

A construction of the Rudvalis graph from the Fano plane

小林 雄介 (千葉大学大学院融合理工学府)

Yusuke Kobayashi

Graduate School of Science and Engineering,
Chiba University

1 はじめに

本稿では散在型単純群のひとつである Rudvalis 群 Ru と Fano plane との関係性について述べる.

Ru は 4060 点上の rank 3 の置換表現をもち, そこからパラメータ (4060, 1755, 730, 780) の強正則グラフ Γ が得られる. Γ は最大サイズの clique として 28-clique (Hoffman bound と一致) をもち, その固定部分群は $G = 2^{3+8} : L_3(2)$ という形をしている. これは Ru の極大部分群のひとつである.

$$2^{3+8} : L_3(2) \subset Ru$$

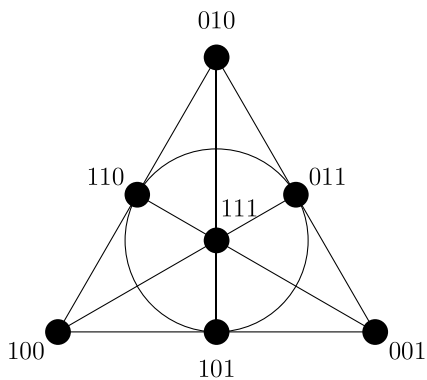
G の正規部分群 $H = 2^{3+8}$ は special 群 ($Z(H) = H' = \Phi(H) \cong 2^3$) であり, あまり注目されたことのない群である. 本稿ではこの special 群 H が Fano plane の point と flag を用いて構成できることを述べる. これによって H を組合せ論的対象として扱うことができるようになる.

本研究の最終目標はこの Fano plane からできる H を素材として用いて 4060 点上のグラフ Γ を構成することである. 現在そこまでは至っていないが, 大まかな方針・予想について後で記すことにする.

2 Fano plane

$K := \mathbb{F}_2^3$ とする.

$P := K - \{\mathbf{0}\}$ と $L := \{l - \{\mathbf{0}\} \mid l \text{ は } K \text{ の } 2 \text{ 次元部分空間} \}$ をそれぞれ **point** と **line** の集合と呼び, この組 (P, L) を **Fano plane** という.

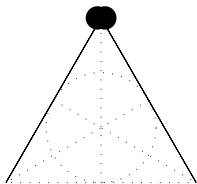


Fano plane には次のような特徴がある.

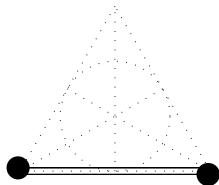
- 各 point は 3 本の line に含まれる.
- 各 line は 3 個の point を含む.
- 2 つの異なる point は唯 1 つの line に含まれる.
- 2 つの異なる line は唯 1 つの point を共通に含む.

$F = \{ (p, l) \in P \times L \mid p \in l \}$ とし, この元を **flag** という. $|F| = 7 \times 3 = 21$ である. F の異なる 2 つの元 $(p, l), (p', l')$ に対して次の 4 通りの状況がある.

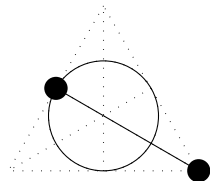
(a) $p = p'$



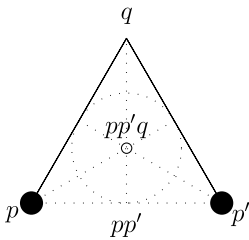
(b) $l = l'$



(c) $p \neq p'$ かつ $l \neq l'$ かつ $p \in l'$ (または $p' \in l$)



(d) その他



3 Fano planeを用いた $H = 2^{3+8}$ の構成

$K = \mathbb{F}_2^3$ と flag の集合 F を生成元として群 $H = 2^{3+8}$ と同型な群を構成する. なお、ここからは $0 \in K$ を 1_H (単位元) と書くことにし、 K での和 $p + q$ を積の形 pq で表すことにする.

次のように $K \cup F$ の間に関係式を定める.

- K は通常通り群 2^3 をなしているとする.
- K の各元は全ての F の元と可換.
- 任意の $(p, l) \in F$ に対して, $(p, l)^2 = 1_H$.
- F の異なる 2 つの元 $(p, l), (p', l')$ に対してその交換子は

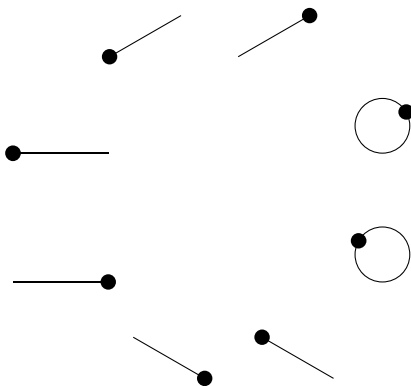
$$\begin{aligned} \text{(a), (b)} &\Rightarrow 1_H \\ \text{(c)} &\Rightarrow p \text{ (または } p') \\ \text{(d)} &\Rightarrow pp'q. \end{aligned}$$

- 各 $p_0 \in P, l_0 \in L$ に対して

$$\begin{aligned} \prod_{p_0 \in l} (p_0, l) &= p_0 \\ \prod_{p \in l_0} (p, l_0) &= 1_H. \end{aligned}$$

このようにして得られたものが H と同型な群であることが確かめられた. ここからはそれを H だと思ふことにする. このとき $Z(H) = H' = \Phi(H) = K$ であり, また $\text{Aut}(P, L) \cong L_3(2)$ は自然に $\text{Aut}(H)$ の部分群だと思ふことができる.

F の元を 1 つ選び固定する (ここでは $\uparrow$ とする). このとき $\uparrow$ との関係が (d) となる flag が次の 8 個である.



隣り合う 2 つは point または line を共有するように 8 角形に並べている. これら 8 個から他の F の元を上記の関係式から復元することも簡単に確かめられる. したがってこの 8 個だけで H を生成することが可能であり, これが群 2^{3+8} の “8” の意味である.

$x \in H$ と $\sigma \in \text{Aut}(P, L)$ に対して

$$\begin{array}{ll} H & H \\ \cup & \cup \\ y & \mapsto xy \quad (\text{平行移動}) \\ y & \mapsto y^\sigma \quad (H \text{ の自己同型}) \end{array}$$

と作用させることにすると, H と $\text{Aut}(P, L)$ を H 上の置換群と思ふことができる. この 2 つを組み合わせると H 上の置換群として Ru の極大部分群のひとつである $G = 2^{3+8} : L_3(2)$ が得られる.

4 $H = 2^{3+8}$ を用いた Rudvalis グラフの構成

Ru の極大部分群のひとつである $G = 2^{3+8} : L_3(2)$ を Rudvalis graph Γ に作用させると, Γ の頂点 4060 点は 28, 448, 3584 点に軌道分解される (28 点の軌道は 28-clique である). したがって今回の $H = 2^{3+8}$ を用いた構成でも 3 種類の頂点を用意することになる. G の作用の様子や 3 種類の頂点の固定部分群の情報から, 頂点の作り方についてはある程度見通しが立っているのでそちらについては紹介したいと思う.

G による Γ の辺の軌道分解は 31 種類と非常に多く記述の仕方もまだ綺麗にまとめられていないので, 辺については 28-clique がらみについてだけ述べるに留め, また構成したグラフが実際に Γ と同型になるかどうかは結果が分かり次第追って報告したい.

4.1 3584 点の構成

line $l_0 \in L$ に対して

$$L_{l_0} := \langle (p, l_0) \in F \mid p \in l_0 \rangle$$

と定めると, $L_{l_0} \cong 2^2$ であり, また $[H : L_{l_0}] = 2^{11}/2^2 = 512 = 3584/7$ である.

$$O_{3584} := \bigcup_{l \in L} H/L_l$$

とし, この 3584 点の集合を構成したいグラフの 1 種類目の頂点とする.

4.2 28 点の構成

flag $(p, l) \in F$ に対して

$$F_{p,l} := \{ x \in H \mid [x, (p, l)] \in l \cup \{1_H\} \} \quad ([,] \text{ は交換子})$$

と定めると, これは H の指数 2 の部分群となる.

次に $AF = \{ (p, l) \in P \times L \mid p \notin l \}$ とし, この元を **anti-flag** という. $|AF| = 7 \times 4 = 28$ である. anti-flag $(p, l) \in AF$ に対して

$$\mathcal{A}_{l,p} := \left\{ (l', C_{l,p}^{l'}) \mid l' \in L - \{l\} \right\}$$

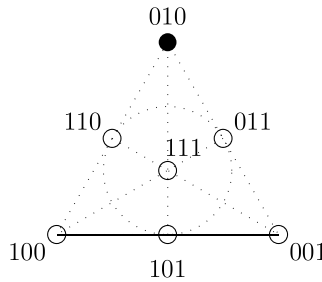
とする. ただし, $l \cap l' = \{p'\}$ としたとき

$$C_{l,p}^{l'} := \begin{cases} F_{p',l} & \text{if } p \in l' \\ H - F_{p',l} & \text{if } p \notin l' \end{cases}$$

と定めている. $\mathcal{A}_{p,l}$ ではなく $\mathcal{A}_{l,p}$ と書いているのは後で辺を定める際に p よりも l の方が情報としての価値が高いからである.

例 1. anti flag $(p, l) = (010, \text{---})$ に対して,

$$\mathcal{A}_{l,p} = \left\{ \begin{array}{ll} (\text{---}, F_{100,l}), & (\text{---}, H - F_{100,l}), \\ (\text{---}, F_{101,l}), & (\text{---}, H - F_{101,l}), \\ (\text{---}, F_{001,l}), & (\text{---}, H - F_{001,l}) \end{array} \right\}.$$



ここで

$$O_{28} := \{ A_{l,p} \mid (p, l) \in AF \}$$

とし、この 28 点の集合を構成したいグラフの 2 種類目の頂点とする.

O_{28} は 28-clique になっているものとし、また $A_{l,p} \in O_{28}$ と $xL_{l'} \in O_{3584}$ は $l \neq l'$ かつ $xL_{l'} \subset C_{l,p}^{l'}$ のとき辺でつなぐようにして O_{28} と O_{3584} との間の隣接関係を定める.

4.3 448 点の構成

point $p_0 \in P$ に対して

$$P_{p_0} := \langle q \cdot (p_0, l) \mid p_0 \in l \in L, q \in l - \{p_0\} \rangle$$

と定めると、 $P_{p_0} \cong 2^3$ であり、 $P_{p_0} \cap P = \{p_0\}$ である.

anti-flag $(p, l) \in AF$ に対して H のとある部分群 $A_{p,l}$ を定義したいのだが、一般の $(p, l) \in AF$ での定義は少々複雑になってしまうので、 $(p, l) = (010, \text{---})$ のときの $A_{p,l}$ を与え、そこに $\text{Aut}(P, L)$ を作用させて他の $A_{p,l}$ を定義することにする.

$(p, l) = (010, \text{---})$ のときの $A_{p,l}$ を次で定める.

$$A_{p,l} := \langle P_p, \bullet \cdot \diagup \cdot \bigcirc \cdot \diagdown, 101 \cdot \diagup \cdot \bullet \cdot \bigcirc \cdot \diagdown, 101 \cdot \diagup \cdot \bigcirc \cdot \bullet \cdot \diagdown \rangle.$$

$A_{p,l}$ は P_p に 3 つの元を付け加えてできていて、その元たちを左から g_1, g_2, g_3 と名付けることにする. これらの中で登場する flag の line は全て p を含まず、そして l でない.

g_1 に登場する flag の point は全て l に含まれており、またその 3 つの flag は互いの交換子が p になっている. したがって $g_1^2 = p$ であり、 g_1 の flag を並び替えても p 倍の変化しか起こらないので、 $A_{p,l}$ には影響を与えない.

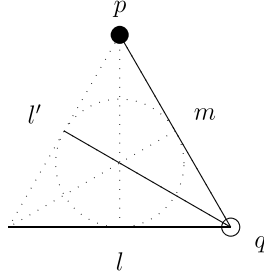
g_2 と g_3 に登場する flag の point はどれも l に含まれず、3 つの flag は互いに (c) の関係となっている. したがって互いの交換子は 110, 011, 111 となるので $g_2^2 = g_3^2 = p$ となる. g_2 と g_3 の先頭には $101 \in P$ がかけてあるが、これは登場する 3 つの flag の真ん中のものの line $\bigcirc$ と l との共通部分である. flag を並び替えても p 倍の差を無視すればこの法則が保たれることが確認できるので、 $A_{p,l}$ には影響を与えない.

$|A_{p,l}| = 2^5$ で $A_{p,l} \cap P = \{p\}$ となっている. $A_{p,l}$ たちは p が等しければ次の補題のように共役で移りあう.

補題 1. $(p, l), (p, l')$ を AF の異なる元とする. $l \cap l' = \{q\}$ とし. p, q を含む line を m とする. このとき

$$A_{p,l}^{(q,m)} = A_{p,l'}$$

が成り立つ.



最後に anti-flag $(p, l) \in AF$ に対して $\tilde{A}_{p,l}$ を次のように定める.

$$\tilde{A}_{p,l} := \{ A_{p,l} \} \cup \{ (q, m)A_{p,l'} \mid q, l', m \text{ は上の図の関係} \}.$$

例 2. $(p, l_1, l_2, l_3, l_4) = (010, \text{—}, \searrow, \swarrow, \circ)$ とすると

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{p,l_1} &= \left\{ A_{p,l_1}, \swarrow A_{p,l_2}, \nwarrow A_{p,l_3}, \downarrow A_{p,l_4} \right\}, \\ \tilde{A}_{p,l_2} &= \left\{ \swarrow A_{p,l_1}, A_{p,l_2}, \downarrow A_{p,l_3}, \nwarrow A_{p,l_4} \right\}, \\ \tilde{A}_{p,l_3} &= \left\{ \nwarrow A_{p,l_1}, \downarrow A_{p,l_2}, A_{p,l_3}, \swarrow A_{p,l_4} \right\}, \\ \tilde{A}_{p,l_4} &= \left\{ \downarrow A_{p,l_1}, \nwarrow A_{p,l_2}, \swarrow A_{p,l_3}, A_{p,l_4} \right\}. \end{aligned}$$

$\tilde{A}_{p,l}$ たちは p が等しければ次の補題のように平行移動で移りあう.

補題 2. 補題 1 の仮定のもとで次が成り立つ.

$$(q, m)\tilde{A}_{p,l} = A_{p,l'}.$$

補題 1 より

$$|\{x\tilde{A}_{p,l} \mid x \in H\}| = 2^{11}/2^5 = 64$$

であり, さらに

$$O_{448} := \left\{ x\tilde{A}_{p,l} \mid x \in H, (p, l) \in AF \right\}$$

としたとき補題 2 より $|O_{448}| = 64 \times 7 = 448$ となる. この 448 点の集合を構成したいグラフの 3 種類目の頂点とする.

$A_{l,p} \in O_{28}$ と $x\tilde{A}_{p',l'} \in O_{448}$ は $p' \in l$ のとき辺でつながるようにして O_{28} と O_{448} との間の隣接関係を定める.