

楕円型作用素のグリーン核の漸近的性質の L^2 的取扱について.

東大 理 藤原大輔

§1 序

M は oriented compact C^∞ manifold, ∂M は境界は無しとする。 $P \in M$ 上で定義され、後述する条件を満たす、
"pseudo-differential operator"¹⁾ がある。

$E(x, y, \tau)$ を、グリーン作用素 $(P + \tau)^{-1}$ の対応する核とする。 $\tau \rightarrow \infty$ のときの $E(x, y, \tau)$ の挙動を調べることが目的である。方法として、 L^2 理論を活用し、議論の局所化に努力する。

先ず記号を説明する。

M を σ -compact な orientable C^∞ manifold とする。

M 上に体積要素 $\underbrace{\quad}_{dx}$ は与えられているものとする。我々は直積 $M \times \mathbb{R}^1$ を考える。 $M \times \mathbb{R}^1$ の一般の点を (x, s) , $x \in M$, $s \in \mathbb{R}^1$ と表わす。多様体 M , $M \times \mathbb{R}^1$, 等々の上の関数²⁾

1) cf. L. Hörmander: Pseudo-differential operators
Comm. pure. Appl. Math. 18 501-517 (1965)

2) 以下の議論は M と、その上の vector bundle X の smooth sections について elliptic operators に対して論ずる方が興味深い。が、ここでは簡単のため X は M 上の trivial line bundle とする。

空間については, L. Schwartz, A. Grothendieck 等の慣習に従う。 X, Y を二つの局所凸線型空間とあるとき, $X \hat{\otimes} Y$ で X と Y の射影的テンソル積の完備化とする³⁾
 $S_1 = \{(\rho, \sigma) \in \mathbb{R}^2; \frac{1}{2} \leq \rho^2 + \sigma^2 \leq 2\}$ とおく。

定義 1. 線型連続写像 $P: \mathcal{D}(M) \hat{\otimes} \mathcal{S}'(\mathbb{R}^1) \rightarrow \mathcal{E}(M) \hat{\otimes} \mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$
 が次の条件を満たすとき, β -擬微分作用素と呼ぶ。

実数の減少列 $\delta_0 > \delta_1 > \delta_2 > \dots \rightarrow -\infty$ があって, 任意の $f \in \mathcal{D}(M)$ に対して $\text{supp } f \cap \text{supp } g \neq \emptyset$ ならば $g \in \mathcal{E}(M)$ からなる $\mathcal{E}(M)$ の compact set J 上, 任意の正整数 N に対して,

$e^{-i\lambda(\rho g + \sigma s)} P(f e^{i\lambda(\rho g + \sigma s)})$ は δ に独立で, $\lambda \geq 1$ のとき

$$(1) \quad \lambda^{-\delta_N} (e^{-i\lambda(\rho g + \sigma s)} P(f e^{i\lambda(\rho g + \sigma s)})) = \sum_{j=0}^{N-1} p_j(f, \rho g, \sigma, s) \lambda^j$$

がい. $\mathcal{E}(M \times \delta_1)$ 上の有界になるような $p_j(f, \rho g, \sigma, s)$ が存在する。

δ_0 を P の order, と呼ぶ. $\sigma_p(f, g) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j(f, \rho g, \sigma, s) \lambda^j$ なる形式和を, P の symbol と呼ぶ。

定義 1 から推察されるように, 若干の計算の後に, β -擬微分作用素 P は, $M \times \mathbb{R}^1$ で定義された Hörmander の

3) c.f. A. Grothendieck, Produits Tensoriels Topologiques et Espaces Nukliaires, A.M.S. memoir, 1955

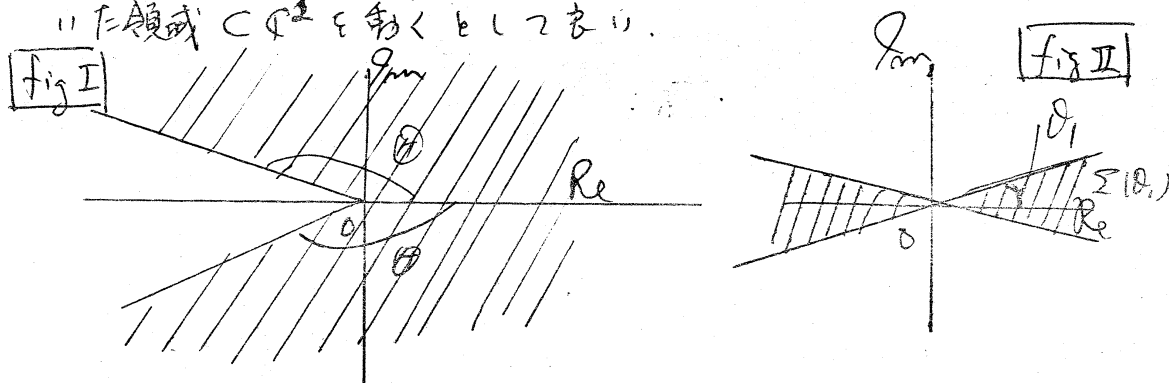
4) g は実数値とする

意味での pseudo-differential operator であつて, $R'^3 S$ に関して, 定係数のものであることが分る.

§ 2. 結果.

本節では M は compact とする。 P は Hörmander の意味での M 上の $\text{pseudo-differential operator}$ で, order は $2m$, とする。更に, $x \in M$, $\xi \neq 0 \in M$ の x における co-tangent vector とするとき, P の主シンボル $P_0(x, \xi)$ は, $\arg P_0(x, \xi) \neq \pm \pi$, を仮定する。

$x \in M$, $\xi \in T_x^+(M)$ が動くとき, $P_0(x, \xi)$ は, 次の斜線を围った領域 $\subset \mathbb{R}^2$ を動くとしてよい。



$2m\theta_1 < \pi$, とすれば, fig II で斜線を围った領域 $\Sigma(\theta_1)$ を Z に対して, $P + Z^{2m} D_S^{2m}$, $S \in R'$ は $M \times R'$ 上の elliptic β -擬微分作用素がある。

このとき, 結果は以下のよう。

定理 1 $T_0 > 0$ が十分大きいとき, $Z \in \Sigma(\theta_1)$ に対して, β -擬微分作用素 $G_Z^{(0)}$ が存在して,

$$(2.1) \quad (P + Z^{2m} D_s^{2m} + T_0) G_Z^{(0)} = I \quad \text{on } \mathcal{D}(M) \hat{\otimes} \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$$

$$(2.2) \quad G_Z^{(0)} (P + Z^{2m} D_s^{2m} + T_0) = I$$

$G_Z^{(0)}$ の order は $-2m$ 。

定義 2 $e^{-is} G_Z^{(0)} (\varphi e^{is\#}) = E^{(0)}(Z) \varphi, \varphi \in \mathcal{D}(M)$

とある。

定理 2 $E^{(0)}(Z)$ は $Z \in \Sigma(\theta_1)$ とパラメーターとす M 上の擬微分作用素が,

$$(2.3) \quad (P + Z^{2m} + T_0) E^{(0)}(Z) = I$$

$$(2.4) \quad E^{(0)}(Z) (P + Z^{2m} + T_0) = I$$

と満す。

以上の 2つが, 主要な定理で, この応用として,

定理 3 任意の $Z \in \Sigma(\theta_1)$ に対し, $G_{Z,\ell} \in G_Z^{(0)} - G_{Z,\ell}$ が, $-\ell$ 位の β -擬微分作用素である. 任意の作用素とす. $E_\ell(Z)\varphi = e^{-i\ell|Z|} G_{Z,\ell} (e^{i\ell|Z|}\varphi), \varphi \in \mathcal{D}(M)$.

によつて $E_\ell(z)$ を定義するならば,

$$(2.5) \quad \|E^{(0)}(z)\varphi - E_\ell(z)\varphi\|_{H^{a+b}(M)} \leq C(1+|z|)^{b-\ell} \|\varphi\|_{H^a(M)}$$

が H^a の $\varphi \in \mathcal{D}(M)$, $0 \leq b \leq \ell$ に対して成立する。

但し $H^{a+b}(M)$ は M の $a+b$ 次 ソボレフ空間。

任意の $\ell > 0$ に対して, $G_{2,\ell}$ は, ρ の シンボルの計算のみによつて構成出来る。

また, M の次元 n とあると,

定理 4 $2m-n = \sigma > 0$, のとき, γ リーン

作用素 $(\rho + Z^{2m} + T_0)^{-1}$ は $C(M \times M) \hat{\otimes} \mathcal{S}(\Sigma(\delta_2, \theta_2))^{(5)}$ に属する核をもつ。 $E(x_1, x_2, z)$ $(x_1, x_2, z) \in M \times M \times \Sigma(\delta_2, \theta_2)$, のとき,

$$(2.6) \quad |E(x_1, x_2, z)| \leq C_\sigma (1+|z|)^{-\sigma}$$

が成立する。また, $E(x_1, x_2, z)$ は, 次のようにして与えられる。 φ_i は, 点 x_i ($i=1, 2$) の近傍 $\mathcal{U}_i$ 上に等しく, $\text{supp } \varphi_1 \cup \text{supp } \varphi_2$ が, (必ずしも連結でない) 座標近傍 $\mathcal{U}$ に含まれるとす。 ξ, x_i は, x_i の座標 $\checkmark$ 座標型関数とす。

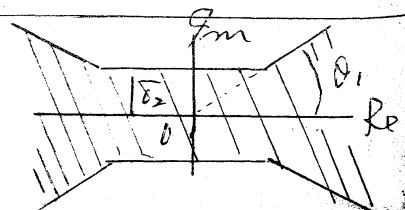
$$(2.7) \quad E(x_1, x_2, z) = (2\pi)^{-n} \rho(x_2)^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} g_z(x_1, \xi, 1) e^{i(x_1 - x_2) \cdot \xi} d\xi$$

但し $z = z_1 + iz_2$

$$g_z(x, \xi, \sigma) = \varphi_1 e^{-i(x \cdot \xi + \sigma \cdot \sigma)} G_z^{(10)}(\varphi_2 e^{i(x \cdot \xi + \sigma \cdot \sigma)}), \sigma \in \mathbb{R}$$

5) $\Sigma(\delta_2, \theta_2)$ は 右の斜線を用いた複素領域

5



$\rho(x)$ は x の 手えられた volume element $\frac{1}{2}dx_1 \cdots dx_n$ に関する密度。(2.7) 式で $x=x_1=x_2$ とおくと、

定理 5

$$(2.8) \quad E(x, x, z) = (2\pi)^{-n} \rho(x)^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} g_z(x, \xi, 1) d\xi \\ \sim (2\pi)^{-n} \rho(x)^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j^{n-1} \int_{\mathbb{R}^n} g_j z(x, \xi, 1) d\xi$$

なる漸近展開を得る。但し、 $z = z(x, \xi, s)$ 。

$$e^{-i(x \cdot \xi + s\sigma)} \varphi \left(\frac{1}{s} \right) \left(\varphi e^{i(x \cdot \xi + s\sigma)} \right) \sim \sum_{j=0}^{\infty} g_j z(x, \xi, s),$$

(この漸近展開の存在は、定理 1 が保証する)。

次に 実例に就いては、 $p \in M$ 上の Δ -related Laplacian Δ^m とおくと、

定理 6 M の Riemann 計量が、 x の近傍に局所

的に 2-クリット解ならば、任意の $N > 0$ に対して

$$(2.9) \quad \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \sigma^N \left\{ E(x, x, \sigma) - (2\pi)^{-n} \omega_{n-1}(2m)^{-1} \frac{\pi}{\sigma^{\frac{n-1}{2m}}} \sigma^{n-2m} \right\} = 0.$$

従って M が locally Euclidean なら、 $\forall N > 0$, 1 に対して、

$$(2.10) \quad \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \sigma^N \left\{ \text{trace} (\Delta^m + \sigma^{2m})^{-1} (2\pi)^{-n} \omega_{n-1}(2m)^{-1} \frac{\pi}{\sigma^{\frac{n-1}{2m}}} \nu(M) \sigma^{n-2m} \right\} = 0$$

但し $\nu(M)$ は M の体積、 ω_{n-1} は $n-1$ 次元単位球面積。

定理 7 $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ を n 次 ε oriented hypersurface
 とし, M 上に $\mathbb{R}^{n+1}$ から導かれた metric を与えよ.
 $p = \Delta^m$. $2m > n$ とし.

$$(2.11) \quad \begin{aligned} E(x, x, \sigma) &\sim (2\pi)^{-n} (2m)^{-1} \frac{\pi}{\Delta \ln \frac{n\pi}{2m}} \sigma^{n-2m} \\ &+ (AK_1(x)^2 + BK_2(x)) \sigma^{n-2m-2} \\ &+ O(\sigma^{n-2m-4}) \end{aligned}$$

但し $n=2m$, $K_j(x)$ は, M の x における j 次平均曲率
 A, B は m と n に関する定数. $n=2, m=2$ ならば

$$A = 21\pi^{-1}, \quad B = -\frac{10}{3}\pi^{-1}, \quad \text{etc}$$

$$(2.12) \quad E(x, x, \sigma) \sim \frac{1}{16\pi} \sigma^{-2} + \left\{ 21\pi^{-1} H(x)^2 - \frac{10}{3}\pi^{-1} K(x) \right\} \sigma^{-4} + O(\sigma^{-6})$$

$H(x)$ は 平均曲率, $K(x)$ は ガウス曲率
 積分され, Gauss-Bonnet's Formula より

定理 8 $M \subset \mathbb{R}^3$ compact oriented surface.
 とすると.

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \text{trace}(\Delta^2 + \sigma^4) &\sim \frac{1}{16\pi} V(M) \sigma^{-2} \\ &+ \left\{ 21\pi^{-1} \int_M H(x)^2 dx - \frac{20}{3}\pi^{-1} V(M) \chi(M) \right\} \sigma^{-4} \\ &+ O(\sigma^{-6}) \end{aligned}$$

$n=2$ $V(M)$ は M の 体積, $\chi(M)$ は Euler-Poincaré 数.

§ 3 証明の概略

先ず β -擬微分作用素について.

Lemma 3.1 Q is elliptic β -pseudo-diff. op. on $M \times R^1$

of order s とすると, $-s_0$ 次の β -pseudo-diff. op F と,
 $-s_0$ 次の β -pseudo-diff. operators Q_1, Q_2 が存在して

$$(3.1) \quad Q \circ F = I + Q_1, \quad F \circ Q = I + Q_2$$

Lemma 3.2

$\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(M)$, $\text{supp } \varphi_1 \cup \text{supp } \varphi_2$ が一つの座標近傍
 U に落っているとき, $x \cdot \xi = x_1 \xi_1 + \dots + x_m \xi_m$ で座標 (x, ξ_m)
 の実線型関数とあらわすと, 任意の $\varphi \in \mathcal{D}(M) \hat{\otimes} \mathcal{S}(R^1)$ に対し,

$$(3.2) \quad \|e^{-i(x \cdot \xi + s \cdot \sigma)} \varphi_1 Q(\varphi_2 \varphi e^{i(x \cdot \xi + s \cdot \sigma)})\|_{H^{a+b}(M \times R^1)} \\ \leq C((1+|\xi|+|\sigma|)^b \| \varphi \|_{H^a(M \times R^1)})$$

但し Q は of order $s_i \leq 0$ とす. $\forall b \in [s_0, -s_0]$

Lemma 3.3 Lemma 3.2 の仮定の下で, 任意の

$u \in \mathcal{F}(M)$ に対し,

$$(3.3) \quad \|e^{-i(x \cdot \xi + s \cdot \sigma)} \varphi_1 Q \varphi_2 (e^{i(x \cdot \xi + s \cdot \sigma)} u)\|_{H^{a+b}(M)} \leq C((1+|\xi|+|\sigma|)^b \|u\|_{H^a(M)}).$$

Lemma 3.4

同じ仮定の下で, $\forall b \in [0, -s_0]$ に対し

$$(3.4) \quad \|e^{-is\sigma} Q(e^{is\sigma} u)\|_{H^{a+b}(M)} \leq C((1+|\sigma|)^{b+s_0} \|u\|_{H^a(M)}).$$

Lemma 3.5

Q is order- s の β -擬微分作用素

とあくと, Q は $\ell'(M) \hat{\otimes} \mathcal{S}'(R') \xrightarrow{\mathcal{O}_M} \ell'(M) \hat{\otimes} \mathcal{S}'(R')$
への連続線型写像に一意的に拡張される.

Lemma 3.2 — 3.4 は Fourier 変換により容易に
示し得る.

さて, P に関する我々の仮定の下では.

定理 3.1 T_0 が十分大のとき, $Z \in \Sigma(\delta, 0)$ のとき,
 $(P + Z^{2m} + T_0)^{-1}$ は存在して $\forall a \in [0, 2m]$
に對し

$$(3.5) \quad \| (P + Z^{2m} + T_0)^{-1} \|_0 \leq C (1 + |Z|)^{a-2m}$$

但し, L が $H^a(M)$ から $H^b(M)$ への連続線型写像のとき
その norm を ${}_b \| L \|_a$ と書くことにする.

これによつて 先ず, 定理 2 の作用素 $E^0(Z)$ の存在が分る.
次に $G_Z^{(10)}$ を

$$(3.6) \quad G_Z^{(10)} \varphi \otimes \psi = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}^1} \hat{\varphi}(\sigma) e^{i\sigma Z} (E^{(10)}(\sigma Z) \psi) d\sigma$$

で定義する. すなわち, 定義 2 によつて $G_Z^{(10)}$ と E^0 は
結ばれる. $G_Z^{(10)}$ が β -擬微分作用素であることは,
次のようにして示される. まず, Lemma 3.1 を

$Q = P + Z^{2m} D_\sigma^{2m} + T_0$ に適用する. と $1 \leq m < \infty$ に

つまり, β pseudo-diff. op. F_Z は $-\infty$ 位の β -pseudo-diff operator Q'_Z, Q''_Z がある

$$Q F_Z = I + Q'_Z, \quad F_Z Q = I + Q''_Z.$$

従って

$$(3.7) \quad G_Z^{(10)} = F_Z - Q'_Z F_Z + Q'_{Z,-\infty} G_Z^{(10)} Q_{Z,-\infty}$$

とかけろ。 Lemma 3.3 125より

$$\| e^{-i(\lambda \cdot \xi + s\tau)} \varphi (F_Z - Q'_Z F_Z) (\varphi_2 u e^{i(\lambda \cdot \xi + s\tau)}) \|_{H^a(M)} \leq C_Z \| u \|_{H^a(M)}.$$

また ~~次の補~~

Lemma 3.6, Lemma 3.3 の仮定の下で,

$R_1, R_2 \in \beta$ -pseudo-diff. operator of order $-k \leq 0$,

とすると, $\forall a \in [0, k]$ 125より

$$(3.7) \quad \| e^{-i(\lambda \cdot \xi + s\tau)} \varphi R_1 G_Z^{(10)} R_2 (\varphi_2 u e^{i(\lambda \cdot \xi + s\tau)}) \|_{H^a(M)} \leq C_0 (1 + |\lambda \tau|)^{-2m} \| u \|_{H^a(M)}.$$

C_0 は Z によらず const, $u \in \mathcal{D}(M)$.

これより, $\mathcal{E}(M) = \bigcap_{a \geq 0} H^a(M)$ と表わすことが出来る。

~~$G_Z^{(10)}$~~ $G_Z^{(10)}$ は β -pseudo-diff op. であることが分かる。

よ 却る Lemma 3.6 に於いて $R_1 = Q'_{2, -\infty}$

$R_2 = Q_{2, -\infty}$ とおいて (3.7), (3.8) 式を考慮

すると, $\varphi, \psi \in$ 任意の C_0^∞ -functions として,

(*) 線型写像, $u \longrightarrow e^{-i(x\cdot\xi + s\tau)} \varphi G_2^{(10)} \psi(u e^{i(x\cdot\xi + s\tau)})$
は $\mathcal{D}(M)$ から $\mathcal{D}(M)$ への連続写像として,
 $\xi, \tau \in \mathbb{R}^{n+1}$ で動かしたとき, 同程度連続のこと
が分かる.

そこで, (3.7) を導びいたと同様にして,

$$(3.10) \quad G_2^{(10)} = F_2 - G_2^{(10)} Q_{2, -\infty}$$

が成立することが分かる。よって

$$(3.11) \quad \begin{aligned} & e^{-i(x\cdot\xi + s\tau)} \varphi G_2^{(10)} (\psi u e^{i(x\cdot\xi + s\tau)}) \\ &= e^{-i(x\cdot\xi + s\tau)} \varphi F_2 (\psi u e^{i(x\cdot\xi + s\tau)}) \\ & \quad - \sum_{j=1}^k e^{-i(x\cdot\xi + s\tau)} \varphi G_2^{(10)} \varphi_j e^{i(x\cdot\xi + s\tau)} (\varphi_j e^{-i(x\cdot\xi + s\tau)} Q_{2, -\infty} \psi u e^{i(x\cdot\xi + s\tau)}) \end{aligned}$$

(但し $\varphi_j, j=1, \dots, k$, は十分細い support をもつ, smooth partition of unity on M .)

F_2 は β -擬微分作用素だから 右辺第1項は
(ξ, τ) による漸近展開をもつ。右辺第2項

の中の $\varphi_j e^{-i(\lambda_j + s - \tau)} Q_{2, -\lambda_j}(\varphi u e^{i(\lambda_j + s - \tau)})$ も同様に漸近展開をもつ。これは $\mathcal{D}(M)$ の Topology での漸近展開である。 (2) を考慮すれば, (3.11) 式右辺の2項, 従って, 左辺が漸近展開をもつことが分る。このことは, $G_2^{(0)}$ が β -擬微分作用素であることを示している。

定理2の証明は, 定理1の証明のアナロジーでも良いし, 定理1から導くのも良い。定理3は Lemma 3.3 の応用である。定理4は, 前半, 評価(2.6)を出発点は, Sobolev の埋蔵定理と, L. Schwartz の核定理と, 定理3から出る。(2.7)式以後は, β -擬微分作用素の一般論から分る。

以上の詳しい証明は, 下記を参照願いたい。

D. Fujiwara, The asymptotic Formula for the trace of the Green Operators of Elliptic Operators on Compact Manifolds, Proc. Jap. Acad. vol.43, (1967) p.426-428 or, Journal of the Fac. of Sc., The University of Tokyo, to appear.