

UNIQUE GLOBAL EXISTENCE AND ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF SOLUTIONS FOR WAVE EQUATIONS WITH NON-COERCIVE CRITICAL NONLINEARITY

東京大学大学院数理科学研究科 中西 賢次 (Kenji Nakanishi)

次の半線形波動方程式について、時間大域解の一意存在と、時刻無限大での漸近挙動を考える。

$$(1) \quad \begin{cases} \square u + f(u) = 0 & \text{for } (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}, n \geq 3, \\ u(0) = \varphi, \quad \dot{u}(0) = \psi, \end{cases}$$

ただし $\square = \partial_t^2 - \Delta$. f は次の条件を満たすものを考える。(以下、 C は全て正定数を表す。)

$$(2) \quad \begin{aligned} & f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(0) = 0, \\ & {}^3F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ s.t. } \partial_{\bar{z}} F(z) = f(z), F(0) = 0, \quad F(z) \geq -C|z|^2, \\ & L(\lambda) := \sup_{|u|+|v| \leq \lambda} \frac{|f(u) - f(v)|}{|u - v|} \leq C(1 + \lambda^{2^*-2}), \quad 2^* := \frac{2n}{n-2}. \end{aligned}$$

これより特に $|F(u)| \leq C(|u|^2 + |u|^{2^*})$ が成り立ち、初期値を $\varphi \in H^1, \psi \in L^2$ と取れば、保存量であるエネルギー

$$E = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\dot{u}|^2 + |\nabla u|^2 + F(u)}{2} dx$$

はソボレフの埋蔵定理により、有限値になる。

1. 既知の結果

時間大域解の一意存在については、次の二つのクラスの f に対して示されている。この場合、初期値は $\varphi \in H_{loc}^1, \psi \in L_{loc}^2$ として良い。

(i) Subcritical case [2]: f が (2) 及び 次をみたす時。

$$(3) \quad L(\lambda) = o(\lambda^{2^*-2}) \quad (\lambda: \text{大})$$

(ii) Critical case [6, 4]: f が (2) 及び 次をみたす時。

$$(4) \quad G(u) := \operatorname{Re}(\bar{u}f(u)) - F(u) \geq C|u|^{2^*} \quad (|u|: \text{大})$$

ここで (3) と (4) は両立せず、上の二つの結果は互いに独立であることに注意。とくに (4) は、非線形項が「大きい」ことを要求する不自然な条件であり、この条件 (4) を省けないかという問題が Kapitanski [4, pp. 220, Remark] により提出された。本講演ではこの問題を解決する。

時刻無限大での漸近挙動についても状況は良く似て、二つの異なるクラスに対する結果がある。この場合は 初期値を $\varphi \in \dot{H}^1, \psi \in L^2$ ($\dot{H}^1$ は homogeneous Sobolev space, $\|\varphi\|_{\dot{H}^1} := \|\nabla \varphi\|_{L^2}$) とすると、 $t \rightarrow \infty$ で 線形方程式

$$(5) \quad \begin{cases} \square u_+ = 0, \\ u_+(0) = \varphi_+, \quad \dot{u}_+(0) = \psi_+ \end{cases}$$

の解に エネルギーノルム $\|\nabla u(t)\|_{L^2} + \|\dot{u}(t)\|_{L^2}$ の意味で漸近することが、次の二つの場合に示されている。

(i) Subcritical case [3]: $n \geq 4$ で、 f が (2) 及び 次をみたす時。

$$(6) \quad \begin{aligned} L(\lambda) &\leq C \min(\lambda^{p_1}, \lambda^{p_2}), \quad 0 < \exists p_1 < 2^* - 2 < \exists p_2, \\ G(u) &\geq C \min(|u|^2, |u|^{p_3}), \quad 2 \leq \exists p_3. \end{aligned}$$

(ii) Critical case [1]: f が (2) 及び 次をみたす時。

$$(7) \quad \begin{aligned} L(\lambda) &\leq C\lambda^{2^*-2}, \\ F(u) &\geq C|u|^{2^*}, \quad H(u) := \frac{n-1}{2}G(u) - F(u) \geq 0 \end{aligned}$$

以下に述べる定理は、非線形項の条件に関して、上の四つの結果の拡張になっている。

2. 主結果

定理 1 (一意存在). (2) 及び

$$(8) \quad \min(G(u), 0) = o(|u|^{2^*}) \quad (|u|: \text{大})$$

を仮定すると、任意の $\varphi \in H_{loc}^1, \psi \in L_{loc}^2$ に対し、以下を満たす (1) の解 u が唯一つ存在する。

$$(u, \dot{u}) \in C(\mathbb{R}; H_{loc}^1 \oplus L_{loc}^2),$$

$$u \in L_{loc}^q(\mathbb{R}^{1+n}), \quad q = \frac{2(n+1)}{n-2}.$$

定理 2 (漸近挙動). (2) 及び

$$(9) \quad \begin{aligned} L(\lambda) &\leq C\lambda^{2^*-2}, \\ G(u) &\geq 0 \end{aligned}$$

を仮定すると、任意の $\varphi \in \dot{H}^1, \psi \in L^2$ に対し、 u を定理 1 で与えられる (1) の解とするとある $(\varphi_+, \psi_+) \in \dot{H}^1 \oplus L^2$ に対する (5) の解 u_+ について以下が成り立つ。

$$\begin{aligned} \|u_+(t) - u(t)\|_{\dot{H}^1} &\rightarrow 0, \\ \|\dot{u}_+(t) - \dot{u}(t)\|_{L^2} &\rightarrow 0. \end{aligned} \quad (t \rightarrow \infty)$$

これらの定理は、上に挙げた subcritical case と critical case の結果を両方含んでいるだけでなく、それ以外にもたとえば次のような非線形項に適用できる。

既知の結果に含まれない非線形項の例

- (i) $F(u) = |u|^{2^*-4\varepsilon}(1 + \cos(1 + |u|^2)^\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ 小のとき、 f, F, G は subcritical order だが、 L は critical order になるため、(3) も (4) も成り立たない。しかし (8) は成り立つ。
- (ii) $G(u) = |u|^{2^*}\{1 + \cos \log(1 + |u|^2)\}$ のときは critical case だが、 G が無限に零点を持つので (4) は成り立たない。しかし (8), (9) は成り立つ。
- (iii) さらに漸近挙動に関しては、 $G(u) = |u|^{2^*}g(u)$ で $g(u) = 1/(1 + |u|^2)$ または $g(u) = |u|^2/(1 + |u|^2)$ とすると、 $|u|$ 小で critical, $|u|$

大で subcritical (またはその逆) になるので (6) も (7) も成立しない。しかし (9) は成り立つ。

また、subcritical case の漸近挙動について、[3] の結果を $n = 3$ に拡張したことにもなる。なお G, F から f は次の式で復元される。

$$F(z) = 2|z|^2 \int_0^{|z|} G\left(r \frac{z}{|z|}\right) \frac{dr}{r^3}, \quad f(z) = \partial_{\bar{z}} F(z).$$

3. 証明について

[6], [1] により、定理1,2 の証明は次を示せば良い。

$$(10) \quad \int_{D(t)} |u|^{2^*} dx \rightarrow 0.$$

ただし $D(t)$ は light cone K の時刻 t での切断面である。定理1 では K は 解の最大存在時刻 T (が有限であると仮定して) から過去へ向かう backward light cone で、時刻を T に近づけた時を考え、定理2 では K は 任意の未来へ向かう forward light cone で、時刻を無限大にしたときを考える。

従来は、 $F(u)$ や $G(u)$ の減衰から (10) を出していたので、(4) や (7) のような仮定が必要となった。私の方法は、線形エネルギー $|\dot{u}|^2 + |\nabla u|^2$ の部分的減衰から、Hardy 型不等式を通して (10) を出すので非線形項の条件を緩められる。以下、定理2 で $K = \{(t, x); |x| < t\}$ の場合にもう少し詳しく説明する。そのためにまず記号を導入する。

定義.

$$\begin{aligned} r &= |x|, & \theta &= \frac{x}{r}, & \gamma &= \frac{r}{t}, \\ u_r &= \theta \cdot \nabla u, & u_\theta &= \nabla u - \theta u_r, & u_H &= \frac{x}{t} \dot{u} + \nabla u. \end{aligned}$$

次の 新しい Morawetz 型の等式が $|u|^{2^*}$ の評価の出発点である。

補題 1. $\forall u(t, x) \in C^2$, $0 \leq \forall \alpha \leq 1$ に対して次が成り立つ。

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_K \overline{(\square u + f(u))} \gamma^\alpha \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \gamma \dot{u} + u_r + \frac{n-1+\alpha-\alpha\gamma^2 u}{2} \frac{1}{r} \right) dx dt \\ = \int_K \gamma^\alpha \left\{ \alpha \frac{|u_H|^2}{r} + (1-\alpha) \frac{|u_\theta|^2}{r} + \frac{|u|^2}{r^2} w(\gamma, n, \alpha) \right. \\ \left. + \frac{n-1+\alpha-\alpha\gamma^2}{2} \frac{G(u)}{r} \right\} dx dt + R_1 \end{aligned}$$

ここで $w(\gamma, n, \alpha)$ は非負有界関数。 $R_1 = R_1(u, f, n, \alpha)$ は線形エネルギー $\sup_t \int |\dot{u}|^2 + |\nabla u|^2 dx$ と線形エネルギーフラックス $\int_{\partial K} |\theta \dot{u} + \nabla u|^2 dS$ で下から評価される。

この式からエネルギークラスの解に対する評価が得られる。 $\alpha = 0$ の場合は良く知られた radial Morawetz estimate ([7, (2.27)]) になるが、さらに $n = 3$ で u が x に関して球対称とすると、右辺 K 上の積分は $G(u)$ の項以外すべて 0 になり、非線形項を使わずに評価するという今の目的には役立たない。しかし $\alpha > 0$ とすると $|u_H|^2$ の項から次の Hardy 型不等式によって $|u|^{2^*}$ に対する評価ができる。

補題 2. $(u, \dot{u}) \in C \cap L^\infty(\mathbb{R}; \dot{H}^1 \oplus L^2)$ の時 $-n+1 < \forall \alpha$ に対して次が成り立つ。

$$\int_K |u|^{2^*} \frac{\gamma^\alpha}{r} dx dt \leq C \|\nabla u\|_{L_t^\infty L_x^2}^{2^*-2} \int_K |u_H|^2 \frac{\gamma^\alpha}{r} dx dt$$

ここで C は n と α だけに依存する正定数である。

この不等式は u が解であるかどうかに関わらず成り立つ。実際は $\alpha = 1$ だけ考えれば十分で、上の二つの補題から

$$(11) \quad \int_K \frac{|u|^{2^*}}{t} dx dt < \infty$$

が得られる。この評価は $G(u) \geq C|u|^{2^*}$ を仮定する場合は radial Morawetz estimate から得られていた。(11) は $\int_{D(t)} |u|^{2^*} dx$ が $t \rightarrow \infty$ で「ほとんど」0 へ行くことを意味するが、本当に 0 へ収束することを示すために次の Morawetz 型の等式を使う。

補題 3. $\forall u(t, x) \in C^2$, $0 < \forall S < \forall T$ に対して次が成り立つ。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T} \operatorname{Re} \int_{K_S^T} \overline{(\square u + f(u))} \left(t\dot{u} + ru_r + \frac{n-1}{2}u \right) dx dt \\ &= \int_{D(T)} \frac{t-r}{t} \frac{|\dot{u}|^2 + |u_r|^2}{2} + \frac{|u_\theta|^2 + F(u)}{2} + \frac{(n-1)^2 |u|^2}{8tr} + \frac{r}{2t} |d(u)|^2 dx \\ & \quad + \int_{K_S^T} \frac{H(u)}{T} dx dt + \int_{S < r=t < T} \frac{r}{T} |d(u)|^2 dx \end{aligned}$$

ここで $K_S^T = \{(t, x) \in K \mid S < t < T\}$, $d(u) = \dot{u} + u_r + (n-1)u/(2r)$.

$S, T \rightarrow \infty, S/T \rightarrow 0$ とすると最後の項はエネルギーフラックスの有界性より 0 に収束し、最後から二番目の項は $|H(u)| \leq C|u|^{2^*}$ と (11) より 0 に収束するので、残った $D(T)$ 上の積分が $T \rightarrow \infty$ で 0 に収束することが示せる。このアイデアは本質的には [5] によるものだが、彼らはこの後 $\int_{D(T)} F(u) dx$ で $\int_{D(T)} |u|^{2^*} dx$ を評価したために条件 $F(u) \geq C|u|^{2^*}$ が必要となった。ところが実は残りの線形部分の項から $\int_{D(T)} |u|^{2^*} dx$ が評価できることが次の Hardy 型不等式からわかる。

補題 4. $u(t) \in \dot{H}^1$ の時 次が成り立つ。

$$\int_{D(t)} |u|^{2^*} \leq C \|\nabla u\|_{L_x^{2^*-2}}^{2^*-2} \int_{D(t)} \frac{t-r}{t} |u_r|^2 + |u_\theta|^2 + \frac{|u|^2}{tr} dx$$

ここで C は n のみに依存する正定数である。

この不等式も、 u が解であるかどうかに関わらず成立し、Sobolev の不等式の精密化と見ることもできる。実際、 $\mathbb{R}^n$ が $\partial D(t)$ の一点へ縮むような縮小変換の列を考えることで、上の不等式から次が従う。

$$\|u\|_{L_x^{2^*}}^{2^*} \leq C \|\nabla u\|_{L_x^{2^*-2}}^{2^*-2} \|\nabla' u\|_{L_x^2}^2,$$

ただし ∇' は $x \in \mathbb{R}^n$ の内の $n-1$ 変数についての偏微分を並べたもので、 C は上と同じ定数である。

以上の四つの補題より、目標の

$$\int_{D(t)} |u|^{2^*} dx \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$$

が得られた。

4. HARDY 型不等式について

補題 2,4 は、極座標を取り、 r について Hardy 型不等式、 θ について Sobolev 型不等式を用いて証明できる。以下、補題 2 の証明の概略を示す。

(補題 2 の略証). $\rho^2 = t^2 - r^2, v(\rho, x) = u(t, x)$ と座標変換し、変換後の重みを $w(\rho, r) = r^{\alpha-1}t^{-1-\alpha}\rho$ と置くと、 S^{n-1} 上のソボレフ埋蔵定理より、

$$\begin{aligned} \int_K |u|^{2^*} \frac{\gamma^\alpha}{r} dx dt &= \int_0^\infty \int |v|^{2^*} w dx d\rho \\ &\leq C \int_0^\infty \left\| \sqrt{\int |v|^{2^*} w r^{n-1} dr} \right\|_{W_\theta^{1,p}}^2 d\rho, \end{aligned}$$

ここで $1/p = 1/2 + 1/(n-1)$. この $W_\theta^{1,p}$ ノルムに対しては、部分積分と Hölder の不等式により次の評価が成り立つ。

$$\left\| \sqrt{\int |v|^{2^*} w r^{n-1} dr} \right\|_{W_\theta^{1,p}}^2 \leq C \left\| r^{\frac{n-2}{2}} v \right\|_{L_r^\infty L_\theta^\beta}^{2^*-2} \int |\nabla v|^2 w r^{n-1} dr.$$

ここで $1/\beta = 1/2 - 1/(2(n-1))$. $u_H = \nabla v$ より、座標を元に戻すと、

$$\int_K |u|^{2^*} \frac{\gamma^\alpha}{r} dx dt \leq C \left\| r^{\frac{n-2}{2}} u \right\|_{L_t^\infty L_r^\infty L_\theta^\beta}^{2^*-2} \int_K |u_H|^2 \frac{\gamma^\alpha}{r} dx dt.$$

最後に Hardy 型不等式

$$\left\| r^{\frac{n-2}{2}} u \right\|_{L_r^\infty L_\theta^\beta} \leq C \|\nabla u\|_{L_x^2}$$

を適用して目的の不等式を得る。□

参考文献

1. H. Bahouri and P. Gérard, *High frequency approximation of solutions to critical nonlinear wave equations*, Prépublications 97-34, Université de Paris-Sud, Mai 1997.
2. J. Ginibre, and G. Velo, *The global Cauchy problem for the non-linear Klein-Gordon equation*, Math. Z. **189** (1985), 487–505.
3. J. Ginibre, and G. Velo, *Scattering theory in the energy space for a class of non-linear wave equations*, Commun. Math. Phys. **123** (1989), 535–573.

4. L. Kapitanski, *Global and unique weak solutions of nonlinear wave equations*, Math. Res. Lett. **1** (1994), 211–223.
5. J. Shatah and M. Struwe, *Regularity results for nonlinear wave equations*, Ann. of Math. **138** (1993), 503–518.
6. J. Shatah and M. Struwe, *Well-posedness in the energy space for semilinear wave equations with critical growth*, IMRN (1994), no. 7, 303–309.
7. W. Strauss, *Nonlinear wave equations*, CBMS Lecture Notes, vol. 73, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1989.