

Openness

名大理 鈴木秀司

Introduction. ある種の構造に關係する性質ないし構造があるとき、もとの構造のわずかな変形によつても、その性質ないし構造が変化しないとき、そのような關係を *openness* が成立する關係と呼ぶ。Sikata [1] は *Riemannian structure* と *differential structure* との關係によつて *openness* が成立することを示した。ここではそのような關係の例をいくつか考えてみる。ひとつは、Part I で証明を与えた *Riemannian structure* と *tangential structure* との關係、他のひとつは、Part II で取りあつかう *Riemannian structure* と *isometric imbedding* される *Euclidean space* の次元との關係である。しかし後者は完全には証明されていない。

Tangential structure は *obstruction* を通して *immersion* と關係があるので、Part I 及び Part II は *openness* と *immersion*, *openness* と *imbedding* の關係を考えたものでといえる。

Part I. Tangential equivalence (immersion)

M_1, M_2 を二つの n -次元 Riemannian manifold とし, d_1, d_2 をそれぞれ M_1, M_2 の metric であるとする。 M_1, M_2 の間には同相写像があると仮定する。

定義1. 次の Lipschitz constant という。

$$L(f) = \sup \{ k \mid \frac{1}{k} < d_2(fx, fy) / d_1(x, y) < k, x \neq y \}$$

主定理. $L(f)$ を適当におさえれば, TM_1 と TM_2 は tangential equivalent である。

準備. $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は locally finite な M_1 の open covering で, 各 U_λ ; $x^1 \cdots x_n$ は local coordinate である。 $\exp$ は TM_2 から M_2 への exponential map とし, A は TM_2 内の zero cross-section の開近傍とする。 M_2 は compact であるので, 適当に $\eta > 0$ をとり, $\exp_p: A_p \rightarrow M_2$ が into-diffeomorphic になるようにできる。 ここで $A_p = \{v \in A \cap T_p M_2 \mid \|v\| < 2\eta\}$, $\|\cdot\|$ は d_2 から入るノルムとする。 同様に, 適当に $\delta > 0$ をとり, $\exp_p: B_p \rightarrow M_1$ が into-diffeomorphic になるようにできる。 ここで $B_p = \{u \in T_p M_1 \mid \|u\| < 2\delta\}$, $\|\cdot\|$ は d_1 から入るノルムとする。 $\exp_{f(p)}^{-1} \circ f \circ \exp_p(B_p) \subset A_{f(p)}$ となるように δ, η を選んでおく。

M_1 の点 p が U_λ にあつたとき, $T_p M_1$ 内に次のようにして n -simplex を定義する。 $\{(\frac{\partial}{\partial x_1})_p, \dots, (\frac{\partial}{\partial x_n})_p\}$ は $T_p M_1$ の一つ

の直交基底とみなせる。そこで $P_i^\lambda = \delta \cdot (\frac{\partial}{\partial x_i})_p / \|(\frac{\partial}{\partial x_i})_p\|$ とおき、
 $\alpha(p) = P_1^\lambda P_2^\lambda \cdots P_n^\lambda$ とおけば、 $\alpha(p)$ は p に関して連続に変化する n -simplex である。

定義2. $f_{\alpha(p)} : T_p M_1 \rightarrow T_{f(p)} M_2$ を次のように定義する。

$$T_p M_1 \ni v = \sum_{i=1}^n a_i P_i^\lambda \Rightarrow f_{\alpha(p)}(v) = \sum_{i=1}^n a_i g(P_i^\lambda)$$

$$\text{ここで, } g = \exp_{f(p)}^{-1} \circ f \circ \exp_p$$

これで g の従って f の $\alpha(p)$ による線形近似ができた。 $f_{\alpha(p)}$ の線形性及び p についての連続性は明らかである。問題となるのは non-degenerate であるかどうかということである。

補助定理1. $l(f)$ を適当におさえれば、 $f_{\alpha(p)}$ は non-degenerate である。即ち、

$$l(f) < \eta_1 \Rightarrow f_{\alpha(p)} : \text{non-degenerate.}$$

この証明には次を用いる。

補助定理2. $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ $g = \exp_{f(p)}^{-1} \circ f \circ \exp_p$ on B_p

$$|\langle g(u), v \rangle - \langle u, v \rangle| \leq 2(l(g)^2 - 1)(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

補助定理1 の証明. $(\det(f_{\alpha(p)}))^2 = \left(\frac{\text{vol}(f_{\alpha(p)}(\alpha(p)))}{\text{vol}(\alpha(p))} \right)^2 = \frac{\det(g(P_1^\lambda)g(P_2^\lambda) \cdots g(P_n^\lambda))}{\det(\langle P_i^\lambda, P_j^\lambda \rangle)}$
 であるので、 $|\det(f_{\alpha(p)})^2 - 1| \leq \frac{n!}{\delta^{2n}} 4(l(g)^2 - 1) \cdot \delta^{2n} \frac{7}{4}(5^n - 1)$

ただし、ここで $l^2 \leq 2$ を仮定した。 $A(n) = n!(5^n - 1)$ とおけば、

$$(\det(f_{\alpha(p)}))^2 \geq 1 - A(n)(l(g)^2 - 1)$$

従って、 $l(g) < \sqrt{1 + \frac{1}{A(n)}}$ とおけばよい。 $l(g)$ と $l(f)$ の関係は次の補助定理3によって与えられるので、 $l(f)$ を次のようにする。

$$l(f) < \kappa_1 = \frac{1}{(1+p)^2} \sqrt{1 + \frac{1}{A(n)}}$$

証明終り.

補助定理3. $T_p M_1 \ni x, y$ に対し, $\forall p > 0$ のとき $\varepsilon_1 > 0$ で,
 $\|x\|, \|y\| < \varepsilon_1$ ならば

$$|d_1(\exp_p x, \exp_p y) - \|x - y\|| \leq p \|x - y\|$$

が成立する.

一応これで $f_{\alpha(p)}$ が non-degenerate であることが示されたのであるが, ここまでは一つの local coordinate のみについて考えただけであるので, 次に, 各 local coordinate からできる $f_{\alpha(p)}$ をつなぎ合せて, 特定の local coordinate によらない κ_p を構成する.

補助定理4. M_1 上には1の分割 $\{\chi_k\}_{k \in n}$ が存在する.

定義2. $\kappa_p: T_p M_1 \rightarrow T_{f(p)} M_2$ を次のように定義する.

$$T_p M_1 \ni v \Rightarrow \kappa_p(v) = \sum_{\chi_k \neq 0} \chi_k(p) f_{\alpha(p)}(v).$$

κ_p の線形性及び κ_p についての連続性は, $f_{\alpha(p)}$, χ_k の定義より明らかである. 問題は non-degenerate かどうかである.

補助定理5. $T_p M_1 \ni v$, $\frac{\delta}{2} < \|v\| < 2\delta$ のとき,

$$\|g(v) - f_{\alpha(p)}(v)\| < \sqrt{(lg)^2 - 1} \|v\| C_1(n)$$

$$\text{ここで, } C_1(n) = 2 \sqrt{1 + \frac{16}{((n-1)! \Theta(\sigma_2))^2} + \frac{24}{(n-1)! \Theta(\sigma_2)}}, \quad \Theta(\sigma_2) = \frac{\text{vol}(\sigma_2(p))}{(\text{diam}(\sigma_2(p)))^n}$$

証明. $v = \sum_{i=1}^n a_i P_i^\lambda$ とおけば,

$$\|g(v) - f_{\alpha(p)}(v)\|^2 = \|g(v)\|^2 + \|f_{\alpha(p)}(v)\|^2 - 2 \langle g(v), f_{\alpha(p)}(v) \rangle$$

$$1) \|g(v)\|^2 \leq \|v\|^2 + 4(lg)^2 - 1 \|v\|^2 \quad (\because \text{補助定理2})$$

$$\begin{aligned}
b) \quad \|f_{\alpha(p)}(w)\|^2 &= \langle f_{\alpha(p)}(w), f_{\alpha(p)}(w) \rangle = \sum_{i,j} a_i a_j \langle g(P_i^\lambda), g(P_j^\lambda) \rangle \\
a_i a_j &\geq 0 \quad a_i a_j \langle g(P_i^\lambda), g(P_j^\lambda) \rangle \leq 4(l(g)^2 - 1) \delta^2 a_i a_j + a_i a_j \langle P_i^\lambda, P_j^\lambda \rangle \\
a_i a_j &< 0 \quad a_i a_j \langle g(P_i^\lambda), g(P_j^\lambda) \rangle \leq -4(l(g)^2 - 1) \delta^2 a_i a_j + a_i a_j \langle P_i^\lambda, P_j^\lambda \rangle \\
\sum_{i,j} a_i a_j \langle g(P_i^\lambda), g(P_j^\lambda) \rangle &\leq \sum_{i,j} a_i a_j \langle P_i^\lambda, P_j^\lambda \rangle + 4(l(g)^2 - 1) \delta^2 \sum_{i,j} |a_i a_j| \\
\therefore \|f_{\alpha(p)}(w)\|^2 &\leq \|w\|^2 + 4(l(g)^2 - 1) \delta^2 \sum_{i,j} |a_i a_j|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ii) \quad \langle g(w), f_{\alpha(p)}(w) \rangle &= \sum_i a_i \langle g(w), g(P_i^\lambda) \rangle \\
a_i &\geq 0 \quad a_i \langle g(w), g(P_i^\lambda) \rangle \geq a_i \langle w, P_i^\lambda \rangle - a_i 2(l(g)^2 - 1)(\|w\|^2 + \|P_i^\lambda\|^2) \\
a_i &< 0 \quad a_i \langle g(w), g(P_i^\lambda) \rangle \geq a_i \langle w, P_i^\lambda \rangle + a_i 2(l(g)^2 - 1)(\|w\|^2 + \|P_i^\lambda\|^2) \\
\therefore \langle g(w), f_{\alpha(p)}(w) \rangle &\geq \|w\|^2 - 2(l(g)^2 - 1) \sum_{i=1}^n (\|w\|^2 + \|P_i^\lambda\|^2) |a_i|
\end{aligned}$$

i), ii), iii) より,

$$\begin{aligned}
\|g(w) - f_{\alpha(p)}(w)\|^2 &\leq 4(l(g)^2 - 1) \|w\|^2 \left\{ 1 + \frac{\delta^2}{\|w\|^2} \sum_{i,j} |a_i a_j| + \sum_i \frac{\|w\|^2 + \|P_i^\lambda\|^2}{\|w\|^2} |a_i| \right\} \\
&\leq 4(l(g)^2 - 1) \|w\|^2 \left\{ 1 + 4n^2 \left(\frac{\|w\|}{n! \Theta(\sigma)} \right)^2 + n \cdot 12 \cdot \frac{\|w\|}{n! \Theta(\sigma) \delta} \right\} \\
&\leq 4(l(g)^2 - 1) \|w\|^2 \left\{ 1 + \frac{16}{(n-1)! \Theta(\sigma)^2} + \frac{24}{(n-1)! \Theta(\sigma)} \right\}
\end{aligned}$$

ここで, $\Theta(\sigma) = \frac{\text{vol}(\sigma_\alpha(p))}{(\text{diam}(\sigma_\alpha(p)))^n}$, $|a_i| \leq \frac{\|w\|}{n! \Theta(\sigma) \delta}$ (Whitney [3] IV) とした。証明終り。

補助定理6. $U_\lambda \cap U_\mu \ni p$, $\frac{\delta}{2} < \|w\| < 2\delta$ のとき,

$$\|f_{\alpha(p)}(w) - f_{\mu(p)}(w)\| < \sqrt{l(g)^2 - 1} \|w\| C_2(n)$$

$$\text{ここで, } C_2(n) = \frac{2}{(n-1)! \Theta(\sigma_\mu)} C_1(n).$$

証明. $w = \sum_i a_i P_i^\mu$ とおけば,

$$\begin{aligned}
\|f_{\alpha(p)}(w) - f_{\mu(p)}(w)\| &= \left\| \sum_i a_i f_{\alpha(p)}(P_i^\mu) - \sum_i a_i f_{\mu(p)}(P_i^\mu) \right\| \\
&\leq \sum_i |a_i| \|f_{\alpha(p)}(P_i^\mu) - g(P_i^\mu)\|
\end{aligned}$$

$$\leq \eta \cdot \frac{\|v\|}{n! \Theta(\sigma_n) \delta} \sqrt{(lg)^2 - 1} \|v\| C_1(n) \\ < \frac{\rho}{(n-1)! \Theta(\sigma_n)} \sqrt{(lg)^2 - 1} \|v\| C_1(n)$$

ここで, $C_2(n) = \frac{\rho}{(n-1)! \Theta(\sigma_n)} C_1(n)$. 補助定理 6 を用いた. 証明終り.

補助定理 7. $U_\lambda \cap U_\mu \ni p$, $\frac{\delta}{2} < \|v\| < 2\delta$ に対して,

$$\mathcal{L}(f) < \eta_2 \Rightarrow \|f_{\sigma(p)}(v) - f_{\mu(p)}(v)\|^2 < \|f_{\sigma(p)}(v)\|^2 + \|f_{\mu(p)}(v)\|^2$$

が成立するように η_2 が選べる.

証明. $\|f_{\sigma(p)}\|$, $\|f_{\mu(p)}\|$ を下から評価する. $v = \sum_i a_i P_i^\lambda$

$$1) \|f_{\sigma(p)}(v)\|^2 = \langle f_{\sigma(p)}(v), f_{\sigma(p)}(v) \rangle = \sum_{i,j} a_i a_j \langle g(P_i^\lambda), g(P_j^\lambda) \rangle$$

$$a_i a_j \geq 0 \quad a_i a_j \langle g(P_i^\lambda), g(P_j^\lambda) \rangle \geq -4(lg)^2 - 1) \delta^2 a_i a_j + a_i a_j \langle P_i^\lambda, P_j^\lambda \rangle$$

$$a_i a_j < 0 \quad a_i a_j \langle g(P_i^\lambda), g(P_j^\lambda) \rangle \geq 4(lg)^2 - 1) \delta^2 a_i a_j + a_i a_j \langle P_i^\lambda, P_j^\lambda \rangle$$

$$\sum_{i,j} a_i a_j \langle g(P_i^\lambda), g(P_j^\lambda) \rangle \geq -4(lg)^2 - 1) \delta^2 \sum_{i,j} |a_i a_j| + \|v\|^2$$

$$\therefore \|f_{\sigma(p)}(v)\|^2 \geq \|v\|^2 - 4(lg)^2 - 1) \delta^2 \sum_{i,j} |a_i a_j|$$

$$\geq \|v\|^2 - 4(lg)^2 - 1) \cdot \delta^2 \left(\frac{\rho}{n! \Theta(\sigma_n)} \right)^2 \cdot n^2$$

$$\geq \|v\|^2 \left\{ 1 - 4^3 (lg)^2 - 1) \frac{1}{((n-1)! \Theta(\sigma_n))^2} \right\}$$

$$2) \|f_{\mu(p)}(v)\|^2 \geq \|v\|^2 \left\{ 1 - 4^3 (lg)^2 - 1) \frac{1}{((n-1)! \Theta(\sigma_n))^2} \right\}$$

$$\therefore \|f_{\sigma(p)}(v)\|^2 + \|f_{\mu(p)}(v)\|^2 \geq 2\|v\|^2 \left\{ 1 - 4^3 (lg)^2 - 1) \frac{1}{((n-1)! \Theta(\sigma_n))^2} \right\}$$

$\sigma_n(p)$ と $\mu_n(p)$ は合同であるので $\Theta(\sigma_n) = \Theta(\sigma_\mu)$ とする. ここで補助

定理 6 を用いて,

$$\|v\|^2 (lg)^2 - 1) C_2(n)^2 < 2\|v\|^2 \left\{ 1 - 4^3 (lg)^2 - 1) \frac{1}{((n-1)! \Theta(\sigma_n))^2} \right\}$$

となるようにすればよい.

$$(lg)^2 - 1) \left\{ C_2(n)^2 + \frac{2 \cdot 4^3}{((n-1)! \Theta(\sigma_n))^2} \right\} < 2$$

$$C_3(n) = C_2(n)^2 + \frac{2 \cdot 4^3}{((n-1)! \oplus (n-2)!)^2}$$

$$l(g) < \sqrt{1 + \frac{2}{C_3(n)}}$$

ここで再び補助定理3を用いて.

$$l(f) < \eta_2 = \frac{1}{(1+p)^2} \sqrt{1 + \frac{2}{C_3(n)}} \quad (\eta_2 < \eta_1 \text{ と仮定})$$

とあければよいことになる。証明終り。

補助定理8. $U_\lambda \cap U_\mu \ni p$, $l(f) < \eta_2$ のとき, $\Gamma_p M_1 \ni \forall v \neq 0$

$$\|f_{\lambda(p)}(v) - f_{\mu(p)}(v)\|^2 < \|f_{\lambda(p)}(v)\|^2 + \|f_{\mu(p)}(v)\|^2$$

が成立する。従って, $\angle(f_{\lambda(p)}(v), f_{\mu(p)}(v)) < \frac{\pi}{2}$.

証明. 補助定理7, $f_{\lambda(p)}, f_{\mu(p)}$ の線形性より明らか。

以上の準備で κ_p が non-degenerate であることが示される。

定理. $l(f) < \min\{\eta_1, \eta_2\}$ のとき κ_p は non-degenerate である。

証明. $M_1 \ni \forall p$ に対して, p をおおう local coordinate を $U_{\lambda_1} \cdots U_{\lambda_s}$ とする $\Gamma_p M_1 \ni \forall v \neq 0$ を fix する。

$$H \equiv \{w \in \Gamma_{f(p)} M_2 \mid \langle w, f_{\lambda_1(p)}(v) \rangle > 0\}$$

補助定理1より, $f_{\lambda_1(p)}(v) \neq 0$. 従って $H \neq \emptyset$. H は convex-set であること, 及び $H \neq \emptyset$ は容易にわかる。さらに補助定理8より $f_{\lambda_2(p)}(v) \in H$. 従って $\kappa_p(v) = \sum_{j=1}^s \lambda_{j(p)} f_{\lambda_j(p)}(v) \in H$. 故に $\kappa_p(v) \neq 0$. 証明終り。

κ_p は p に関して連続であったから TM_1 から TM_2 への bundle map を与える。以上で主定理は証明された。

Part II PL-isometric imbedding (imbedding)

Nash [2] は, Riemannian manifold はそれかどのような Riemannian structure を持とうと, manifold の次元にのみ関係する + 分高次元の Euclid space に isometric imbedding されることを示した。ここで我々は Riemannian structure と isometric imbedding される Euclid space の次元との関係について調べたいのであるが, まだ完全な結果は得られていない。その時次のことがまず問題となると思われる。即ち, M を Riemannian manifold とし, R^N に isometric imbedding されていると仮定する。このとき, その Riemannian structure をどのくらいの範囲で変化させるなら, 同じ R^N に isometric imbedding されるかという問題がある。

この問題を解決する最初の手がかりとして, M の R^N 内における多面体近似 K を考える。そして, その頂点間の距離をふらして, どのくらいの変化まで許したら, その変化させた距離をみたす多面体が同じ次元の Euclid space の中に実現できるかを考えてみる。 K における仮定をつけることにすれば次の定理が得られる。

Theorem. K の頂点間の距離を中心とし, その振動の幅を $\Theta_1^2 \cdot \frac{n!(n+1)!}{8\sqrt{n}}$ 以下にすれば, 振動させた距離をみたす多面体 L が R^N 内に存在する。

K は次の条件をみたすと仮定する。

- 1) $\dim K = n$, $N \geq n$.
- 2) $K_0 = \{K \text{ の } 0\text{-dim simplex}\} = \{P_1, \dots, P_m\}$.
- 3) $K_n = \{K \text{ の } n\text{-dim simplex}\} \ni \sigma$ に対し一様に Θ_0 が定まる。 $\Theta(\sigma) \geq \Theta_0 > 0$ $\Theta(\sigma) = \frac{\text{vol}(\sigma)}{\delta_\sigma^n}$, $\delta_\sigma = \text{diam}(\sigma)$.
- 4) $K_0 \ni P_i$ $n_i = \#St(P_i)_0 - 1$ $\#$; 集合の元の個数.
 $n+1 \leq n_i \leq 2n$.
- 5) $K_0 \ni P_i$ に対し一様に Θ_1 が定まる。
 $\Theta(\sigma_{P_i}) \geq \Theta_1 > 0$ $St(P_i)_0 = \{P_i, P_{i1}, \dots, P_{in_i}\}$,
 $\sigma_{P_i} \equiv P_i P_{i1} P_{i2} \dots P_{in_i}$; n_i -simplex.

$K_n \ni \sigma$ の各頂点を変動させて新しく τ を R^n 内に作るとき、それがつぶれないように変動し得る範囲を求める。

Lemma 1. $K_n \ni \sigma$ に対しある $\xi > 0$ が定まり、次が成立する。 $R^N \ni Q_1, \dots, Q_{n+1}$ が $\|Q_i - P_i\| < \xi$ ($i=1, \dots, n+1$) をみたすならば、 $\tau = Q_1 \dots Q_{n+1}$ は non-degenerate n -simplex である。ここで $\sigma = P_1 \dots P_{n+1}$ とする。

Proof. $\text{alt}(P_i)$ を点 P_i から $\sigma_i^{n-1} = P_1 \dots \hat{P}_i \dots P_{n+1}$ によって生成される平面までの距離とすれば、 $\text{vol}(\sigma) = \frac{1}{n!} \cdot \text{alt}(P_i) \cdot \text{vol}(\sigma_i^{n-1})$,
 これより $\text{alt}(P_i) = \frac{n \cdot \text{vol}(\sigma)}{\text{vol}(\sigma_i^{n-1})} \geq \frac{n \cdot \text{vol}(\sigma)}{\frac{1}{(n-1)!} (\delta_\sigma)^{n-1}} = n! \delta_\sigma \Theta(\sigma) \geq n! \delta \Theta_0$ となる。最後の不等式は 3) を用いる。 $\delta = \min_{\sigma \in K_n} \text{diam}(\sigma)$.
 $\text{alt}(P_i) \leq \|P_i - P_j\|$ ($j=1, \dots, \hat{i}, \dots, n+1$) であるので、 $\xi = n! \delta \Theta_0 / 4$

とおけば n -simplex となる。詳細は Whitney [3] IV.

次に K の近くにある K と同型な多面体の集合を考える。

Definition 1. $M \equiv \{(Q_1, \dots, Q_m) \mid Q_i \in \mathbb{R}^N, \|Q_i - P_i\| < \varepsilon\}$

ここで ε は Lemma 1 の ε である。

$U_\varepsilon(P_i) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \|x - P_i\| < \varepsilon\}$ とすれば M は $\prod_{i=1}^m U_\varepsilon(P_i)$ と同型な $N \cdot m$ 次元 manifold で、その点は K と同型な多面体 L とみなすことができる。

次に M の点即ち多面体に対しそのとなり合う頂点間の距離を与える写像を考える。

Definition 2. $P: M \longrightarrow \mathbb{R}^A$ を次のように定義する。

$$P(Q) = (\|Q_{11} - Q_1\|, \|Q_{12} - Q_1\|, \dots, \|Q_{1n_1} - Q_1\|, \\ \|Q_{21} - Q_2\|, \|Q_{22} - Q_2\|, \dots, \|Q_{2n_2} - Q_2\|, \\ \dots, \\ \|Q_{m1} - Q_m\|, \|Q_{m2} - Q_m\|, \dots, \|Q_{mn_m} - Q_m\|)$$

ここで $S_t(Q_k)_0 = \{Q_k, Q_{k1}, \dots, Q_{kn_k}\}$, $Q = (Q_1, \dots, Q_m)$.

$\wedge$ は一度出た頂点間の距離ははぶくという記号である。上述において、1 段目の個数を n_1^* , 2 段目の個数を n_2^* , $\dots$, m 段目の個数を n_m^* とすれば, $n_1^* = n_1$, $n_2^* \leq n_2$, $\dots$, $n_m^* = 0$ であり, $A = n_1^* + n_2^* + \dots + n_m^* = \frac{1}{2}(n_1 + n_2 + \dots + n_m)$ となる。仮定 4) より, $n \cdot m \geq A \geq \frac{n+1}{2} \cdot m$ 。

これで $N \cdot m$ 次元 manifold M から A 次元 manifold R^A への微分可能写像ができた。さらに P の線形化写像 dP を定義しておく。

Definition 3. $dP: T_K M \longrightarrow T_{P(K)} R^A$ を次のように定義する。ただし $K = (P_1, \dots, P_m)$ とみなす。

$$dP(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (P(K + \varepsilon t) - P(K))$$

$$t = (t_1, \dots, t_m) \in T_K M, \quad t_i \text{ vector in } R^N$$

以上で準備はできた。我々の問題は言い換えると、 K の M における近傍 U を適当にとれば $P(U)$ は R^A で open set になっているかということである。そのためには次の Lemma が必要である。

Lemma 2. $dP: T_K M \longrightarrow T_{P(K)} R^A$ は onto-map である。

Proof. $T_{P(K)} R^A \ni e_1, \dots, e_A$ を standard な base とするとき、これらの vector に写るような vector が $T_K M$ でさがすことができることを示す。ここでは e_1 に写る $T_K M$ の vector の構成法を示す。Set $(P_1)_0 = \{P_1, P_{11}, P_{12}, \dots, P_{1n_1}\}$ としておく。

$$\pi_j = \{v \in R^N \mid v \perp \overrightarrow{P_1 P_{1j}}\} \quad (j = 1, \dots, n_1)$$

とすれば、 $\dim \pi_j = N - 1$ 。さらに次のことが成立する。

$$\dim \pi_2 \cap \dots \cap \pi_{n_1} = N - (n_1 - 1)$$

これは数学的帰納法と仮定 5) を用いて示される。仮定 1), 4) によって $N - (n_1 - 1) > 0$ であるので、 R^N の直交分解ができる。

$$R^N = \pi_{i_2} \wedge \cdots \wedge \pi_{i_{n_1}} \oplus \{ \vec{P}_{i_2}, \dots, \vec{P}_{i_{n_1}} \}$$

$\vec{P}_{i_1}, \dots, \vec{P}_{i_{n_1}}$ は仮定より一次独立である。 $\vec{P}_{i_1} \notin \{ \vec{P}_{i_2}, \dots, \vec{P}_{i_{n_1}} \}$. 故に,

$$\vec{P}_{i_1} = t_{i_1} \oplus \alpha, \quad t_{i_1} \neq 0, \quad t_{i_1} \in \pi_{i_2} \wedge \cdots \wedge \pi_{i_{n_1}},$$

と分解できる。再び仮定より, $\sigma_{i_1}^{n_1-1} = P_{i_2} \cdots P_{i_{n_1}}$, $\sigma_{i_1}^{n_1} = P_{i_1}$.

$P_{i_2} \cdots P_{i_{n_1}}$ はつぶれない simplex である。

$$f_{i_1} = \text{alt}(P_{i_1}) = \frac{n_1 \cdot \text{vol}(\sigma_{i_1}^{n_1})}{\text{vol}(\sigma_{i_1}^{n_1-1})}$$

とあけば, 直交分解の性質より次が成立する。

$$\left\langle \frac{t_{i_1}}{\|t_{i_1}\|}, \frac{P_{i_1} - P_{i_1}}{\|P_{i_1} - P_{i_1}\|} \right\rangle = \frac{f_{i_1}}{\|P_{i_1} - P_{i_1}\|}$$

$T_K M \ni (t_{i_1}, 0, \dots, 0) = \tilde{v}$ とあけば,

$$dP(\tilde{v}) = \left(\left\langle t_{i_1}, \frac{P_{i_1} - P_{i_1}}{\|P_{i_1} - P_{i_1}\|} \right\rangle, \left\langle t_{i_1}, \frac{P_{i_1} - P_{i_2}}{\|P_{i_1} - P_{i_2}\|} \right\rangle, \dots, \left\langle t_{i_1}, \frac{P_{i_1} - P_{i_{n_1}}}{\|P_{i_1} - P_{i_{n_1}}\|} \right\rangle, \right. \\ \left. \left\langle 0, \frac{P_{i_2} - P_{i_2}}{\|P_{i_2} - P_{i_2}\|} \right\rangle, \left\langle 0, \frac{P_{i_2} - P_{i_3}}{\|P_{i_2} - P_{i_3}\|} \right\rangle, \dots, \left\langle 0, \frac{P_{i_2} - P_{i_{n_2}}}{\|P_{i_2} - P_{i_{n_2}}\|} \right\rangle, \right. \\ \dots$$

$$\left. \left\langle 0, \frac{P_{i_m} - P_{i_{m_1}}}{\|P_{i_m} - P_{i_{m_1}}\|} \right\rangle, \left\langle 0, \frac{P_{i_m} - P_{i_{m_2}}}{\|P_{i_m} - P_{i_{m_2}}\|} \right\rangle, \dots, \left\langle 0, \frac{P_{i_m} - P_{i_{m_{n_m}}}}{\|P_{i_m} - P_{i_{m_{n_m}}}\|} \right\rangle \right) \\ = \left(\frac{\|t_{i_1}\|}{\|P_{i_1} - P_{i_1}\|} f_{i_1}, 0, \dots, 0 \right)$$

$$\left\langle t_{i_1}, \frac{P_{i_1} - P_{i_2}}{\|P_{i_1} - P_{i_2}\|} \right\rangle = \dots = \left\langle t_{i_1}, \frac{P_{i_1} - P_{i_{n_1}}}{\|P_{i_1} - P_{i_{n_1}}\|} \right\rangle = 0 \text{ は } t_{i_1} \in \pi_{i_2} \wedge \cdots \wedge \pi_{i_{n_1}} \text{ より明らか。}$$

dP は linear だから $v_1 = \frac{\|P_{i_1} - P_{i_1}\|}{\|t_{i_1}\| f_{i_1}} \tilde{v}$ とあけば,

$$dP(v_1) = e_1$$

となる。同様に, $v_2, \dots, v_m$ が構成でき $dP(v_i) = e_i$ となる。

これで dP の onto は示された。証明終り。

Theorem 1. $P: M \rightarrow R^A$ は open map である。

Proof. Lemma 2 より陰函数定理が用いることができるので証明できたことになる。

これで openness は示された。

次に重要なことは頂点間にとえられた距離がどのくらいの範囲にわたって振動し得るかということである。そのためには dP の逆写像を構成し、そのノルムを求めなければならぬ。

Definition 4. $G: T_{P(k)} R^A \rightarrow T_k M$ を次のように定義する。
 $G(e_i) = v_i \quad (i = 1, \dots, A)$

Lemma 3. $T_k M = \{t = (t_1, \dots, t_m) \mid t_i \in R^{N_i}\}$ のノルムを $\|t\|^2 = \sum_{i=1}^m \|t_i\|^2$ とすると、

$$\|G(x)\| \leq \sqrt{2n} \cdot \frac{2\delta}{A} \|x\| \quad x \in T_{P(k)} R^A$$

が成立する。 $A = \min_{j \in \{1, \dots, n_i\}} h_{ij}$, $\delta = \min_{\sigma \in K_n} \text{diam}(\sigma)$.

Proof. $T_{P(k)} R^A \ni x = a_1 e_1 + \dots + a_A e_A$.

$$\|G(x)\|^2 = \|a_1 v_1 + \dots + a_A v_A\|^2$$

$$= \|a_{11} \frac{\|P_1 - P_{11}\|}{\|t_{11}\| h_{11}} t_{11} + \dots + a_{1n_1} \frac{\|P_1 - P_{1n_1}\|}{\|t_{1n_1}\| h_{1n_1}} t_{1n_1}\|^2$$

$$+ \|a_{21} \frac{\|P_2 - P_{21}\|}{\|t_{21}\| h_{21}} t_{21} + \dots + a_{2n_2} \frac{\|P_2 - P_{2n_2}\|}{\|t_{2n_2}\| h_{2n_2}} t_{2n_2}\|^2$$

...

$$+ \|a_{m1} \frac{\|P_m - P_{m1}\|}{\|t_{m1}\| h_{m1}} t_{m1} + \dots + a_{mn_m} \frac{\|P_m - P_{mn_m}\|}{\|t_{mn_m}\| h_{mn_m}} t_{mn_m}\|^2$$

$$\leq \eta_1^* \left[a_{11}^2 \left(\frac{\|P_1 - P_{11}\|}{h_{11}} \right)^2 + \dots + a_{1n_1}^2 \left(\frac{\|P_1 - P_{1n_1}\|}{h_{1n_1}} \right)^2 \right]$$

$$+ \eta_2^* \left[a_{21}^2 \left(\frac{\|P_2 - P_{21}\|}{h_{21}} \right)^2 + \dots + a_{2n_2}^2 \left(\frac{\|P_2 - P_{2n_2}\|}{h_{2n_2}} \right)^2 \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \eta_m^* \left[a_{m1}^2 \left(\frac{\|P_m - P_{m1}\|^2}{\lambda_{m1}} \right) + \hat{\cdot} \cdot \hat{\cdot} + a_{mn}^2 \left(\frac{\|P_m - P_{mn}\|^2}{\lambda_{mn}} \right) \right] \\
& \leq 2n \cdot \max \left(\frac{\|P_i - P_j\|^2}{\lambda_{ij}} \right) \cdot (a_1^2 + \dots + a_n^2) \\
& \leq 2n \cdot \frac{(2\delta)^2}{\lambda^2} \|x\|^2 \\
& \therefore \|G(x)\| \leq \sqrt{2n} \frac{2\delta}{\lambda} \|x\|
\end{aligned}$$

$\therefore \lambda = \min \lambda_{ij}$, $\|P_i - P_j\| \leq 2\delta$ とおいた。

この評価式で $\|x\|$ の変化がどのくらいならば, $\|G(x)\|$ の変化がどのくらいであるかがわかった。これから $G(x)$ が $\exp_k$ の cut-locus 以内に入るためには x をどれくらいまで制限したらよいかわかる。

Lemma 4. $D(\exp_k) = \{t = (t_1, \dots, t_m) \mid \|t\| < \xi\}$ とおく。

$\exp_k : D(\exp_k) \longrightarrow M$ diffeomorphic

となる。

Proof. $M \cong \prod_{i=1}^m U_{\xi}(P_i)$ $T_k M \cong \prod_{i=1}^m T_{P_i} U_{\xi}(P_i)$ より明らか。

Theorem 2. K の頂点間の距離を中心とし, その振動の幅を $\frac{n!(n+1)!}{8\sqrt{2n}} \cdot \delta \cdot \Theta^2$ 以下にすれば, 振動させた距離をみたす多面体 L が R^n 内に存在する。

Proof. Lemma 4. Lemma 3 より $G(x) \in D(\exp_k)$ となるような x の範囲を求めればよい。 $\sqrt{2n} \frac{2\delta}{\lambda} \|x\| < \xi$ ならば $\|G(x)\| < \xi$ 従って, $G(x) \in D(\exp_k)$. Lemma 1 より $\xi = \frac{n! \delta \Theta_0}{4}$. $\lambda \leq \delta \cdot \Theta_1 \cdot (n+1)! \cdot \Theta_0 \geq \Theta_1$, [Whitney[3] IV] より $\|x\| < \frac{n!(n+1)!}{8\sqrt{2n}} \delta \cdot \Theta^2$ とすればよい。

参考文献

- [1] Sikata. On a distance function on the set of differentiable structure.
- [2] Nash. The imbedding problem for Riemannian manifolds.
- [3] Whitney. Geometric Integration Theory.