$a, b \in A, \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in X$ に対し

双加群構造 $a \cdot (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot b = (a\lambda_1 b, \dots, a\lambda_n b)$

だけいたく

内積構造 $(\lambda | \lambda) = \sum_{i=1}^n \overline{\lambda_i} \lambda_i$

も考えよう。

この X から $\mathbb{C}$ -環 $\mathcal{O}_X$ をつくる。要請として $\mathbb{C}$ -環 $\mathcal{O}_X$ の積構造が、元の X の双加群と内積構造を「復元」するようにしたい。 $A = \mathbb{C}$ での双加群構造は $\mathcal{O}_X$ のベクトル空間の構造でのみよい。後は内積構造を復元すればよい。つまり $\{S_\lambda | \lambda \in X\} \subset \mathcal{O}_X$ と X の元 λ へ対応した生成元 $S_\lambda \in A = \mathbb{C} \subset \mathcal{O}_X$ が

$$S_\lambda^* S_\mu = (\lambda | \mu) \cdot I$$

を満たすようなもののすべてを universal なもので、
 “reduced” とした $\mathbb{C}$ -環 $\mathcal{O}_X$ は、実は C^* -環 $\mathcal{O}_n$ と同型になる。

Def Cuntz 環 $\mathcal{O}_n$ とは n 個の生成元 $s_1, \dots, s_n$ をもち、
友換関係

$$\begin{cases} s_i^* s_i = I \quad (i=1, \dots, n) \text{ かつ } \text{isometries} \\ \sum_{i=1}^n s_i s_i^* = I, \quad \left(\bigwedge_{i \neq j} s_i \text{ の値域は互いに直交 (正交) 全体} \right) \end{cases}$$

をみたす C^* -環である [C]。Cuntz 環は生成元のみが
によらずすべて同型である。つまり他に n 個の生成元

$T_1, \dots, T_n$ が生成される C^* 環 $B = C^*(T_1, \dots, T_n)$ で同じ
友換関係

$$\begin{cases} T_i^* T_i = I \quad (i=1, 2, \dots, n) \\ \sum_{i=1}^n T_i T_i^* = I \end{cases}$$

をみたすものがあるとせよ。するとある $\varphi: \mathcal{O}_n \rightarrow B$
という同型写像で $\varphi(s_i) = T_i$ とするものが
存在する。この意味で同型を除いて Cuntz 環 $\mathcal{O}_n$ は
一意に定まる。Cuntz $\mathcal{O}_n$ は単純でその K -群 $K_0(\mathcal{O}_n)$
は $\mathbb{Z}(n-1)\mathbb{Z}$ になり生成元の個数を書いていく。

いま $X = \mathbb{C}^n$ の場合の $\mathcal{O}_X$ は $\mathcal{O}_n$ と同型になる。
 $X = (x_1, \dots, x_n) \in X$ に対し

$$\boxed{S_X = \sum_{i=1}^n x_i s_i}$$

実際 $\text{Im } S_i \perp \text{Im } S_j$ (i.e.) $S_i^* S_j = 0$ なる

$$\begin{aligned} S_x^* S_y &= \left(\sum_{i=1}^n x_i S_i \right)^* \left(\sum_{j=1}^n y_j S_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{x_i} y_j S_i^* S_j \\ &= \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i S_i^* S_i \\ &= (\overline{x} y) \cdot I \end{aligned}$$

と述べている。

問題 $A = \mathbb{C}$ とする。 $X = \mathbb{C}^n$ とヒルベルト空間とする
代わりに一般の Banach space にするとどうなるか？

ヒルベルト空間 $\mathbb{C}^n$: バナハ空間

= Countable $\mathcal{O}_n$: $\mathcal{B}$

とある Banach 環 $\mathcal{B}$ とは何か？ 今のところ

この比例式を成立させるような美しい Banach 環

(美しい $\mathbb{C}$ -環か) $\mathcal{B}$ のつくり方はわかった。しかし

一番美しいヒルベルト空間の場合に非常によい $\mathbb{C}$ -環

である Countable $\mathcal{O}_n$ が対応するので、一般のバナハ空間
の場合にも何かよいものが隠れていると期待されている。

2 Cuntz-Pimsner 環

Def C^* 環 A 上の ヒルベルト双加群 X とは,
 X が ヒルベルト空間 でありかつ A - A 双加群 であり
 さらに C^* 環 A 値 の 内積 $(\cdot | \cdot)_A$ が X 上にあり,
 $\|x\| = \|(\chi | \chi)_A\|^{1/2}$ で X が 完備 であり
 A の 左作用 が $*\text{homo } \phi: A \rightarrow \mathcal{L}(X)$ を 導くものである.

Def この X 上の "rank one" operator $\theta_{x,y} \in \mathcal{L}(X)$
 を $\theta_{x,y}(z) = \chi(y | z)_A$, $(x, y, z \in X)$ で 定める.

$$K(X) = \overline{\{\theta_{x,y} \text{ の有限和 } \mid x, y \in X\}} \triangleleft \mathcal{L}(X)$$

Def C^* 環 A 上の ヒルベルト双加群 X に対する
Cuntz-Pimsner 環 $\mathcal{O}_X$ とは

$$\text{生成元} : \{a \mid a \in A\} \cup \{S_x \mid x \in X\}$$

交換関係:

$$\begin{cases} a S_x = S_x a \\ S_x a = S_x a \\ S_x^* S_y = (\chi | y)_A \\ a = i_k \phi(a) \end{cases}$$

こゝで

$$i_k: K(X) \rightarrow \mathcal{O}_X$$

$$i_k(\theta_{x,y}) = S_x S_y^*$$

$$(a \in A, x \in X, y \in X)$$

をも 普遍的 な C^* 環 である [P].

③ 複素力学系からつくられる C^* -環

有理関数 R をリーマン球面 $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上の
変換 $R: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ とみる。 R の反復合成 R^n からつく
られる複素力学系 $(R^n)_n$ を考える。 $J_R \subset \hat{\mathbb{C}}$ を R の
Julia 集合とする。 可換 C^* -環 $A = C(J_R)$ 上のユニ
タリ双加群 X を次のように構成する。

$$X = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{ (f(n, z), g(n, z)) \in J_R^2 \mid g = R(f) \}}$$

$a, b \in A$, $f, g \in X$ に対し

$$\begin{cases} (a \cdot f \cdot b)(x, y) = a(x) f(x, y) b(y) \\ (f(g)_A)(z) = \sum_{x \in R^{-1}(z)} \overline{f(x, y)} g(x, y) \end{cases}$$

ここで e_n は $x \mapsto R^n(x)$ の R の分岐指数

Def この双加群 X からつくられた Cuntz-Pimsner 環 $\mathcal{O}_X$
を $\mathcal{O}_R(J_R)$ と書き、有理関数 R に付随する C^* -環という。

Theorem (根原-W) [KW1]

有理関数 R の次数が 2 以上ならば, C^* -環 $\mathcal{O}_R(J_R)$
は 真無限単純 C^* -環になる。

④ Julia 集合 J_R のフラクタル性を可換 Banach 環 $A = C(J_R)$
とその上の双加群 X で表わせば, それは C^* -環 $\mathcal{O}_R(J_R)$ の環
論的構造に反映したといえる。

④ 縮小写像系からつくられる C^* 環

完備距離空間 Ω 上の真の縮小写像の系 $\gamma_1, \dots, \gamma_n : \Omega \rightarrow \Omega$ に対し, Ω の空でないコンパクト部分集合 $K \subset \Omega$ で次の自己相似性をもつものが唯一存在する。(フラクタル図形をうつすの方法)

$$K = \bigcup_{k=1}^n \gamma_k(K)$$

可換 C^* -環 $A = C(K)$ 上のユニタリ双加群 X を構成す

$$X = \overline{\bigcup_{k=1}^n \{(\gamma_k(y), y) \in K^2 \mid y \in K\}}$$

$a, b \in A$, $f, g \in X$ に対し

$$(a \cdot f \cdot b)(x, y) = a(x) f(x, y) b(y)$$

$$(f|g)_A(y) = \sum_{k=1}^n \overline{f(\gamma_k(y), y)} g(\gamma_k(y), y)$$

Def この双加群 X からつくられた Cantz-Pimsner 環 $\mathcal{O}_X$ を $\mathcal{O}_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}(K)$ と書き, 縮小写像系に付随する C^* 環という。

Theorem (梶原-W) [KW2]

もし縮小写像系 $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ が開写像条件をもつとす。つまりある開集合 $\emptyset \subset K$ で $\bigcup_{k=1}^n \gamma_k(\emptyset) \subset \emptyset$ とあるものがあるとする。 $n \geq 2$ とする左 $\mathcal{O}_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}(K)$ は真無限単純 C^* 環になる。

注 自己相似集合 K のフラクタル性 が可換 Banach 環 $\mathcal{O}_K$ 上の双加群を通じて C^* 環 $\mathcal{O}_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}(K)$ に反映したといえる。

«References»

- [C] J. Cuntz, Simple C^* -algebras generated by isometries, Comm. Math. Phys. 57 (1977), 173-185.
- [KW1] T. Kajiwara and Y. Watatani, C^* -algebras associated with complex dynamical systems, Indiana. Math. J. (2005), 755-778
- [KW2] T. Kajiwara and Y. Watatani, C^* -algebras associated with self-similar sets, to appear J. Operator Theory,
- [P] M. Pimsner, A class of C^* -algebras generating both Cuntz-Krieger algebras and crossed product by $\mathbb{Z}$, free probability theory, AMS. (1997), 189-212.