

## 格子巡回セールスマン問題の近似解法について

電 気 通 信 大 学      三 上 完 治 ( Kanji Mikami )  
 電 気 通 信 大 学      町 田   元 ( Hajime Machida )

## 1 はじめに

これまでに、多くのNP完全問題が知られているが、その中に、巡回セールスマン問題 ( Traveling Salesman Problem ) と呼ばれる問題がある。これは、一般の重み付グラフに対して、すべての頂点を通る距離最小の閉路を求める問題である。本論文では、その一つの変形である格子巡回セールスマン問題について考察する。この問題は、入力を一般のグラフではなく、平面格子上に与えられたグラフに限定した巡回セールスマン問題である。これを現実にも照らし合わせて考えると、例えば、車などである都市の内部を移動する場合を思い浮かべることができよう。このような場合を考えると、格子巡回セールスマン問題に課せられた制約は、自然な制約であるといえるであろう。この問題における入力とその解の一例を図1に示す。さらに、平面格子上の問題として扱うことのできない、一般の巡回セールスマン問題の入力例を図2に示す。この例により、格子巡回セールスマン問題に対する入力のクラスは、一般の巡回セールスマン問題に対する入力のクラスよりも真に制限されたクラスであることがわかる。

ところが、格子巡回セールスマン問題についても、一般の巡回セールスマン問題と同様NP完全であることが、M.R.Garey, R.L.Graham and D.S.Johnson [4] によって証明されている。従って、格子巡回セールスマン問題に対する最適解を、多項式時間で求めるアルゴリズムは存在しない、と予想される。そこで、よい近似解法を考えて、その効率の解析を行なう意味が生じてくる。格子巡回セールスマン問題のみを対象とする近似解法は、これまであまり調べられていないが、一般の巡回セールスマン問題に対する近似解法を格子巡回セールスマン問題に適用することは、もちろん可能である。例えば、一般の巡回セールスマン問題に対して、N.Christofides [1] が開発した、Minimum Length Spanning TreeとMinimum Length Perfect Matching を利用する近似解法は、これまで知られている中で、最悪の場合の近似の精度がもっともよい方法である。( N.Christofides [1] は、この方法による近似解の最適解に対する比が $3/2$ 倍以下であることを証明した。 ) さらに、この方法に関して G.Cornuejols and G.L.Nemhauser [2]

は、一般の巡回セールスマン問題において近似解の最適解に対する比が、 $(3m-1)/2m$ 倍以下であるという結果を示した。ここで、 $m$ は入力点の個数を $n$ とすると、 $m = \lfloor n/2 \rfloor$ である。また、この方法を格子巡回セールスマン問題に適用した場合でも、最悪の精度を示す入力例、すなわち、近似解の最適解に対する比が実際に $(3m-1)/2m$ となる例が存在することを示した。現在のところ、最悪の場合の精度が $(3m-1)/2m$ 、すなわち、およそ $3/2$ よりよくなるような近似解は知られていない。

本論文では、新たに、格子巡回セールスマン問題に対して包囲法という近似アルゴリズムと、それを修正した $j$ -包囲法という近似アルゴリズムを考え、これらについて精度の解析を試みる。包囲法とは、第1段階として、入力点の集合 $V$ をすべて囲む最小の閉路を考え、この閉路を距離をふやさないようにしながらできるだけ内部に変形する。第2段階として、閉路の内部に残った点をその位置関係によりいくつかの集団に分け、それらの集団の中で、点を最も多く含む集団について、その集団を取り囲むように閉路の変形をする操作を行う。この操作は再帰的に実行する。一方、 $j$ -包囲法は、包囲法の第1段階のあと、閉路の内部の点について、他の点との距離がある間隔以上の内部の点を $j$ 個とり、包囲法の第1段階による閉路とその $j$ 個の点との最適解を求め、さらに、包囲法の第2段階を行う、という近似解法である。従って、特に $j=0$ のときの $j$ -包囲法、つまり、 $0$ -包囲法とは包囲法のことである。以上の包囲法、 $j$ -包囲法という近似アルゴリズムを示し、さらに、 $j$ -包囲法の解析を行う。定理2において、 $j$ -包囲法に

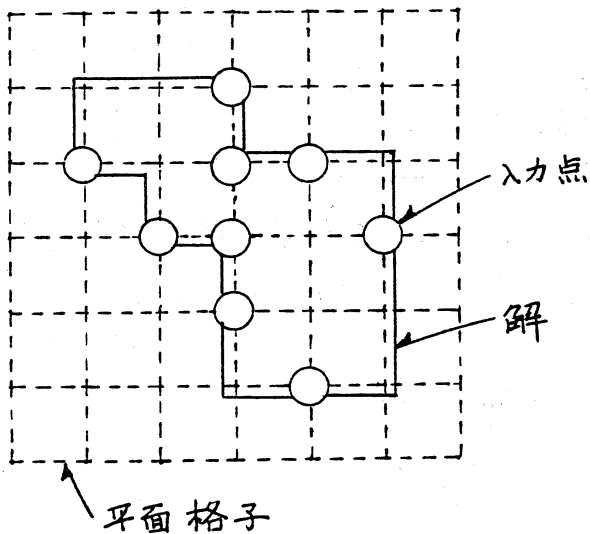


図1. 格子巡回セールスマン問題の例

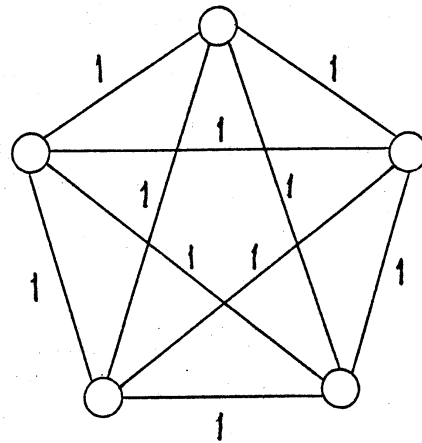


図2. 平面格子上で扱えない一般グラフの例

よって得られる近似解は最適解の高々  $1 + 8k/j$  倍であることを示す。ここで、 $j$  はあらかじめ任意に定める定数 ( $j \geq 1$ ) であり、 $k$  は部分包囲という手続きを呼び出す回数である。なお、これまでに発表されているいくつかの近似解法について、それらに対して最悪の振舞をする入力例に、包囲法または  $j$ -包囲法を適用した場合、どの入力についても極めて精度の高い近似解が得られることがわかっている。

## 2 諸定義及び近似アルゴリズムについて

この章において、問題及び用語の定義を行い、近似アルゴリズムに関するいくつかの手続き、及び、近似アルゴリズム包囲法、 $j$ -包囲法を示す。

### 2-1 問題及び用語の定義

まず、格子巡回セールスマン問題 ( Rectilinear Traveling Salesman Problem ) の定義を行う。

#### 格子巡回セールスマン問題

平面上の  $n$  点からなる集合  $V \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  が入力として与えられる。(ただし、 $\mathbb{Z}$  は整数全体の集合を表す。) その時、

$$C = \left[ \sum_{i=1}^{n-1} d(v_{\pi(i)}, v_{\pi(i+1)}) \right] + d(v_{\pi(n)}, v_{\pi(1)})$$

を最小にする  $n$  個の点の列  $\langle v_{\pi(1)}, v_{\pi(2)}, \dots, v_{\pi(n)} \rangle$  及び、その時の  $C$  の値を求める。ここで、距離  $d(v_i, v_j)$  は次のように定める。2点  $v_i = (v_{i1}, v_{i2})$ ,  $v_j = (v_{j1}, v_{j2}) \in V$  に対して、 $d(v_i, v_j) = |v_{i1} - v_{j1}| + |v_{i2} - v_{j2}|$  である。

この問題は、間隔1の平面格子上に点を与えられており、その格子を通る巡回セールスマン問題と見なすことができる。(図1参照) ここで、 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  に属する点を格子点と呼ぶ。また、特に格子巡回セールスマン問題の入力として与えられる格子点を、入力点または単に点と呼ぶ。

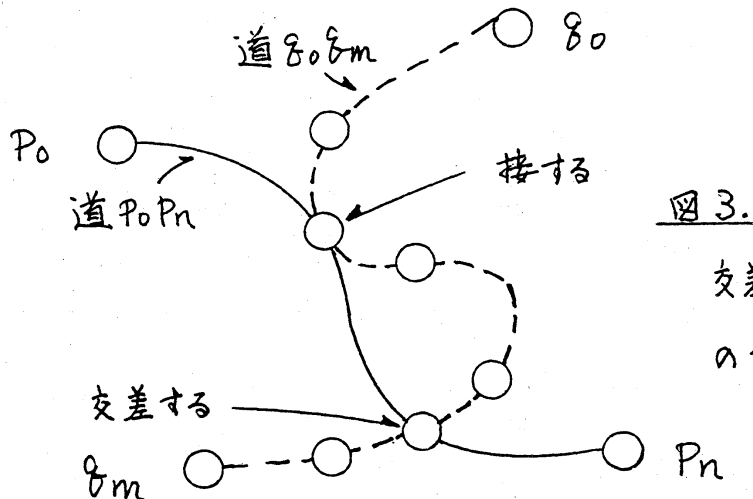


図 3.  
交差する道, 接する道  
の例

ある格子点  $p$  において、 $p$  からの距離が 1 であるような相異なる格子点が 4 つ存在する。これらの格子点を  $p$  に隣接する格子点と呼ぶ。

さらに、格子点の列  $p_0 p_1 \cdots p_n$  ( $n \geq 0$ ) が道であるとは、 $p_i$  と  $p_{i+1}$  ( $0 \leq i \leq n-1$ ,  $n > 0$ ) が互いに隣接していることである。 $n=0$  のときは、道は一つの格子点のみからなる。特に、道  $p_0 p_1 \cdots p_n$  において始点と終点のみに着目するとき、単に道  $p_0 p_n$  と省略することがある。ここで、道  $p_0 p_1 \cdots p_n$  の距離は  $n$  である。また、道  $p_0 p_n$  の部分道とは、格子点の列  $p_0 p_1 \cdots p_n$  の連続した一つ以上の格子点からなる部分列をいう。さらに、道  $p_0 p_1 \cdots p_n$  が単純道であるとは、 $i \neq j$  ( $0 \leq i, j \leq n$ ) ならば  $p_i \neq p_j$  であることをいう。

次に交差に関する定義を行う。単純道  $p_0 p_1 \cdots p_n$  ( $n \geq 2$ ) において、 $p_0$  から  $p_n$  に向けて方向付けされているものとする。さらに、単純道  $p_0 p_n$  と異なる道  $q_0 q_1 \cdots q_m$  ( $m \geq 2$ ) が、単純道  $p_0 p_n$  と共有する部分道をもつとし、この部分道を道  $q_0 q_m$  における部分道  $q_i q_{i+1} \cdots q_j$  ( $1 \leq i \leq j \leq m-1$ ) とする。このとき、共有する部分道  $q_i q_j$  が存在し、 $q_i \neq p_0$ ,  $q_i \neq p_n$ ,  $q_j \neq p_0$ ,  $q_j \neq p_n$  であり、 $q_{i-1}$  と  $q_{j+1}$  が  $p_0 \rightarrow p_n$  の方向に見て、左右相異なる側にあるとき、単純道  $p_0 p_n$  は道  $q_0 q_m$  と交差するという。このときの共有する部分道  $q_i q_j$  を交差点列という。また、共有する部分道  $q_i q_j$  が存在し、 $q_i \neq p_0$ ,  $q_i \neq p_n$ ,  $q_j \neq p_0$ ,  $q_j \neq p_n$  であり、 $q_{i-1}$  と  $q_{j+1}$  が  $p_0 \rightarrow p_n$  の方向に見て、左右同じ側に属するとき、単純道  $p_0 p_n$  は道  $q_0 q_m$  と接するという。このときの共有する部分道  $q_i q_j$  を接点列という。これらを図 3 に示す。

同様に、道  $p_0 p_1 \cdots p_n$  ( $n \geq 2$ ) が、道  $q_0 q_1 \cdots q_m$  ( $m \geq 2$ ) と交差するとは、道  $p_0 p_n$  において道  $q_0 q_m$  と交差する単純部分道が存在することである。また、同様に、道  $p_0 p_n$  が道  $q_0 q_m$  と接するとは、道  $p_0 p_n$  において道  $q_0 q_m$  と接する単純部分道が存在することである。

さらに、道  $p_0 p_1 \cdots p_n$  ( $n \geq 0$ ) において、 $p_0 = p_n$  のとき、この道  $p_0 p_n$  を周 (閉路) という。周  $p_0 p_1 \cdots p_n p_0$  において、次の (I) ~ (III) をみたす部分道  $p_{s_1} \cdots p_{s_2}$ , 部分道  $p_{t_1} \cdots p_{t_2}$  が存在するとき、周  $p_0 p_1 \cdots p_n p_0$  は、自己交差するという。(I)  $0 \leq s_1 < s_2 < t_1 < t_2 \leq n$ , (II) 部分道  $p_{s_1} \cdots p_{s_2}$  または、部分道  $p_{t_1} \cdots p_{t_2}$  が単純部分道、(III) 部分道  $p_{s_1} \cdots p_{s_2}$  と部分道  $p_{t_1} \cdots p_{t_2}$  は交差する。さらに、周において自己交差する回数を、この周の交差数という。また、自己交差の定義の (III) において、交差するのではなく、接する場合を、自己接触するという。これらを図 4 に示す。

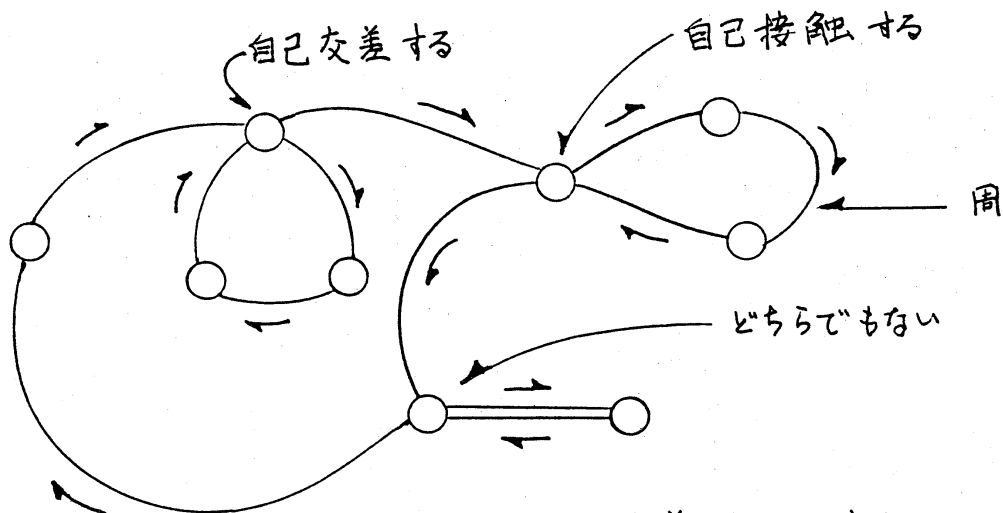


図4. 自己交差，自己接触の例

## 2-2 アルゴリズムに使われる諸手続きについて

以下では、主に、近似アルゴリズム包囲法、j-包囲法において用いられるいろいろな手続きについて記述する。

2点  $u, v$  において、 $u = (u_1, u_2)$ ,  $v = (v_1, v_2)$  とする。このとき、格子点  $p_1, p_2$  を  $p_1 = (u_1, v_2)$ ,  $p_2 = (v_1, u_2)$  としたとき、 $u, p_1, v, p_2$  によって囲まれる長方形の領域を  $u, v$  の最短領域という。この領域には、周  $u p_1 v p_2 u$  上も含まれるものとする。これを図5に示す。特に  $u = v$  のときは、この領域は一つの点のみからなる。

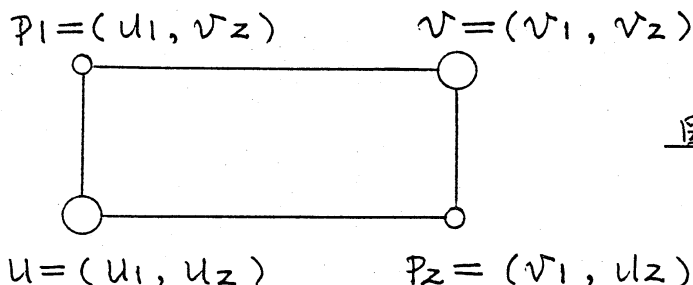


図5.  $u, v$  の最短領域

この最短領域において、等距離変換という手続きを定義する。2点  $u, v$  に対し、道  $uv$  をそれと同じ距離の別の道に変換するという手続きである。

まず、 $u = (u_1, u_2)$ ,  $v = (v_1, v_2)$  に対して、 $p_1 = (u_1, v_2)$ ,  $p_2 = (v_1, u_2)$  とおく。この手続きの入力として、道  $u p_1 v$  または、道  $u p_2 v$  が与えられるとする。ここでは、道  $u p_1 v$  が入力されたものとする。さらに、 $u v$  の最短領域内の点のうち、 $p_1$  から最も近い入力点の一つを  $w = (w_1, w_2)$  とする。また、 $u v$  の最短領域の周上でない内部にある、道  $u v$  でない他の道上の格子点のうち、 $p_1$  より最も近い格子点を  $q = (q_1, q_2)$  とする。ここで、 $p_3 = (u_1, w_2)$ ,  $p_4 = (w_1, v_2)$ ,  $p_5 = (u_1, q_2)$ ,  $p_6 = (q_1, v_2)$  である。以上のことを図6に示す。これにより、等距離変換という手続きを以下に示す。この手続きの入力は道  $u p_1 v$  で、出力は変換された道  $u v$  である。

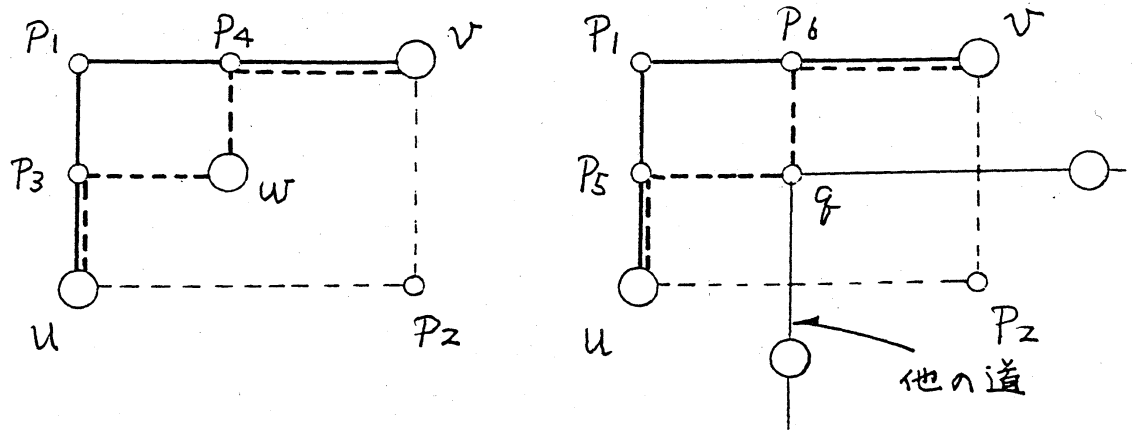


図6. 等距離変換の例

等距離変換 (道  $u p_1 v$ )

- (I) 上述の入力点  $w$ , 格子点  $q$  がいずれも存在しなければ、道  $u p_1 v$  を道  $u p_2 v$  に変換して終了。
- (II) 入力点  $w$  が存在するならば、
  - (1) 道  $u p_1 v$  を道  $u p_3 w p_4 v$  に変換する。
  - (2) 等距離変換 (道  $u p_3 w$ ) を行う。
  - (3) 等距離変換 (道  $w p_4 v$ ) を行う。
  - (4) 上の (2), (3) で出力された道  $u w$  と道  $w v$  をつないで終了。
- (III) 格子点  $q$  が存在するならば、
  - (1) 道  $u p_1 v$  を道  $u p_5 w p_6 v$  に変換する。
  - (2) 等距離変換 (道  $u p_5 w$ ) を行う。
  - (3) 等距離変換 (道  $w p_6 v$ ) を行う。
  - (4) 上の (2), (3) で出力された道  $u q$  と道  $q v$  をつないで終了。
- (IV) 終了。

次に全包围という手続きを示す。これは、与えられた点の集合  $V$  を四方より取り囲み、周を部分的に、距離が増えないようにできるだけ内側へ変形して、変形できなくなったら終了するという手続きである。

ここで、平面格子上的点の集合  $V$  に対して、最左点を  $u = (u_1, u_2)$ , 最上点を  $v = (v_1, v_2)$ , 最右点を  $w = (w_1, w_2)$ , 最下点を  $x = (x_1, x_2)$  とする。すなわち、 $V = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)\}$  とおくと、 $(a, b) \in V$  が最左点であるとは、 $a = \min \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ,  $(a, b) \in V$  が最上点であるとは、 $b = \max \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ ,  $(a, b) \in V$  が最右点であるとは、 $a = \max \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ,  $(a, b) \in V$  が最下点であるとは、 $b = \min \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  であることをいう。さらに、 $p_1 = (u_1, v_2)$ ,  $p_2 = (w_1, v_2)$ ,  $p_3 = (w_1, x_2)$ ,  $p_4 = (u_1, x_2)$  とする。これらを図7に示す。以上のことにおいて、以下に全包围という手続きを示す。ここでこの手続きの入力は点の集合  $V$  であり、出力は入力点を取り囲む周である。

全包围 ( $V$ )

- (I) 入力点  $u, v, w, x$  を求める。
- (II) 周  $u p_1 v p_2 w p_3 x p_4 u$  を作る。
- (III) 等距離変換 (道  $u p_1 v$ ) を行う。
- (IV) 等距離変換 (道  $v p_2 w$ ) を行う。

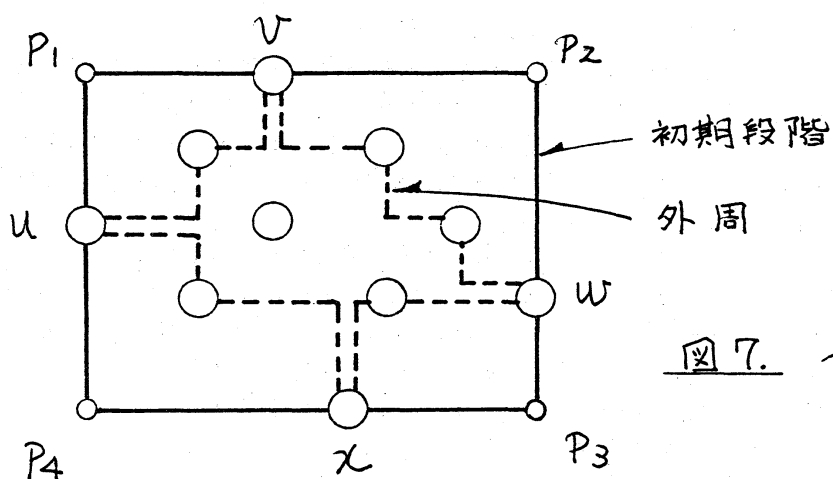


図7. 全包囲の例

(V) 等距離変換 (道  $w p_3 x$ ) を行う。

(VI) 等距離変換 (道  $x p_4 u$ ) を行う。

(VII) 上の (III) ~ (VI) で出力された道  $uv$ , 道  $vw$ , 道  $wx$ , 道  $xu$  をつないで終了。

この手続き全包囲によってできた周を特に外周と呼ぶ。(図7参照)

次に、部分包囲という手続きを示す。この手続きは、道  $uv$  と、点  $u$ ,  $v$  と異なる道  $uv$  に関するある特定方向の点の集合  $V$  を入力して、 $V$  を包囲するようにして道  $uv$  を変形する手続きである。ここで、 $u = (u_1, u_2)$ ,  $v = (v_1, v_2)$  ( $u \neq v$ ) とする。 $u$ ,  $v$  の位置関係により、図8.1と図8.2に示す2つの場合が考えられる。そのそれぞれの場合において、部分包囲が定義される。以下において、部分包囲という手続きを示す。この手続きの入力は、道  $uv$  と道  $uv$  に関してある特定方向の入力点の集合  $V$  であり、出力は変換された道  $uv$  である。

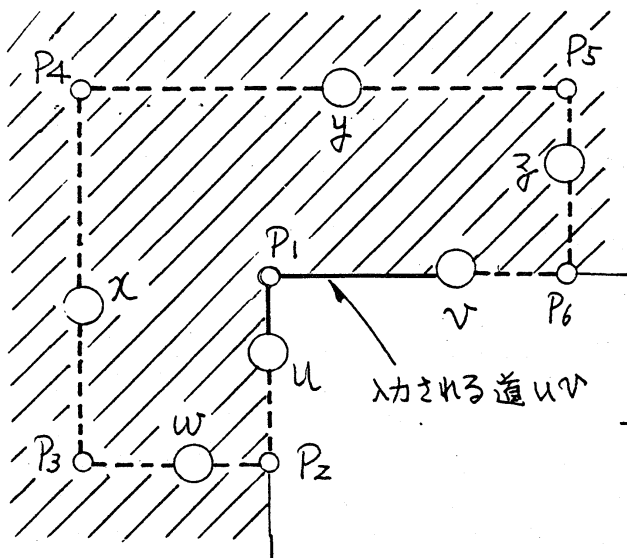


図8.1 部分包囲(i)の例

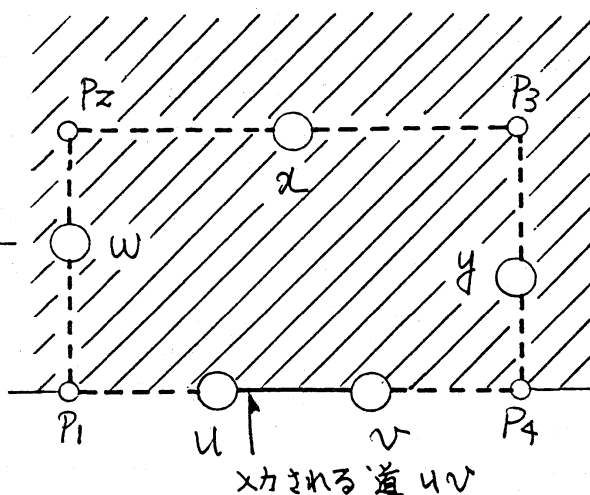


図8.2 部分包囲(ii)の例

### 部分包囲 (道 $uv$ , $V$ ) ( $u \neq v$ )

(I)  $u_1 \neq v_1$ ,  $u_2 \neq v_2$  のとき。 (図8.1参照)

$p_1 = (u_1, v_2)$  とする。入力として与えられる道  $uv$  は道  $up_1v$  であるとし、入力点の集合  $V$  は、 $u$  より左かあるいは  $v$  より上にある点、つまり、図8.1における斜線の部分にある点の集合とする。 $u, v$  の位置関係がこれと異なるときも、道  $uv$  の形状により同様に決定される。この場合、図8.1の斜線の部分以外の点が入力されることはないとする。

- (1)  $V \cup \{u, v\}$  の中で、最下点  $w$ , 最左点  $x$ , 最上点  $y$ , 最右点  $z$ , を求める。ここで、 $w = (w_1, w_2)$ ,  $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2)$ ,  $z = (z_1, z_2)$  とし、さらに、 $p_2 = (u_1, w_2)$ ,  $p_3 = (x_1, w_2)$ ,  $p_4 = (x_1, y_2)$ ,  $p_5 = (z_1, y_2)$ ,  $p_6 = (z_1, v_2)$  とする。
- (2) 道  $up_1v$  を道  $up_2wp_3xp_4yp_5zp_6v$  に変換する。
- (3) 等距離変換 (道  $up_2w$ ) を行う。
- (4) 等距離変換 (道  $wp_3x$ ) を行う。
- (5) 等距離変換 (道  $xp_4y$ ) を行う。
- (6) 等距離変換 (道  $yp_5z$ ) を行う。
- (7) 等距離変換 (道  $zp_6v$ ) を行う。
- (8) 上の (3) ~ (7) により出力された道  $uw$ , 道  $wx$ , 道  $xy$ , 道  $yz$ , 道  $zv$  をつないで終了。

(II)  $u_1 = v_1$ , 又は、 $u_2 = v_2$  のとき。 (図8.2参照)

この時、入力として与えられる道  $uv$  は、図8.2に示されるようになる。また、入力点の集合  $V$  は、道  $uv$  の上あるいは下にある点の集合、つまり、図8.2における斜線で示された部分にある点の集合である。ここで、 $u_1 = v_1$  としたが、他の場合も道  $uv$  に対して同様の位置関係になるように決定される。また、道  $uv$  のどちら側の点の集合を  $V$  とするかは、この手続きに入力される以前に決定されているものとし、斜線で示された部分以外の点が入力されることはないものとする。

- (1)  $V \cup \{u, v\}$  の中で、最左点  $w$ , 最上点  $x$ , 最右点  $y$ , を求める。ここで、 $w = (w_1, w_2)$ ,  $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2)$  とし、さらに、 $p_1 = (w_1, u_2)$ ,  $p_2 = (w_1, x_2)$ ,  $p_3 = (y_1, x_2)$ ,  $p_4 = (y_1, v_2)$  とする。
- (2) 道  $uv$  を道  $up_1wp_2xp_3yp_4v$  に変換する。
- (3) 等距離変換 (道  $up_1w$ ) を行う。
- (4) 等距離変換 (道  $wp_2x$ ) を行う。
- (5) 等距離変換 (道  $xp_3y$ ) を行う。
- (6) 等距離変換 (道  $yp_4v$ ) を行う。
- (7) 上の (3) ~ (6) により出力された道  $uw$ , 道  $wx$ , 道  $xy$ , 道  $yv$  をつないで終了。

以上が部分包囲という手続きであるが、ここで入力される点の集合  $V$  は、道  $uv$  に対して、道  $uv$  のそれぞれの場合において、この手続きが適用され得るような点の集合とする。適用され得ない点が  $V$  の要素となっている時は、この手続きの結果は保証されない。

最後に部分包囲手法という、交差しない周に対して点の集合  $V$  が入力され、その  $V$  に関して部分包囲を再帰的に実行する手続きを示す。ここで周を  $\beta$  とし、また周  $\beta$  上の点を  $V_0$  とする。以下に、部分包囲手法という手続きを示す。この手続きの入力は、点の集合  $V$  と周  $\beta$  であり、出力は変形された周である。

### 部分包囲手法 ( $V$ )

- (I)  $V = \phi$  ならば、終了。
- (II) 周  $\beta$  を  $v_1 v_2 \cdots v_i v_0 v_1$  とする。  $V$  の各点について、この周のどの部分に最も近いのか、つまり、周上の連続する2点によるどの部分道に最も近いのかを求め、その部分道に、最も近い周の内部の点の個数が最大である、周上の連続した2点による部分道を、部分道  $v_i v_{i+1}$  とする。 また、この時の、部分道  $v_i v_{i+1}$  に最も近い点の集合を  $V_0'$  とする。 ( $V_0' \subseteq V$ ) ここで、 $v' \in V$  が複数の部分道に最も近い時は、原則としてそのすべてにおいて数えられるが、 $v'$  がその部分道に対して部分包囲を適用できないような部分道においては数えない。 さらに、上で求める部分道  $v_i v_{i+1}$  が複数考えられる場合は、以下の (III) ~ (VI) を行った時の周の、距離の増加の少ない部分道を選択し、それを部分道  $v_i v_{i+1}$  とする。
- (III) 部分包囲 (道  $v_i v_{i+1}$ ,  $V_0'$ ) を行う。
- (IV) (III) の結果変形された周上の点を新たに  $V_0$  とし、 $V_0'$  のうち周に入らなかった点を新たに  $V_0'$  とする。
- (V)  $V_0' \neq \phi$  ならば、部分包囲手法 ( $V_0'$ ) を行う。  
 $V_0' = \phi$  ならば、部分道  $v_i v_{i+1}$  上の連続する2点によるすべての部分道について、それらの部分道を入力として、等距離変換を行う。
- (VI)  $V \leftarrow V - V_0'$
- (VII) (I) へもどる。

以上で諸手続きの記述を終る。

### 2-3 近似アルゴリズム包囲法、j-包囲法について

以下において、3章にて解析を行うアルゴリズム、包囲法、j-包囲法の全容を示す。

まず、包囲法というアルゴリズムを示す。 入力として与えられる点の集合  $V$  は、格子巡回セールスマン問題の入力として与えられる点の集合  $V$  である。

#### 包囲法 ( $V$ )

- (I) 全包囲 ( $V$ ) を行う。
- (II) (I) によってできた外周上の点を  $V_0$  とする。  $V' = V - V_0$  とする。 部分包囲手法 ( $V'$ ) を行う。
- (III) 終了。

以上が包囲法というアルゴリズムである。 図9.1~図9.6に近似アルゴリズム包囲法の適用例を示す。

さらに、j-包囲法というアルゴリズムを示す。 ここで、jは、あらかじめ定められた任意の定数 ( $j \geq 0$ ) であり、入力として与えられる点の集合  $V$  は、格子巡回セールスマン問題に入力として与えられる点の集合  $V$  である。

#### j-包囲法 ( $V$ )

- (I) 全包囲 ( $V$ ) を行う。
- (II) 外周の内部の点を  $V'$ , 外周上の点を  $V_0$  とする。
  - (1)  $U \leftarrow \phi$ ,  $i \leftarrow 0$
  - (2)  $V'$  において、外周と  $U$  の点から最も遠い点  $v$  を見つける。  $v$  がなければ (5) へ。
  - (3)  $U \leftarrow U \cup \{v\}$ ,  $i \leftarrow i + 1$
  - (4)  $i \neq j$  ならば、(2) へもどる。
  - (5)  $V_0$  と  $U$  による交差しない最適解を求める。

- (Ⅲ) (1) (Ⅱ) で求めた周を外側へ、等距離変換をする。  
 (2) (1) により変形された周の外部の点を  $V_1'$  とする。 部分包囲手法 ( $V_1'$ ) を行う。  
 (3) (2) で求めた周を内側へ、等距離変換をする。  
 (4) (3) により変形された周の内部の点を  $V_2'$  とする。 部分包囲手法 ( $V_2'$ ) を行う。  
 (Ⅳ) 終了。

以上が、 $j$ -包囲法というアルゴリズムである。 ここで  $j \geq 1$  であるが、特に  $j = 0$  のときの 0-包囲法は定義により包囲法と同じアルゴリズムである。 また、 $j$ -包囲法において、(Ⅱ)における最適解より周の距離が増加するのは、(Ⅲ)における、部分包囲手法の中の部分包囲という手続きを実行するときのみである。 そこで、この部分包囲の回数  $k$  を定理 2 の解析においてパラメータとして用いる。 図 10.1 ~ 図 10.7 に、 $j$ -包囲法の適用例を示す。 この例は  $j = 3$  の例である。

図 9.1 ~ 図 9.6  $j$ -包囲法の適用例

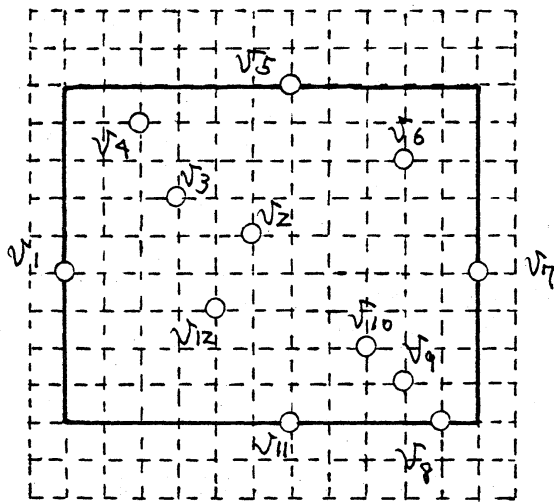


図 9.1 初期段階

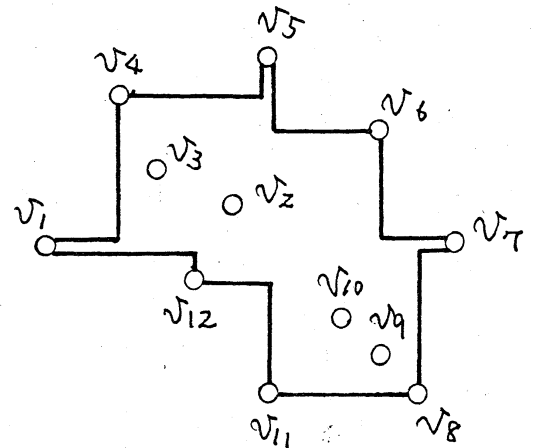


図 9.2 全包囲終了

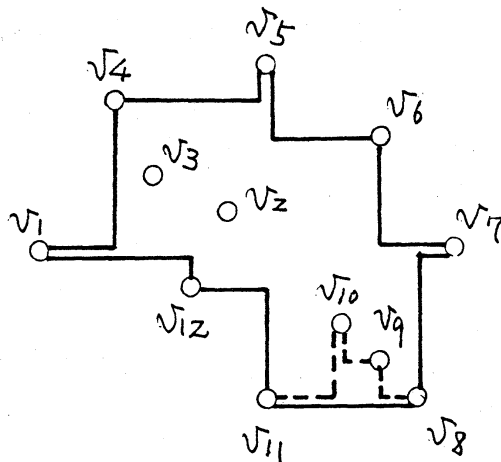


図 9.3 1回目部分包囲

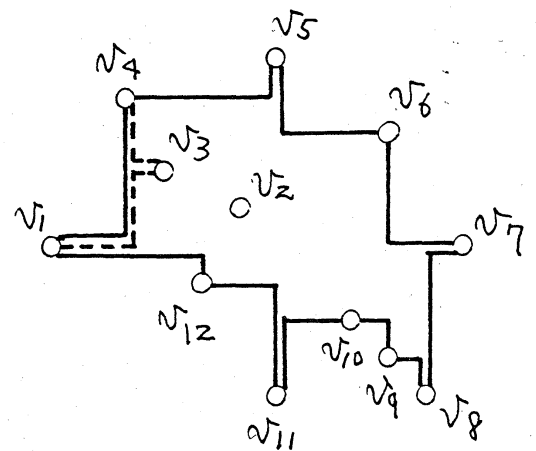


図 9.4 2回目部分包囲

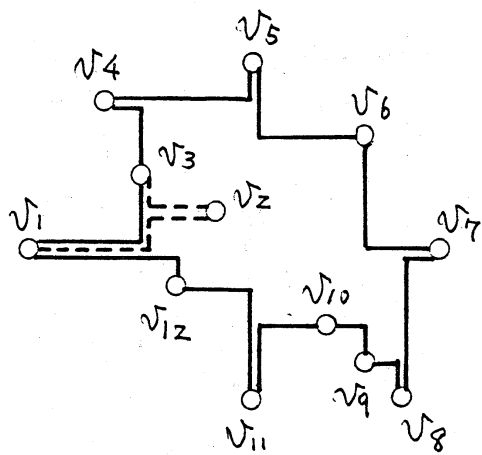


図 9.5 3回目の部分包囲

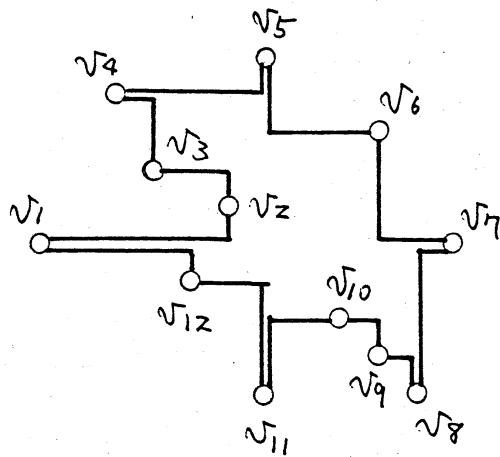


図 9.6 終了

図 10.1 ~ 図 10.7  $j$ -包囲法の適用例 ( $j=3$  の場合)

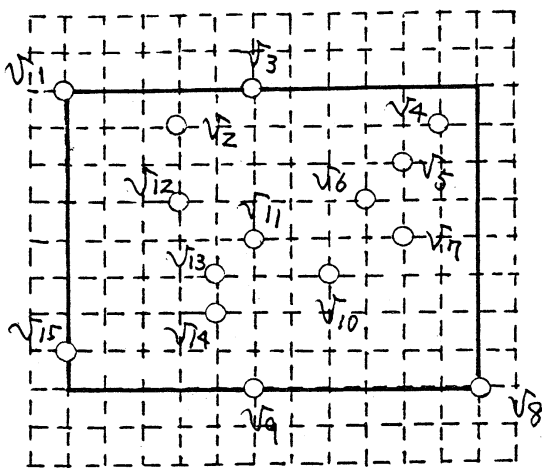


図 10.1 初期段階

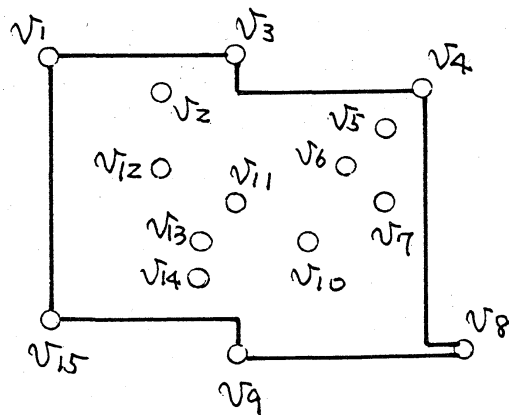


図 10.2 全包囲終了

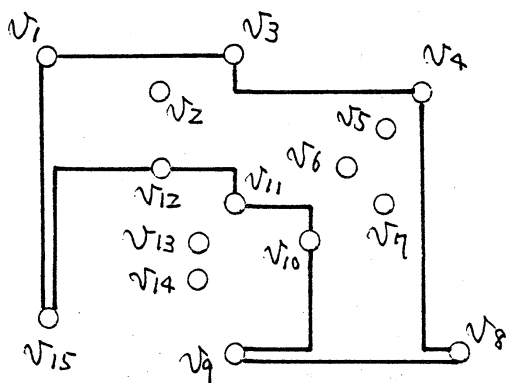
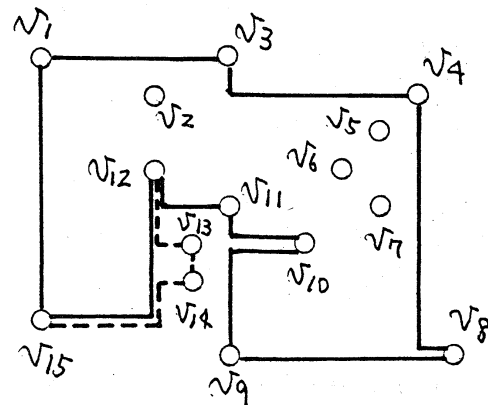
図 10.3  $j$ 個の点を加えた最適解

図 10.4 周の外部の点に対して1回目の部分包囲

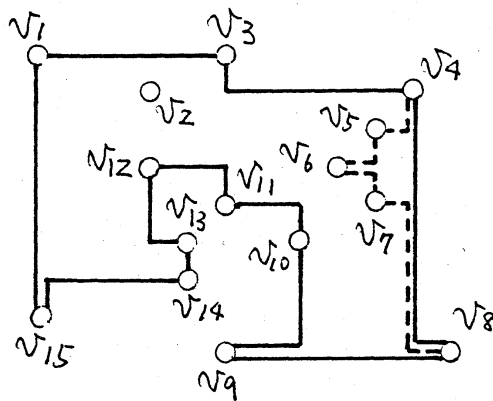


図 10.5 周の内部の点に対して  
2回目の部分包囲

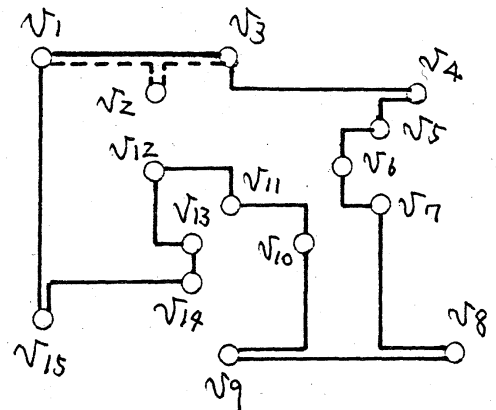


図 10.6 周の内部の点に対して  
3回目の部分包囲

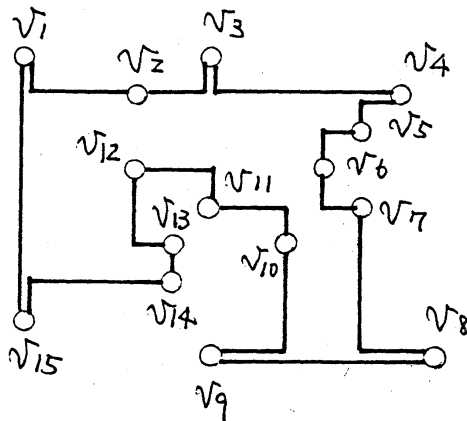


図 10.7 終了

### 3 近似アルゴリズムの解析

以下において、 $j$ -包囲法に関する解析を行う。

#### 補題 1-1

外周は自己交差しない。

(証明) 全包囲の定義より明らか。

#### 補題 1-2

外周の外部に入力点は存在しない。

(証明) 全包囲の定義より明らか。

#### 補題 1-3

入力点の集合を  $V$  とする。  $V$  の任意の 2 点  $u, v$  について、外周上及び、外周の内部の格子点のみを通

る、距離最小の道  $uv$  が存在する。

(証明) 補題 1-3 をみたすような道  $uv$  が存在しないと仮定する。つまり、外周の内部、及び、外周上の格子点のみを通る距離最小の道  $uv$  よりも距離の短い、外周の外部の格子点を少なくとも一つ通る道  $uv$  が存在すると仮定する。これにより、図 11 に示すように、この時の外周の外部の格子点を  $p_i$  とする。さらに、その道において  $p_i$  の前後のどこかに必ず外周上の格子点  $p_j, p_k$  が存在する。( $p_j \neq p_k$ )  $p_j, p_k$  の存在は、補題 1-2 により明らか。道  $up_i v$  が、外周上及び、外周の内部の格子点のみを通る道  $uv$  より距離が短いというのは、部分道  $p_j p_i p_k$  を通ることによるものである。そこで、 $p_j, p_k$  の最短領域を考える。これを図 12 に示す。 $p_i$  が  $p_j p_k$  の最短領域内にあることは、明らか。また、この領域内をあともしないで通る道  $p_j p_k$  はすべて等しいので、外周は図 12 のように最短領域の外部を通らなければいけないことになる。ところが、 $p_j, p_k$  は外周上の格子点であるので、外周の定義に矛盾する。よって、補題が証明された。□

#### 補題 1-4

ある入力点の集合  $V$  に対し、 $V$  の点をすべて通る、ある周  $\beta$  の交差数を  $r$  ( $r \geq 1$ ) とするとき、 $V$  の点をすべて通る、 $\beta$  と同じ距離で交差数  $r-1$  以下の周が存在する。

(証明) 周  $\beta$  における  $r$  個の交差点列の一つを  $\sigma$  とおく。そして、その  $\sigma$  の中の一つの格子点を  $p'$  とする。また、 $\beta$  がある方向に方向付けされているとし、 $\sigma$  を交差点列とする周  $\beta$  の 2 つの部分道におけ

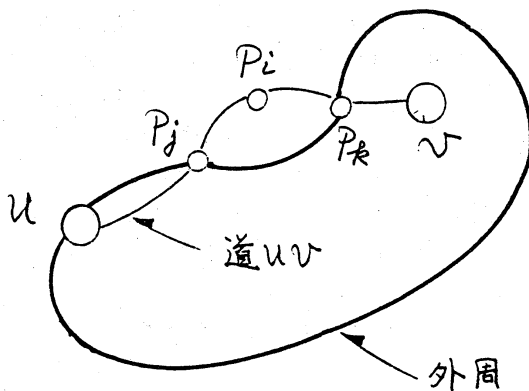


図 11 補題 1-3 において

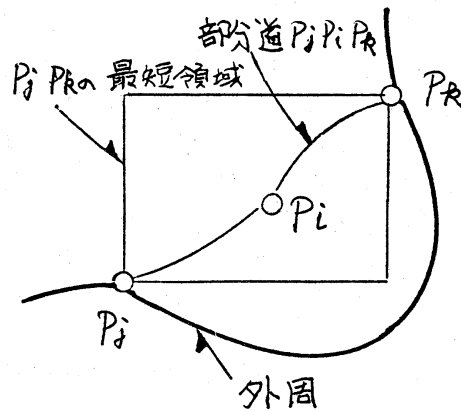


図 12 補題 1-3 において

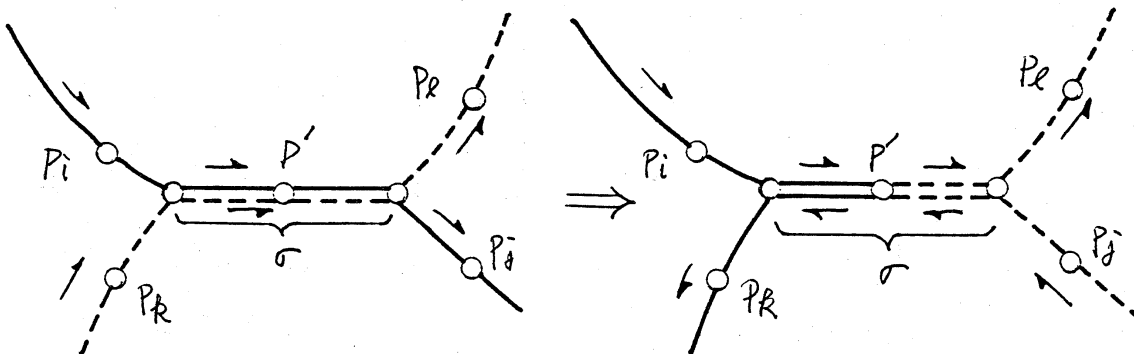


図 13 周  $\beta$  について  
周の自己交差の解消について

周  $\beta'$  について

る $\sigma$ の前後の格子点を $p_i, p_j$ と $p_k, p_l$ とする。つまり、 $\beta$ の方向付けの順において、部分道 $p_i \rightarrow p_j$ と部分道 $p_k \rightarrow p_l$  ( $i < j < k < l$ )が交差しているものとする。よって、 $\beta$ において、方向付けの順に $p_i \rightarrow p' \rightarrow p_j \rightarrow p_k \rightarrow p' \rightarrow p_l$ となる部分が存在する。これを図13に示す。ここで、 $\beta$ を $p_i \rightarrow p' \rightarrow p_k \rightarrow p_j \rightarrow p' \rightarrow p_l$ となるように変換する。つまり、 $p' \rightarrow p_k \rightarrow p_j \rightarrow p'$ という周は $\beta$ における $p' \rightarrow p_j \rightarrow p_k \rightarrow p'$ という周と逆向きになるように変換する。この変換によって新しくできた周を $\beta'$ とする。周 $\beta'$ の距離は周 $\beta$ と同じである。また、その交差数は、 $r-1$ 以下であるのは明らか。よって、補題が証明された。□

#### 補題 1-5

任意の入力点の集合 $V$ に対して、交差数=0の最適解が存在する。

(証明) 補題1-4より明らか。

#### 定理 1

外周上の点の集合を $V_0$ とし、外周上における $V_0$ の点の順序を $v_1 v_2 \cdots v_l v_0 v_1$ とする。

このとき、その解(周)における $V_0$ の点のみの順序が $v_1 v_2 \cdots v_l v_0 v_1$ と一致するような最適解が存在する。

(証明) 補題1-1より、外周は自己交差しない。さらに、補題1-3より、最適解は外周上及びその内部にあると考えてよい。よって、補題1-5より交差数=0の最適解が存在することより明らか。□

以上のことにより、外周の内部の点を、外周から上手に寄り道することによって、最適な解を求めることができることを示している。よって、外周それ自体の精度は非常によい。そこで、外周の内部の点がどの程度効率よく通ることができるか、が問題となる。以下で、外周の内部の点の効率を解析する。

ここで、外周の内部の点に対して、 $j$ -包囲法を適用する場合を考える。定理1により、 $j$ -包囲法の(Ⅲ)の手続きがいかに精度がよいかが、 $j$ -包囲法全体の精度に関係することがわかった。さらに、 $j$ -包囲法の(Ⅲ)の手続きにおいて、実行途中の近似解の距離が増加するのは、 $J$ =包囲法の定義より部分包囲という手続きを実行するときのみである。以上のことをもとに、以下に定理2を示す。

#### 定理 2

入力点の集合 $V$ に対する、最適解の距離 $OPT$ と、 $j$ -包囲法による近似解の距離 $AL j-EM$ の比は、

$$AL j-EM / OPT \leq 1 + 8k/j$$

である。ここで $k$ は、入力点の集合 $V$ に対して、 $j$ -包囲法を適用する時の部分包囲を実行する回数である。また、 $j$ は、あらかじめ任意に定められている定数である。

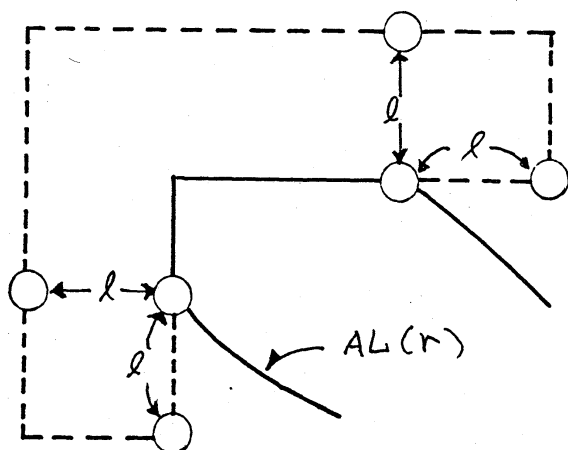


図 14.  $AL(r)$  と  $AL(r+1)$  における部分包囲

(証明) 入力点の集合  $V$  に対して  $j$ -包囲法を行うとき  $r$  回目と  $r+1$  回目の部分包囲を実行したアルゴリズムの実行途中の解 (周) に注目する。 ( $r \geq 0$ )  $r$  回目の部分包囲を実行した時の実行途中の近似解の距離を  $AL(r)$  とする。

まず、 $AL(r)$  と  $AL(r+1)$  について考える。  $r+1$  回目の部分包囲により、新たに周上に取り込まれる点において、それらの点の  $AL(r)$  の周への最短距離の最大値を  $l$  とする。 部分包囲の定義より、

$$AL(r+1) \leq AL(r) + 8l \quad (1)$$

これを図 14 に示す。 また、

$$OPT(r+1) \geq OPT(r) \geq OPT(0) \quad (2)$$

も明らか。 さらに、 $j$ -包囲法による外周上にない  $j$  個の点を  $U$  とする。 点  $u \in U$  の外周及び  $U - \{u\}$  の点への距離の最小値を  $\mu(u)$  とする。 これより、 $OPT(0)$  の定義より、

$$OPT(0) \geq j \cdot \min_i \mu(u_i) \quad (3)$$

$$l \leq \min_i \mu(u_i) \quad (4)$$

以上の (1) ~ (4) 式より、

$$\frac{AL(r+1)}{OPT(r+1)} \leq \frac{AL(r) + 8l}{OPT(r)} = \frac{AL(r)}{OPT(r)} + \frac{8l}{OPT(r)}$$

$$\frac{8l}{OPT(r)} \leq \frac{8l}{OPT(r)} \leq \frac{8l}{j \cdot \min_i \mu(u_i)} \leq \frac{8l}{j \cdot l} = \frac{8}{j}$$

$$\frac{AL(r+1)}{OPT(r+1)} \leq \frac{AL(r)}{OPT(r)} + \frac{8}{j}$$

よって、 $0 \leq r \leq k-1$  であるので、

$$\frac{AL_{j-EM}}{OPT} = \frac{AL(k)}{OPT(k)} \leq \frac{AL(0)}{OPT(0)} + \frac{8k}{j} = 1 + \frac{8k}{j}$$

故に定理が証明された。  $\square$

### 定理 3

任意の入力点の集合  $V$  について、 $|V| = n$  のとき、包囲法、 $j$ -包囲法は  $n$  の多項式時間のアルゴリズムである。

(証明) 外周を求めることは  $O(n^2)$  であり、 $j$ -包囲法の (II) において  $U$  を求めるのは  $O(n)$  である。 また、1 回の部分包囲を行うにあたり、部分包囲の入力点の集合を求めるのに  $O(n^2)$  であり、部分道の変形をするのに  $O(n^2)$  である。 さらに、同数の集団の数は、高々  $n$  であることと、部分包囲の回数は高々  $n$  回であることより、部分包囲手法全体として、 $O(n^2) \times O(n^2) \times n \times n$ 、つまり、 $O(n^6)$  である。 よって、包囲法は、 $O(n^2) + O(n^6)$ 、つまり、 $O(n^6)$ 、 $j$ -包囲法は、 $O(n^2) + O(n) + |V_0|^j + O(n^6)$ 、つまり、 $O(n^j)$  である。 ( $j \geq 6$ ) ここで、 $j$  は定数である。 故に、包囲法、 $j$ -包囲法は、 $n$  に関する多項式時間アルゴリズムである。  $\square$

## 4 結論

格子巡回セールスマン問題に対して、包囲法、 $j$ -包囲法という近似アルゴリズムを考え、定理 1、定理 2 に示されるような結果を得た。 定理 2 において、最悪の場合、 $k$  は  $n$  に比例すると考えられるが、このときの  $j$ -包囲法の精度はもっとよいものと思われる。 また、包囲法による近似解は、いくつかの自然な諸例に対してかなり効率のよいものであり、今までに考えられている諸アルゴリズムに対する、最悪の振舞をする例に対しても、非常に効率のよい結果を得ている。 しかし、その解析はまだ十分に成功していない。

現在のところ、包囲法によって得られる近似解は、最適解の高々  $4/3$  倍であると予想している。(参考のため、 $4/3$  倍に近い例を図 15 に示す。さらに、N.Christofides の方法による最悪の振舞をする例を図 16 に示す。この例は、文献 [2] による。) これは、未解決問題である。

### References

- [1] Christofides, N., "Worst-case analysis of a new heuristic for the traveling salesman problem", GSIA, Carnegie-Mellon University (February 1976)
- [2] Cornuejols, G. and G.L.Nemhauser, "Tight bounds for christofides' traveling salesman heuristic", Math. prog, 14(1978) 116-121.
- [3] Garey, M.R. and D.S.Johnson, "Computers and intractability", W.H.Freeman and Company San Francisco.
- [4] Garey, M.R., R.L.Graham and D.S.Johnson, "Some NP-Complete Geometrics Problems", Proc. 8th Ann. ACM Symp. New York.

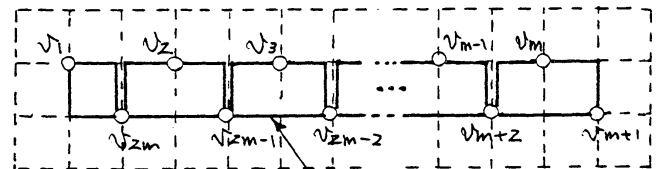
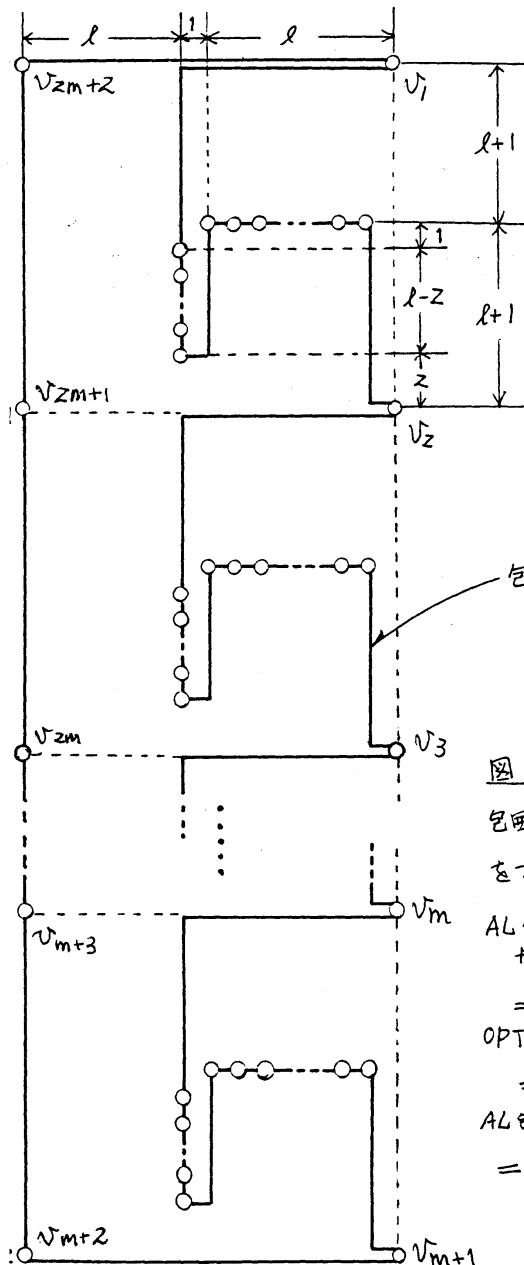


図 16. N.Christofides の方法による最悪の振舞をする例

図 15. 現在わかっている包囲法による最悪の振舞をする例

$$\begin{aligned}
 \text{AL 包囲法} &= 2m(2l+2) + 2(2l+1) + 2m(l+1) + 2m(l-1) \\
 &= 8ml + 4m + 4l + 2 \\
 \text{OPT} &= 2m(2l+2) + 2(2l+1) + 2m(l+1) \\
 &= 6ml + 6m + 4l + 2 \\
 \text{AL 包囲法} / \text{OPT} &= \frac{4 + \frac{2}{l} + \frac{2}{m} + \frac{1}{ml}}{3 + \frac{2}{l} + \frac{2}{m} + \frac{1}{ml}} < \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$