

整数表現に関連したゼータ関数について

(Bushnell-Reiner の仕事の紹介)

北大理 竹ヶ原 裕元

(Yugen-Takegahara)

Solomon のゼータ関数に関しての Bushnell-Reiner による数多くの仕事のうち、ここでは Solomon の予想に関するものと、有限群 G が与えられたときの $\mathbb{Z}G$ のゼータ関数の計算についての仕事を紹介します。まず、Solomon のゼータ関数の諸性質を見てゆきます。

Λ : a $\mathbb{Z}$ -order in a f.d. semisimpl $\mathbb{Q}$ -algebra A

L : a full Λ -lattice in a f.g. left A -module V

定義 (Solomon のゼータ関数) s を複素変数,

$$\zeta_L(s) := \sum_N (L:N)^{-s}, \quad N \text{ は } L \text{ に含まれる full } \Lambda\text{-lattice 全体を動く.}$$

この関数は $\operatorname{Re}(s) > \dim_{\mathbb{Q}} V$ で確かに収束し、意味を持ちます。特に $V=A=\mathbb{Q}$, $L=\Lambda=\mathbb{Z}$ とすると、Liemann のゼータ関数, F を $\mathbb{Q}$ の有限次拡大体, R をその整数環として, $V=A=F$, $L=\Lambda=R$ とするとき,

Dedekind のゼータ関数にそれぞれ一致します。また、

$A = \mathbb{Q}$, $\Lambda = \mathbb{Z}$, $V = \mathbb{Q}^n$, $L = \mathbb{Z}^n$ とすると、

$$\zeta_L(s) = \zeta_{\mathbb{Z}}(s) \cdot \zeta_{\mathbb{Z}}(s-1) \cdots \zeta_{\mathbb{Z}}(s-n+1)$$

$\zeta_{\mathbb{Z}}(s)$ は Riemann のゼータ関数

となっています。

Local case でもゼータ関数が定義されますが、

特に、simple $\mathbb{Q}_p$ -algebra の maximal $\mathbb{Z}_p$ -order で定義されるゼータ関数について "Hey's formula" が知られています。

"Hey's formula"

$B := M_n(D)$, D は f.d. division $\mathbb{Q}_p$ -algebra

T : maximal $\mathbb{Z}_p$ -order in B

W : k -copies of simple left B -module

M : a full T -lattice in W

$e := \sqrt{\dim_F D}$, F は D の中心, $\mathbb{Z}$ の整数環を $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \zeta_M(s) = \prod_{i=0}^{k-1} \zeta_{\mathbb{R}}(nes - ei), \zeta_{\mathbb{R}}(s) \text{ は Dedekind の}$$

ゼータ関数

一般の場合も、maximal order 上の lattice のゼータ関数は扱い易く (maximal order は algebra の Wedderburn 分解に関して、simple algebra の

maximal order の直和として表わされる。lattice もそれに従い直和として表わされ、ゼータ関数はこの直和因子のゼータ関数の積になっている。)、次に述べる "Euler product" とともに、ゼータ関数の性質を調べる上で重要な働きをします。

p の添字で p -進完備化, (p) の添字で局所化をあらわすと, Λ_p は $\mathbb{Q}_p$ -algebra A_p の $\mathbb{Z}_p$ -order, L_p は left A_p -module V_p の full Λ_p -lattice となり $\zeta_{L_p}(s)$ が定義され, 同様に, $\zeta_{L_{(p)}}(s)$ も定義されます。このとき

$$\zeta_{V_p}(s) = \zeta_{L_{(p)}}(s)$$

が示されて, さらに

"Euler product" $\zeta_V(s) = \prod_p \zeta_{V_p}(s)$ が成り立ちます。

Liemann のゼータ関数, あるいは, Dedekind のゼータ関数の Euler product は知られていますが, これはこの拡張となっています。

Γ を Λ を含む maximal order, $B := \{p: \text{素数} \mid \Gamma_p \neq \Lambda_p\}$ ($|B| < \infty$) とおくと, "Euler product" より

$$\zeta_L(s) = \prod_{p \in B} \zeta_{L_p}(s) / \zeta_{\Gamma_p L_p}(s) \cdot \zeta_{\Gamma L}(s)$$

が得られます。($\Gamma_p L_p, \Gamma \cdot L$ は Γ -lattice と考える。)

§1 Solomon の予想

$A, \wedge, V, L$ は先の定義に従うものとします。いま、

$$A = \prod_{i=1}^r A_i, \quad A_i \text{ は Wedderburn component.}$$

$$A_i = M_{n_i}(D_i), \quad D_i \text{ は division } \mathbb{Q}\text{-algebra}$$

$$V_i = A_i V, \quad k_i\text{-copies of simple left } A\text{-module}$$

$$e = \sqrt{\dim_{F_i} D_i}, \quad F_i \text{ は } D_i \text{ の中心, その整数環を } R_i.$$

として、次の関数を定義します。

$$\zeta_V(s) := \prod_{i=1}^r \prod_{j=0}^{k_i e - 1} \zeta_{R_i}(n_i e (s - j)), \quad s \text{ は複素変数}$$

この関数は Dedekind のゼータ関数により定義されていますから、その Euler product により、“p-part” が考えられ、それを $\zeta_{V,p}(s)$ と表わすと、

$$\zeta_V(s) = \prod_p \zeta_{V,p}(s)$$

と、“Euler product” が考えられます。さらに、

定理 (Solomon [1])

素数から成る有限集合 B があリ、

$$\zeta_L(s) = \prod_{p \in B} \zeta_{L,p}(s) / \zeta_{V,p}(s) \cdot \zeta_V(s), \quad \text{特に}$$

$\zeta_{L,p}(s) / \zeta_{V,p}(s)$ は $\mathbb{Q}$ 上 $p^{\mathbb{N}}$ の有理関数である。

“Solomon の予想”

$$\zeta_{L,p}(s) / \zeta_{V,p}(s) \in \mathbb{Z}[p^{-s}]$$

この予想は, Λ が maximal order ならば,
 "Hey's formula" より, $\Lambda = \mathbb{Z}G$, G は素数位数の巡回群
 ならば計算により, それぞれ正しいことが知られて
 いました。その後, Bushnell-Reiner [1] は, より "強
 い形" で, 肯定的に, この予想を証明しました。

Λ : a $\mathbb{Z}_p$ -order in a f. d. semisimple $\mathbb{Q}_p$ -algebra A

L : a full Λ -lattice in a f. g. left A -module V .

定理 (Bushnell-Reiner [1])

Γ を Λ を含む maximal $\mathbb{Z}_p$ -order とすると,

$$\zeta_L(s) / \zeta_{\Gamma L}(s) \in \mathbb{Z}[p^{-s}]$$

先に述べた事と, この定理より, ただちに,
 Solomon の予想が解かれます。以下 Bushnell-Reiner
 による, この定理の証明を, 簡単に説明します。

[証明の概略]

$X = \{M_1, \dots, M_n\}$ を V の中の full Λ -lattice の同型類
 の代表全体の集合とします。 ($|X| < \infty$) $M \in X$ に対し
 て, 次の関数を定義します。 s を複素変数として,

$$\zeta_L(M; s) := \sum (L:N)^{-s}, \quad N \text{ は } M \text{ と同型な } L \text{ に含まれる full lattice を動く。}$$

明らか1=, $Z_L(s) = \prod_{i=1}^r Z_L(M_i; s)$ を得ます。記号,

$$B := \text{End}_A V, \quad B^\times := \text{Aut}_A V$$

$$\{M:L\} := \{x \in B \mid Mx \leq L\} \quad \dots \quad \mathbb{Z}_p\text{-lattice in } B$$

$$\text{Aut}_A M := \{x \in B \mid Mx = M\} \quad \dots \quad \text{unit group of } \mathbb{Z}_p\text{-order in } B$$

を用いて, $Z_L(M; s)$ を

$$Z_L(M; s) = \sum (L:Mx)^{-s}, \quad x \text{ は } \text{Aut}_A M \backslash \{M:L\} \cap B^\times \text{ の代表全体を動く.}$$

と変形し, さらに V の中の任意の full $\mathbb{Z}_p$ -lattice

X, Y に対して, 新しい index $(X:Y) = (X:X \cap Y)/(Y:X \cap Y)$

を導入し, $x \in B^\times$ の norm を, $\|x\| = (Mx:M)$ (M は任意

の full $\mathbb{Z}_p$ -lattice としてよい。) と定義すると,

$$(L:Mx) = (L:M) \cdot (M:Mx) = (L:M) \cdot \|x\|^{-1} \quad \text{より,}$$

$$Z_L(M; s) = (L:M)^{-s} \sum \|x\|^s, \quad x \in \text{Aut}_A M \backslash \{M:L\} \cap B^\times$$

と表わされます。

いま, B に $\mathbb{Q}_p$ -space としての位相 ($\mathbb{Z}_p$ -lattice は 0 の compact open neighborhood) を導入すると, $B^\times$ はその subset top. で, locally compact な位相群と考えられる。そこで $B^\times$ の Haar 測度, dx (その measure を μ^x , $\mu^x(\text{Aut}_A M)$ は 0 でない有限の値をもつ。) を用い

て, $Z_L(M; s)$ は,

$$Z_L(M; s) = \mu^*(\text{Aut}_\Lambda M)(L; M)^{-s} \int_{\mathfrak{p}^\times} \Phi_{\{M; L\}}(x) \|x\|^s dx$$

と考えられます。ここで $\Phi_{\{M; L\}}$ は B の中での $\{M; L\}$ の char. function.

補題 (Bushnell-Reiner[1])

Φ を B 上の Schwartz-Bruhat function (ie locally constant な compact support をもつ複素数値関数) とすると,

$$\{\zeta_L(s)\}^{-1} \int_{\mathfrak{p}^\times} \Phi(x) \|x\|^s dx \in \mathbb{C}[P^s, P^{-s}]$$

証明は, まず, B が simple algebra, Φ が $\text{End}_L(\Gamma L)$ の部分集合 $x + P^f \text{End}_L(\Gamma L)$, $f \geq 0$, の場合に帰着させ最終的には, "Hermite normal form" 的な行列の操作で証明を与えています。

さて, 補題より, $\{\zeta_L(s)\}^{-1} Z_L(M; s) \in \mathbb{C}[P^s, P^{-s}]$ が得られますが, 一方定義から, $\{\zeta_L(s)\}^{-1} Z_L(M; s) \in \mathbb{Z}[\mathbb{P}^\times]$, (形式的巾級数の環) となっていますから, ただちに定理の主張を得ます。

§2 有限群のゼータ関数

G を有限群, Γ を $\Lambda = \mathbb{Z}G$ を含む $\mathbb{Q}G$ の maximal order とすると, G の位数を割らない素数 p に対して, $\Lambda_p = \Gamma_p$ となり, Euler product より

$$\zeta_{\Lambda}(s) = \prod_{p \nmid |G|} \zeta_{\Lambda_p}(s) / \zeta_{\Gamma_p}(s) \cdot \zeta_{\Gamma}(s)$$

を得ますから, $\zeta_{\Lambda}(s)$ の計算は $\varphi_p(s) = \zeta_{\Lambda_p}(s) / \zeta_{\Gamma_p}(s)$ の計算に帰着します。また, 先の定理の系として,

“ $\zeta_{\Lambda_p}(s)$ は全平面で定義された有理形関数に解析接続される” ことがわかりますが, そのとき次の関数等式に関する定理が, simple $\mathbb{Q}_p$ -algebra 上で定義された zeta integral の関数等式から導かれます。

定理 (Bushnell-Reiner [1])

$$\zeta_{\Lambda_p}(s) / \zeta_{\Lambda_p}(1-s) = (\Gamma_p : \Lambda_p)^{1-2s} \cdot \zeta_{\Gamma_p}(s) / \zeta_{\Gamma_p}(1-s) \quad \text{—}$$

定理から, $\varphi_p(s) = (\Gamma_p : \Lambda_p)^{1-2s} \cdot \varphi_p(1-s)$ が導かれ, これより, $\varphi_p(s) = \sum_{i=0}^m a_i p^i$, $(\Gamma_p : \Lambda_p) = p^m$ とおくと, $n=2m$, $a_{2m-i} = a_i \cdot p^{m-i}$, $i=0, \dots, m$ となり, $\varphi_p(s)$ に関する情報を与えています。実際に $\zeta_{\Lambda}(s)$ が計算された例としては, G が位数 p, p^2 (p は素数) の巡回群, 位数 $2p$ (p は奇素数) の二面体群と, 広中 [1] で示された metacyclic group の場合があり, 以下最初の 2 つの例を紹介します。

(I) 位数が p, p^2 (p は素数) の巡回群のゼータ関数

ここで述べる内容は Reiner [1] に依ります。以下 p の添字で局所化 (完備化ではなく) を示します。さて,
 $G = \langle \sigma \mid \sigma^{p^2} = 1 \rangle$, $H = \langle \tau \mid \tau^{p^2} = 1 \rangle$ とおくと, まず,

$\mathbb{Q}G \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}(\omega_1) \oplus \cdots \oplus \mathbb{Q}(\omega_{p-1})$, ω_i は 1 の原始 p -乗根
 であり, maximal $\mathbb{Z}$ -order は, $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}[\omega_1] \oplus \cdots \mathbb{Z}[\omega_{p-1}]$ に
 同型であることがわかります。また, $\mathbb{Z}_p G$ の full
 ideal を調べるために, 次の自然な fibre product を
 考えます。

$$\begin{array}{ccc} \Gamma = \mathbb{Z}_p G & \longrightarrow & S = \mathbb{Z}_p[\omega_n] \\ \downarrow & & \downarrow g_1 \\ \Lambda = \mathbb{Z}_p H & \xrightarrow{g_2} & \mathbb{Z}H, \quad \bar{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \end{array}$$

これより, $\Gamma = \{(x, y) \in S \times \Lambda \mid g_1(x) = g_2(y)\}$ と表わさ
 れます。いま I を Γ の full ideal として, I に対して
 Λ の full ideal J を, $J = \{y \in \Lambda \mid (0, py) \in I\}$ と定義し
 ます。このとき, 或る, $g_1((1-\omega_n)^r) = g_2(y)$ を満たす,
 $r \geq 0$, $y \in J$ があり, $I = \Gamma((1-\omega_n)^r, y) + (0, pJ)$ と表わさ
 れます。逆にこのような, J, y, r に対して, Γ の
 full ideal $I = \Gamma((1-\omega_n)^r, y) + (0, pJ)$ が定義されます。
 この対応により, Γ の full ideal I は次のデータで,
 完全に決定されます。

$$I = \Gamma((1-w_n)^r, y) + (0, PJ)$$

(i) J は Λ の full ideal

(ii) r は $g_1((1-w_n)^r) \in g_2(J)$ であるような正整数

(iii) $y \in J$ は $g_2(y) = g_1((1-w)^r)$ である mod PJ の代表

特に, $\Gamma = \Gamma(1, 1) + (0, P\Lambda)$ より, 上の I について,

$$(\Gamma: I) = p^r (\Lambda: J)$$

となります。また, N_J を J, r が与えられたときの,

y の取りちの数とすると, k_J を $g_2(J) = (1-t)^{k_J} \mathbb{Z}H$ で定義するとき,

$$\begin{aligned} N_J &= |J \cap P\Lambda: PJ| = |J: PJ| / |J + P\Lambda: P\Lambda| = p^{p^r-1} / p^{p^r-1-k_J} \\ &= p^{k_J} \end{aligned}$$

これより

$$\zeta_r(s) = \sum_J p^{k_J} \sum_{r \in k_J} \{p^r (\Lambda: J)\}^{-s}$$

さて, この“公式”により $n=1, 2$ の場合で計算されています。 $n=1$ のときは, $\Lambda = \mathbb{Z}_p$ で J は, $J = p^t \mathbb{Z}_p$, $t \geq 0$ と表わされ, $t=0 \Rightarrow k_J = 0$, $t \geq 1 \Rightarrow k_J = 1$ だから

$$\begin{aligned} \zeta_r(s) &= \sum_{t \geq 0} p^{-rs} + p \sum_{t \geq 1} \sum_{z_1} p^{-(1+t)s} \\ &= (1 - p^{-s} + p^{1-2s}) \zeta_{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cup \{0\}}(s) \end{aligned}$$

$$\zeta_{\mathbb{Z}_p}(s) = (1 - p^{-s} + p^{1-2s}) \cdot \zeta_{\mathbb{Z}}(s) \cdot \zeta_{\mathbb{Z} \cup \{0\}}(s)$$

が得られます。なお $n=1$ の場合は Solomon [1],

Bushnell-Reiner [1] でも計算されています。

$n=2$ のとき Γ の full ideal I は

$$I = T((1-w_1)^m, z) + (0, PJ), \quad z \in J$$

$$J = \bigwedge ((1-w_1)^r, y) + (0, p^{t+1}z_r), \quad r \geq k_{p^t z_r}$$

$$\begin{cases} t=0, r=0 \Rightarrow y=1, & t=0, r \geq 1 \Rightarrow y=0 \\ t \geq 1 \Rightarrow y = 0, p^t, \dots, (p-1)p^t \end{cases}$$

として得られ, $(T:I) = p^{r+m+t}$, さらに

$$t=0 \Rightarrow k_J = \text{Min}(r, p-1)$$

$$t=1 \Rightarrow r < p-1 \text{ で } k_J = r$$

$r \geq p-1$ で $p-1$ 個の y について

$$k_J = p-1, \quad 1 \text{ 個の } y \text{ について}$$

$$k_J = p$$

$$t \geq 2 \Rightarrow k_J = \text{Min}(r, p)$$

となっています。以下計算を示すと,

$$\begin{aligned} J_I(S) &= \sum_{r=0}^{p-1} \sum_{m \geq r} p^r \cdot p^{-(r+m)s} + \sum_{r=p}^{\infty} \sum_{m \geq p-1} p^{p-1} p^{-(m+r)s} \\ &\quad + p \cdot \sum_{r=1}^{p-2} \sum_{m \geq r} p^r p^{-(m+r+1)s} + (p-1) \sum_{r \geq p-1} \sum_{m \geq p-1} p^{p-1} p^{-(m+r+1)s} \\ &\quad + \sum_{r \geq p-1} \sum_{m \geq p} p^p \cdot p^{-(m+r+1)s} \\ &\quad + p \sum_{r=1}^{\frac{p}{2}} \sum_{t \geq 2} \sum_{m \geq r} p^r \cdot p^{-(m+r+t)s} \\ &\quad + p \sum_{r \geq p+1} \sum_{t \geq 2} \sum_{m \geq p} p^p \cdot p^{-(m+r+t)s} \\ &= \dots \end{aligned}$$

となるわけですがけれど, 結果は非常に複雑なものとなっています。

(II) $G = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^2 = \tau^p = 1, \sigma\tau\sigma = \tau^{-1} \rangle$, p は奇素数のゼータ関数

ここでは, Bushnell-Reiner [2] の紹介をします。

ω : 1 の原始 p -乗根

$L := \mathbb{Q}(\omega)$, $K := \mathbb{Q}(\omega + \omega^{-1})$

$S := \mathbb{Z}[\omega]$, $R := \mathbb{Z}[\omega + \omega^{-1}]$

$H := \langle p \mid p^2 = 1 \rangle \cdots$ 位数 2 の巡回群

$S \circ H$: twisted group ring

$\cdots$ R -order in K -algebra $L \circ H \cong M_2(K)$.

まず, $\mathbb{Q}G \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus M_2(K)$ で, $\mathbb{Z}G$ を含む maximal order は $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus M_2(R)$ と同型です。さらに, fibre product,

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{Z}G & \longrightarrow & S \circ H \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbb{Z}H & \longrightarrow & \mathbb{Z}H
 \end{array}
 \quad (*) \cdots \text{を考えます。}$$

— $\varphi_2(S)$ の計算 —

(*) を 2 で局所化すると, $\mathbb{Z}_2 G \cong \mathbb{Z}_2 H \oplus S \circ H$ を得ます。

(これは $p \neq 2$ による。) ここで, $S \circ H$ が $L \circ H$ の maximal R_2 -order である (Auslander-Goldman の仕事による。) ことに注意すると, (I) の結果より,

$$\varphi_2(S) = \zeta_{\mathbb{Z}_2 H}(S) / \zeta_{\mathbb{Z}_2}(S) \cdot \zeta_{\mathbb{Z}_2}(S) = 1 - 2^{-p} + 2^{1-2p}$$

を得ます。

— $\varphi_p(s)$ の計算 —

(*) を p で局所化して,

$$\begin{array}{ccc} \text{fibre product} & \Gamma = \mathbb{Z}_p G & \xrightarrow{f_1} \mathbb{Z}_p H = \mathbb{Z}_p e_1 \oplus \mathbb{Z}_p e_2 \\ & f_2 \downarrow & \downarrow g_1 \quad e_1 = \frac{1-p}{2}, e_2 = \frac{1+p}{2} \\ & \Lambda = S_p^\circ H & \xrightarrow{g_2} \mathbb{Z} H \end{array}$$

を考えます。ここで、 Λ は $L \circ H$ の hereditary order (Auslander-Rim の仕事による。) ですから、 π を R_p の prime element (S_p, R_p は d.v.r.) とすると、 $|R_p: \pi R_p| = p$ で、 $\Lambda \cong \left\{ \begin{pmatrix} a & \pi b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in R_p \right\} = T \subset M_2(K)$ となります。

$\Lambda = \{(x, y) \in \mathbb{Z}_p H \times \Lambda \mid g_1(x) = g_2(y)\}$ と表わし、 $\mathbb{Z}_p H$ の full ideal が、 $\mathbb{Z}_p H x$, $x = p^k e_1 + p^l e_2$ $k, l \geq 0$, で全て得られることと、 $\ker g_2 = (1-w)\Lambda$ に注意すると、(I) と同様に Γ の full ideal は $\mathbb{Z}_p H$ と Λ の情報から次のように決定されます。

$$I = \Gamma(a, b) + (0, (1-w)J)$$

(i) J は Λ の full ideal

(ii) $g_1(a) \in g_2(J)$ となる $a = p^k e_1 + p^l e_2$

(iii) $b \in J$ は $g_2(b) = g_1(a)$ である mod J の代表.

さらに、 $(\Gamma: I) = p^{k+l} \cdot (\Lambda: J)$ で、与えられた J, a ,

に対する b の取りちの数 N_J は,

$$N_J = |J \cap (1-w)\Lambda: (1-w)J| = p^2 / |J + (1-w)\Lambda: (1-w)\Lambda|.$$

これより Λ を T と同一視して考えます。与えられた T の元に対応する Λ の元の g_2 による像は、行列の対角成分を $\text{mod } \pi R_p$ で考えた $\overline{\mathbb{Z}}$ の元を、 $\mathbb{Z}H$ の $\mathbb{Z}$ -basis, e_1, e_2 の係数として得られる $\mathbb{Z}H$ の元に一致します。

さて、 T の full ideal の同型数の代表は

$$T, \pi M_2(R_p), K = \left\{ \begin{pmatrix} \pi^a & \pi^b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in R_p \right\}$$

となっていることから、 T の full ideal は次の 3 type で完全に決まります。

$$(i) \quad J = TX, \quad X \in T^* \setminus T \cap GL_2(K)$$

$$(ii) \quad J = M_2(R_p)X, \quad X \in GL_2(R_p) \setminus \left\{ \begin{pmatrix} a & \pi^b \\ c & \pi^d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in R_p \right\} \cap GL_2(K).$$

$$(iii) \quad J = KX, \quad X \in GL_2(R_p) \setminus M_2(R_p) \cap GL_2(K)$$

さらに、各々の type で、下に表示表のように、代表 X の取り方が決まります。同時に $g_1(a) \in g_2(J)$ となる、 a も決まり、 $(1-\omega)\Lambda = \text{rad } \Lambda$ ですから与えられた J に対する N_J も決定されます。(ここで R_p の元の ex. val. を表わします。) 表をもとに $\varphi_p(S)$ を計算すると、

J	X	$ T:J $	N_J	a
TX	$\begin{pmatrix} 0 & \pi^n \\ \pi^m & d \end{pmatrix}$ $m \geq 0, n \geq 1, d \in R_p \setminus \pi^n$	$p^{2(m+n)}$	P if $v(d)=0$ P^2 if $v(d)>0$	$k \geq 1, l \geq 0$ $k, l \geq 1$
TX	$\begin{pmatrix} \pi^m & \pi^b \\ 0 & \pi^n \end{pmatrix}$ $m \geq 0, n \geq 0, b \in R_p \setminus \pi^n$	$p^{2(m+n)}$	1 if $m=n=0$ P if $\begin{cases} m=0, n>0 \\ n=0, m>0 \end{cases}$ P^2 if $m, n > 0$	$k, l \geq 0$ $k \geq 0, l \geq 1$ $k \geq 1, l \geq 0$ $k, l \geq 1$
$M_2(R_p)X$	$\begin{pmatrix} \pi^m & \pi^b \\ 0 & \pi^n \end{pmatrix}$ $m \geq 0, n \geq 1, b \in R_p \setminus \pi^{n-1}$	$p^{2(m+n)-1}$	P if $m=0$ P^2 if $m > 0$	$k \geq 0, l \geq 1$ $k, l \geq 1$
KX	$\begin{pmatrix} \pi^m & b \\ 0 & \pi^n \end{pmatrix}$ $m \geq 0, n \geq 0, b \in R_p \setminus \pi^n$	$p^{2(m+n)+1}$	P if $n=0$ or $v(b)=0$ P^2 if $n, v(b) > 0$	$k \geq 1, l \geq 0$ $k, l \geq 1$

定理 (Bushnell-Reiner [2])

$$\zeta_{\mathbb{Z}G}(s) = \zeta_2(s) \cdot \zeta_p(s) \cdot \zeta_{\mathbb{Z}}(s) \cdot \zeta_{\mathbb{Z}}(s) \cdot \zeta_R(2s) \cdot \zeta_R(2s-1)$$

$$\zeta_2(s) = 1 - 2^{-s} + 2^{1-2s}$$

$$\zeta_p(s) = 1 + (p-1)p^{-2s} + 2 \cdot p^{2-3s} + (p-1)p^{1-4s} + p^{2-6s} \quad \dots$$

文

献

Bushnell-Reiner [1] Zeta functions of arithmetic orders
and Solomon's conjecture. Math. Z. 173, 135-161 (1980)

Bushnell-Reiner [2] Zeta functions of hereditary orders
and integral group ring. Vis. Scholar's Lec.-1980, natl. (1981)

広中 [1] Zeta functions of integral group rings of meta-
cyclic groups. TSUKUBA J. Math. Vol.5, No.2 267-283 (1981)

Reiner [1] Zeta functions of integral representations.
Comm. algebra 8(10), 911-925 (1980)

Solomon [1] Zeta functions and integral representation
theory. Advance in Math 26, 306-326 (1977)