

Eisenstein series and Siegel's formula in the case of Jacobi forms

立教大学理学部 荒川恒男

このノートでは Jacobi Eisenstein 級数の Fourier-Jacobi 展開に重点をおいて Jacobi 形式の場合の Siegel 公式について説明する。ここで述べる Siegel 公式は Jacobi Eisenstein 級数を 2 次形式に付随する theta 級数の線形結合として表わす公式である。数理解析講究録 805 の 'Jacobi 形式について' においても Siegel 公式について説明したが、この項では Jacobi Eisenstein 級数の Fourier-Jacobi 展開と singular series に力点を置いて記述する。また、前回の講義録での若干の間違い (特に Siegel 公式 [Ar1, Theorem 4] の $m = n$ の場合) を訂正したいので、併せて読んで頂けると大変有難いです。

1 元 来 の Siegel 公 式

まず、original の Siegel 公式 ([Si]) を復習する。 $Sym_m^*(\mathbb{Z})$ を degree m の半整数対称行列の成す集合とし、 $Sym_m^*(\mathbb{Z})^+$ を正定値半整数対称行列の成す $Sym_m^*(\mathbb{Z})$ の部分集合とする。類と種を定義する。

定義 (類, 種) $S, S' \in Sym_m^*(\mathbb{Z})$ が同じ類 (resp. 種) に属するとは、 $\exists \gamma \in SL_m(\mathbb{Z})$ に対して $S' = {}^t\gamma S \gamma$ (resp. $\forall p$ に対して、 $\exists \gamma_p \in SL_m(\mathbb{Z}_p)$ を選べば $S' = {}^t\gamma_p S \gamma_p$ とでき、かつ、 S, S' は同符合) となることとする。

このとき、簡約理論により

与えられた S ($\det S \neq 0$) の定める種は有限個の類から成る。

表現の個数、局所密度を次のように定義する。 $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $m \geq n$ とする。

$S \in \text{Sym}_m^*(\mathbb{Z})^+, T \in \text{Sym}_n^*(\mathbb{Z})^+$ に対して

$$A(S, T) = \#\{x \in M_{m,n}(\mathbb{Z}) \mid S[x] = T\}$$

$$A_{p^\nu}(S, T) = \#\{x \in M_{m,n}(\mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z}) \mid S[x] \equiv T \pmod{p^\nu \text{Sym}_n^*(\mathbb{Z})}\}$$

とおく。 $S[x] = {}^t x S x$ とした。さらに局所密度 $\alpha_p(S, T)$ を

$$\alpha_p(S, T) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} p^{-\nu(mn - n(n+1)/2)} A_{p^\nu}(S, T)$$

とする。 ∞ -素点に関する local density $\alpha_\infty(S, T)$ は次式で与えられる。

$$\alpha_\infty(S, T) = \lim_{W \rightarrow T} \int_W dx / \int_W d\sigma_n(Y)$$

ここで W は T の近傍で $W = \{x \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \mid {}^t x S x \in W\}$ とする。また

$$\begin{aligned} dx &= \prod_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} dx_{ij} \quad \text{for } x = (x_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \\ d\sigma_n(Y) &= \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} dy_{ij} \quad \text{for } Y = (\varepsilon_{ij} y_{ij}) = {}^t Y \in M_n(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

但し

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1 & \dots & i = j \\ 1/2 & \dots & i \neq j \end{cases}$$

である。 $A(S, T)$ は類不変量ではあるが、種の不変量ではない。

2 次形式の理論できわめて重要な Siegel の主定理 (Siegel 公式) は次のように定式化される。

Theorem 1 (Siegel [Si]) $m \geq n$, $S \in \text{Sym}_m^*(\mathbb{Z})^+, T \in \text{Sym}_n^*(\mathbb{Z})^+$ とする。 S の定める種に属する類の完全代表系を $S_1, \dots, S_h$ とする。このとき、

$$\left(\sum_{j=1}^h \frac{A(S_j; T)}{E(S_j)} \right) / \left(\sum_{j=1}^h \frac{1}{E(S_j)} \right) = \varepsilon \prod_{p \leq \infty} \alpha_p(S; T)$$

ここで、

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \dots \text{ if } m > n + 1 \text{ or } m = n = 1 \\ 1/2 & \dots \text{ if } m = n + 1 \text{ or } m = n > 1. \end{cases}$$

この公式の右辺の無限積は収束する。

この公式の原証明は [Si] にあるが、Ono [On] の § 8、(11) 式を用いるのが最短の証明かと思われる（直交群の玉河数の計算は認めて）。F.Sato の [Sa] においても等質空間の Siegel 公式の好例として Siegel 主定理の証明が比較的容易な形で与えられている。[Sa] は非常に興味深い Siegel 主定理の解釈である。

$$\Gamma_n = Sp_n(\mathbb{Z}) \quad \Gamma_{n,\infty} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| c = 0 \right\}$$

とおく。\$k\$ 偶数 (\$> n+1\$) に対し Siegel Eisenstein 級数は次式で定義される:

$$E_{k,n}(\tau) = \sum_{M \in \Gamma_{n,\infty} \backslash \Gamma_n} \det J(M, \tau)^{-k}$$

ここで \$\tau\$ は Siegel 上半平面 \$\mathfrak{H}_n\$ の点として、\$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\$ に対して \$J(M, \tau) = c\tau + d\$ とする。このとき、\$E_{k,n}(\tau)\$ は重さ \$k\$、次数 \$n\$ の Siegel 保型形式の成すベクトル空間 \$\mathfrak{M}_k(\Gamma_n)\$ の元になる。よく知られているように、この Eisenstein 級数は

$$E_{k,n}(\tau) = \sum_{T \in Sym_n^*(\mathbb{Z}), T \geq 0} e_{k,n}(T) e(\text{tr}(T\tau))$$

$$\text{但し、 } e(z) = \exp(2\pi iz)$$

と Fourier 展開され、Fourier 係数は \$T \in Sym_n^*(\mathbb{Z})^+\$ ならば

$$e_{k,n}(T) = (\text{ある定数}) \times (\det T)^{k-(n+1)/2} \zeta_n(T, k)$$

で与えられる。但し、

$$\zeta_n(T, s) = \sum_{x \in Sym_n(\mathbb{Q})/Sym_n(\mathbb{Z})} \nu(x)^{-s} e(\text{tr}(xT))$$

$x \in \text{Sym}_n(\mathbb{Q})$ に対して $x = c^{-1}d$ となるように $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_n$ を選び

$$\nu(x) = |\det c|$$

とおく。このとき、 $\zeta_n(T, s)$ は $\text{Re}(s) > n+1$ で絶対収束し、Euler 積を持つ。

$$(1.1) \quad \zeta_n(T, s) = \prod_{p < \infty} \zeta_{n,p}(T, s)$$

各素数 p に対して

$$\zeta_{n,p}(T, s) = \sum_{x \in \text{Sym}_n(\mathbb{Z}[1/p]) / \text{Sym}_n(\mathbb{Z})} \nu(x)^{-s} e(\text{tr}(xT))$$

である。Singular series $\zeta_{n,p}(s, T)$ の explicit な表示は、Shimura [Sh]、Kitaoka [Ki] により詳しく調べられている。 $\zeta_{n,p}(T, s)$ の $s = k$ ($k \in \mathbb{Z}_{>0}$) での特殊値は局所密度に一致する:

$$(1.2) \quad \zeta_{n,p}(k, T) = \alpha_p(S, T) \quad \text{for } \forall S \in \text{Sym}_{2k}^*(\mathbb{Z}), \det(2S) = \pm 1$$

例えば $S = \begin{pmatrix} 0 & 1_k \\ 1_k & 0 \end{pmatrix}$ とすればよい。

(1.1), (1.2) により、2 次形式論の Siegel 主定理は解析的 Siegel 公式に書き換えられる。そのために theta 級数を定義する。

$S \in \text{Sym}_m^*(\mathbb{Z})^+$, $\det(2S) = 1$ に対し

$$\theta_{S,n}(\tau) = \sum_{G \in M_{m,n}(\mathbb{Z})} e(\text{tr}(S[G]\tau))$$

とおく。 $\theta_{S,n}(\tau) \in \mathfrak{M}_{m/2}(\Gamma_n)$ である。

Theorem 2 (解析的 Siegel 公式 [Si]) $m > 2n + 2$ 、 $S \in \text{Sym}_m^*(\mathbb{Z})^+$, $\det(2S) = 1$ とする。 S の定める種に属する類の完全代表系を $S_1, \dots, S_h$ とする。このとき、

$$\left(\sum_{j=1}^h \frac{\theta_{S_j,n}(\tau)}{E(S_j)} \right) / \left(\sum_{j=1}^h \frac{1}{E(S_j)} \right) = E_{m/2,n}(\tau)$$

2 Jacobi 形式の場合

上述の Theorems 1, 2 の Jacobi 形式の本性に合致する Jacobi 形式 version を作りたい。以下、 $l \in \mathbb{Z}_{>0}$ とし、 $S \in \text{Sym}_l^*(\mathbb{Z})^+$ を固定して議論を進める。degree $m+l$ の半整数対称行列から成る次の family に類と種 of の概念を導入する。

$$\text{Sym}_{m+l}^*(S; \mathbb{Z}) = \left\{ Q = \begin{pmatrix} M & {}^t q/2 \\ q/2 & S \end{pmatrix} \mid M \in \text{Sym}_m^*(\mathbb{Z}), q \in M_{l,m}(\mathbb{Z}) \right\}$$

とおき、 $Q \in \text{Sym}_{m+l}^*(S; \mathbb{Z})$ に対し $\tilde{Q} = M - \frac{1}{4}S^{-1}[q]$ とおく。 $\text{Sym}_{m+l}^*(S; \mathbb{Z})^\pm$ を次式で定義する:

$$\begin{aligned} \text{Sym}_{m+l}^*(S; \mathbb{Z})^+ &= \{Q \in \text{Sym}_{m+l}^*(S; \mathbb{Z}) \mid \tilde{Q} > 0\} \\ \text{Sym}_{m+l}^*(S; \mathbb{Z})^- &= \{Q \in \text{Sym}_{m+l}^*(S; \mathbb{Z}) \mid \tilde{Q} < 0\} \end{aligned}$$

定義 (S -類, S -種) $Q, Q' \in \text{Sym}_{m+l}^*(S; \mathbb{Z})$ が同じ S -類 (resp. S -種) に属するとは、 $\exists \gamma = \begin{pmatrix} u & 0 \\ y & 1_l \end{pmatrix}$, ($u \in \text{SL}_m(\mathbb{Z})$, $y \in M_{l,m}(\mathbb{Z})$) に対して $Q' = {}^t \gamma Q \gamma$ (resp. $\forall p$ に対して、 $\exists \gamma_p = \begin{pmatrix} u_p & 0 \\ y_p & 1_l \end{pmatrix}$, ($u_p \in \text{SL}_m(\mathbb{Z}_p)$, $y_p \in M_{l,m}(\mathbb{Z}_p)$) を選べば $Q' = {}^t \gamma_p Q \gamma_p$ とでき、かつ、 Q, Q' は同符合) となることとする。

注意) S -種の定義において u_p の条件として $u_p \in \text{SL}_m(\mathbb{Z}_p)$ の代わりに $u_p \in \text{GL}_m(\mathbb{Z}_p)$ としても同値な定義になる。

やはり、簡約理論により

(*) 与えられた Q の定める S -種は有限個の S -類から成る。

表現の個数、局所密度を次のように定義する。

$m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $m > n$ とする。 $Q \in \text{Sym}_{m+l}^*(S; \mathbb{Z})^\pm$, $T \in \text{Sym}_{n+l}^*(S; \mathbb{Z})^\pm$ に
対して

$$A(Q; T) = \# \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in M_{m+l, n}(\mathbb{Z}) \mid Q \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & 1_l \end{bmatrix} = T \right\}$$

$$A_{p^\nu}(Q; T) = \# \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in M_{m+l, n}(\mathbb{Z}/p^\nu \mathbb{Z}) \mid \right.$$

$$\left. Q \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & 1_l \end{bmatrix} \equiv T \pmod{p^\nu \text{Sym}_{n+l}^*(\mathbb{Z})} \right\}$$

とおき、さらに local density $\alpha_p(Q; T)$ を

$$\alpha_p(Q; T) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} p^{-\nu(mn - n(n+1)/2)} A_{p^\nu}(Q; T)$$

とする。 $A(Q; T) < +\infty$ に注意する。 ∞ -素点に関する局所密度は

$$\alpha_\infty(Q; T) = \det(2S)^{-n} \alpha_\infty(\tilde{Q}, \tilde{T})$$

$\alpha_\infty(\tilde{Q}, \tilde{T})$ は §1 で定義された局所密度

で与える。

$$E(Q) = \# \left\{ \begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix} \mid a \in SL_m(\mathbb{Z}), x \in M_{l, m}(\mathbb{Z}), Q \begin{bmatrix} a & 0 \\ x & 1_l \end{bmatrix} = Q \right\}$$

とおく。

family $\text{Sym}_{m+l}^*(S; \mathbb{Z})^\pm$ に関する 2 次形式の Siegel 公式は次のようになる。

Theorem 3 ([Ar2]) $m > n$, Q, T は上記の通りとする。 Q の定める S -
種に属する S -類の完全代表系を $Q_1, \dots, Q_H$ とする。このとき、

$$\left(\sum_{j=1}^H \frac{A(Q_j; T)}{E(Q_j)} \right) / \left(\sum_{j=1}^H \frac{1}{E(Q_j)} \right) = \varepsilon \prod_{p \leq \infty} \alpha_p(Q; T)$$

ここで、

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \dots \text{ if } m > n+1 \\ 1/2 & \dots \text{ if } m = n+1 \end{cases}$$

この公式の右辺の無限積は収束する。

注意) (i) $m = n$ のときはこのままでは成立せず、 $A(Q; T)$, $\alpha_p(Q; T)$ 等の定義を多少変更しないといけない。[Ar1] ではこのときの扱いが不適切なので、詳細は [Ar2, Theorem 3.4] を参照してください。

(ii) $\tilde{Q}$, $\tilde{T}$ が不定符号の場合にも、佐藤文広氏の定式化 [Sa] に倣って同様の Siegel 公式が示せる。

3 解析的 Siegel 公式

最初に正則 Jacobi 形式と歪正則 Jacobi 形式を定義する。

まず Sp_n を次数 n の symplectic 群とする:

$$Sp_n = \left\{ g \in GL_{2n} \mid {}^t g \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

l と $S \in Sym_l^*(\mathbb{Z})^+$ を固定する。

Jacobi 群 $G_n^J = G_{n,l}^J$ を Sp_{n+l} に含まれる次の形の元

$$(3.1) \quad \begin{pmatrix} a & & b & & & \\ & 1_l & & & & \\ c & & d & & & \\ & & & 1_l & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_n & & 0 & & {}^t \mu \\ & 1_l & & \mu & \rho \\ & & 1_n & & \\ & & & 1_l & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_n & & & & \\ \lambda & 1_l & & & \\ & & 1_n & & -{}^t \lambda \\ & & & 1_l & \end{pmatrix}$$

$$\left(M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sp_n, \quad \lambda, \mu \in M_{l,n}, \quad \rho \in Sym_l \right)$$

の成す Sp_{n+l} の部分群とする。 G_n^J は $\mathbb{Q}$ 上定義された代数群である。(3.1) の形の元を簡単のため $(M, (\lambda, \mu), \rho)$ と書く。また、 $(1_{2n}, (\lambda, \mu), \rho)$ の形の

元の成す Jacobi 群 G_n^J の部分群 (Heisenberg 群) を $H_{n,l}$ と記す。群 Sp_n は Jacobi 群 G_n^J の部分群と自然にみなされ、 Sp_n は $H_{n,l}$ を正規化するので G_n^J は Sp_n と $H_{n,l}$ の半直積になる:

$$G_n^J = Sp_n \triangleright H_{n,l}$$

$G_n^J(\mathbb{R})$ は Siegel-上半平面 $\mathfrak{H}_n$ と $l \times n$ -行列環 $M_{l,n}(\mathbb{C})$ の直積 $\mathcal{D}_{n,l} = \mathfrak{H}_n \times M_{l,n}(\mathbb{C})$ に自然に作用する:

$$g(\tau, z) := (M\langle\tau\rangle, (z + \lambda\tau + \mu)(c\tau + d)^{-1}), \quad \text{where} \\ g = (M, (\lambda, \mu), \rho) \in G_n^J(\mathbb{R}), \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (\tau, z) \in \mathcal{D}_{n,l}.$$

S と $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に依存して定まる保型因子を定義する。

$$J_{S,k}(g, (\tau, z)) := \det(c\tau + d)^k \times \\ e\left(-\text{tr}(S\rho) + \text{tr}(-S[\lambda]\tau - 2^t \lambda S z + S[z + \lambda\tau + \mu](c\tau + d)^{-1}c)\right)$$

$G_n^J(\mathbb{R})$ の最も重要な離散部分群 Γ_n^J を定義する:

$$\Gamma_n = Sp_n(\mathbb{Z}), \quad \Gamma_n^J = G_n^J(\mathbb{Z}) = \Gamma_n \triangleright H_{n,l}(\mathbb{Z})$$

と置く。

定義 (正則 (holomorphic) Jacobi 形式)

$\mathcal{D}_{n,l}$ 上の正則関数 $\phi(\tau, z)$ が weight k , index S の Γ_n^J に関する Jacobi 形式であるとは、次の条件 (i), (ii) を満たすときをいう。

- (i) $\phi(\gamma(\tau, z)) = J_{S,k}(\gamma, (\tau, z))\phi(\tau, z) \quad \text{for } \forall \gamma \in \Gamma_n^J$
- (ii) 特に $n = 1$ の場合には以下の (3.2) の形の Fourier-Jacobi 展開を持つ ($n > 1$ のときは、この条件は不要)。

weight k , index S の Γ_n^J に関する正則 Jacobi 形式の成す空間を $J_{k,S}(\Gamma_n)$ と記す。

Fourier Jacobi 展開 $\phi \in J_{k,S}(\Gamma_n)$ は次の Fourier-Jacobi 展開を有する:

$$(3.2) \quad \phi(\tau, z) = \sum_{\substack{N \in \text{Sym}_n^*(\mathbb{Z}), \tau \in M_{l,n}(\mathbb{Z}) \\ N - \frac{1}{4} {}^t r S^{-1} r \geq 0}} c(N, r) e(\text{tr}(N\tau + {}^t r z))$$

定義 (歪正則 (skew-holomorphic) Jacobi 形式)

$\mathcal{D}_{n,l}$ 上の実解析関数 $\phi(\tau, z)$ が weight k , index S の Γ_n^J に関する歪正則 Jacobi 形式であるとは、次の条件 (i)', (ii)' を満たすときをいう。

$$(i)' \quad \phi(\gamma(\tau, z)) = J_{S,0}(\gamma, (\tau, z)) \det \overline{J(M, \tau)}^{k-l} |\det J(M, \tau)|^l \phi(\tau, z) \\ \text{for } \forall \gamma \in \Gamma_n^J.$$

(ii)' $\phi(\tau, z)$ は次の形の Fourier Jacobi 展開を有する:

$$\phi(\tau, z) = \sum_{\substack{N \in \text{Sym}_n^*(\mathbb{Z}), \tau \in M_{l,n}(\mathbb{Z}) \\ N - \frac{1}{4} {}^t r S^{-1} r \leq 0}} c(N, r) e\left(\text{tr}\left(N\bar{\tau} + \frac{i}{2} S^{-1} [r] \eta + {}^t r z\right)\right)$$

但し、 $\eta = \text{Im} \tau$.

weight k , index S の Γ_n^J に関する 歪正則 Jacobi 形式の成す空間を $J_{k,S}^{skew}(\Gamma_n)$ と記す。

次に Jacobi Eisenstein 級数を導入し、その Fourier Jacobi 展開の係数を § 1 と同様にある singular series の特殊値として表示する。

Γ_n^J の部分群 $\Gamma_{n,\infty}^J$ を

$$\Gamma_{n,\infty}^J = \{(M, (\lambda, \mu), \rho) \in \Gamma_n^J \mid M \in \Gamma_{n,\infty}, \lambda = 0\}$$

とする。

定義 (Jacobi Eisenstein 級数)

(i) k 偶数 $> n + l + 1$ 、 $(\tau, z) \in \mathcal{D}_{n,l}$ に対し

$$E_{k,S,n}(\tau, z) = \sum_{\gamma \in \Gamma_{n,\infty}^J \setminus \Gamma_n^J} J_{S,k}(\gamma, (\tau, z))^{-1}$$

とする。

(ii) $k > n + l + 1$ 、 $l - k$ 偶数に対し

$$E_{k,S,n}^{skew}(\tau, z) := \sum_{\gamma \in \Gamma_{n,\infty}^J \setminus \Gamma_n^J} J_{S,0}(\gamma, (\tau, z))^{-1} \overline{\det J(M, \tau)}^{l-k} |\det J(M, \tau)|^{-l}$$

とする。但し、各 γ に対し $\gamma = (M, (*, *), *)$ とおく。

これらの無限級数は well-defined でかつ $k > n + l + 1$ のとき絶対収束する。

しかも $E_{k,S,n}(\tau, z) \in J_{k,S}(\Gamma_n)$ 、 $E_{k,S,n}^{skew}(\tau, z) \in J_{k,S}^{skew}(\Gamma_n)$ である。

Γ_n の部分群 $U_{n,\infty}$ を

$$U_{n,\infty} = \left\{ \begin{pmatrix} 1_n & x \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} \mid x \in \text{Sym}_n(\mathbb{Z}) \right\}.$$

で定義し、 $L = M_{l,n}(\mathbb{Z})$ とおく。

任意の $T = \begin{pmatrix} N & {}^t r/2 \\ r/2 & S \end{pmatrix} \in \text{Sym}_{n+l}^*(S; \mathbb{Z})$ に対し singular series を

$$\zeta_n(T; s) = \sum_{M \in \Gamma_{n,\infty} \setminus \Gamma_n^* / U_{n,\infty}} \sum_{\lambda \in L/Lc} |\det c|^{-s} e \left(\text{tr} \left(T \begin{bmatrix} 1_n \\ \lambda \end{bmatrix} c^{-1} d \right) \right)$$

で定義する。ここで、 $\Gamma_n^* = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_n \mid \det c \neq 0 \right\}$ である。

singular series $\zeta_n(T; s)$ は $\text{Re}(s) > n + l + 1$ で絶対収束し、Euler 積を持つ:

$$(3.3) \quad \zeta_n(T; s) = \prod_{p < \infty} \zeta_{n,p}(T; s)$$

但し、

$$\zeta_{n,p}(T; s) = \sum_{M \in \Gamma_{n,\infty} \setminus \Gamma_n^{*(p)} / U_{n,\infty}} \sum_{\lambda \in L/Lc} |\det c|^{-s} e \left(\text{tr} \left(T \begin{bmatrix} 1_n \\ \lambda \end{bmatrix} c^{-1} d \right) \right)$$

で与えられる。 $\Gamma_n^{*(p)}$ は $|\det c|$ が p 巾である $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_n^*$ から成る Γ_n^* の部分集合とする。

重要なことは、singular series $\zeta_{n,p}(T; s)$ の特殊値がこの節で定義した局所密度に一致する点である。

$k \in \mathbb{Z}$, $k > n + l + 1$ と任意の $Q \in \text{Sym}_{2k}^*(S; \mathbb{Z})$, $\det(2Q) = (-1)^k$ に対し

$$(3.4) \quad \zeta_{n,p}(T; k) = \alpha_p(Q; T)$$

Jacobi Eisenstein 級数の Fourier Jacobi 展開を

$$E_{k,S,n}(\tau, z) = \sum_{T \in \text{Sym}_{n+l}^*(S; \mathbb{Z}), \tilde{T} \geq 0} e_{k,S,n}(T) e\left(\text{tr}(N\tau + {}^t r z)\right)$$

$$E_{k,S,n}^{skew}(\tau, z) = \sum_{T \in \text{Sym}_{n+l}^*(S; \mathbb{Z}), \tilde{T} \leq 0} e_{k,S,n}^{skew}(T) e\left(\text{tr}(N\bar{\tau} + \frac{i}{2} S^{-1}[r]\eta + {}^t r z)\right)$$

とする。但し、各 T は $T = \begin{pmatrix} N & {}^t r/2 \\ r/2 & S \end{pmatrix}$ と書き、 $\tilde{T} = N - \frac{1}{4} S^{-1}[r]$ とおく。 $\eta = \text{Im}(\tau)$ である。

定数 $\lambda_{n,k,l}$ を

$$\lambda_{n,k,l} = \frac{2^{n(k-l)-n(n-1)/2} \pi^{n(k-l/2)}}{(\det S)^{n/2} \Gamma_n(k-l/2)}.$$

として定めると、Fourier Jacobi 係数は次のように表示される。

Proposition 4 (i) $T \in \text{Sym}_{n+l}^*(S; \mathbb{Z})^+$ のとき

$$e_{k,S,n}(T) = (-1)^{nk/2} \lambda_{n,k,l} \det(\tilde{T})^{k-(n+l+1)/2} \zeta_n(T; k)$$

(ii) $T \in \text{Sym}_{n+l}^*(S; \mathbb{Z})^-$ のとき

$$e_{k,S,n}^{skew}(T) = (-1)^{n(k-l)/2} \lambda_{n,k,l} \det(-\tilde{T})^{k-(n+l+1)/2} \zeta_n(T; k)$$

但し、 $T = \begin{pmatrix} N & {}^t r/2 \\ r/2 & S \end{pmatrix}$ に対し $\tilde{T} = N - \frac{1}{4} S^{-1}[r]$ とおいた。

最後に $Q \in \text{Sym}_{m+l}^*(S; \mathbb{Z})^\pm$ によって定まる theta 級数を導入し、解析的 Siegel 公式を記述してこの稿を終わりとする。

$m > n$ 、 $Q = \begin{pmatrix} M & {}^t q/2 \\ q/2 & S \end{pmatrix}$ 、 $\tilde{Q} = M - \frac{1}{4}S^{-1}[q]$ とする。

(i) $Q \in \text{Sym}_{m+l}^*(S; \mathbb{Z})^+$ 、 $\det(2Q) = 1$ に対し

$$\theta_{Q,n}(\tau, z) = \sum_{G \in M_{m+l,n}(\mathbb{Z})} e(\text{tr}(Q[G]\tau + {}^t z(q \ 2S)G)),$$

(ii) $Q \in \text{Sym}_{m+l}^*(S; \mathbb{Z})^-$ 、 $\det(2Q) = (-1)^m$ に対し

$$\theta_{Q,n}^{skew}(\tau, z) = \sum_{G \in M_{m+l,n}(\mathbb{Z})} e(\text{tr}(Q[G]\tau - 2i\tilde{Q}[G_1]\eta + {}^t z(q \ 2S)G))$$

とおく。但し、 $G = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix}$ with $G_1 \in M_{m,n}(\mathbb{Z})$ である。

(i) の場合、 $\theta_{Q,n}(\tau, z) \in J_{(m+l)/2,S}(\Gamma_n)$ 。 (ii) の場合、 $\theta_{Q,n}^{skew}(\tau, z) \in J_{(m+l)/2,S}^{skew}(\Gamma_n)$ となる。

(3.3), (3.4) 式、Proposition 4 を媒介にして Theorem 3 はつぎの形に書き換えられる。

Theorem 5 (解析的 Siegel 公式、[Ar2, Theorem 5.6]) $m > 2n + l + 2$ とし、 Q は上記 (i) or (ii) の条件を満たすと仮定する。 Q の定める S -種に属する S -類の完全代表系を $Q_1, \dots, Q_H$ とする。このとき、

(i) の場合

$$\left(\sum_{j=1}^H \frac{\theta_{Q_j,n}(\tau, z)}{E(Q_j)} \right) / \left(\sum_{j=1}^H \frac{1}{E(Q_j)} \right) = E_{(m+l)/2,S,n}(\tau, z)$$

(ii) の場合

$$\left(\sum_{j=1}^H \frac{\theta_{Q_j,n}^{skew}(\tau, z)}{E(Q_j)} \right) / \left(\sum_{j=1}^H \frac{1}{E(Q_j)} \right) = E_{(m+l)/2,S,n}^{skew}(\tau, z)$$

参考文献

- [Ar1] 荒川恒男 : Jacobi 形式について 数理研講究録 805、1992
- [Ar2] Arakawa, T.: Siegel's formula for Jacobi forms. preprint.
- [Ki] Kitaoka, Y.: Dirichlet series in the theory of Siegel modular forms. Nagoya Math. J. **95**(1984), 73-84.
- [On] Ono, T.: Mean value theorem in adèle geometry. J. Math. Soc. Japan **20**(1968), 275-288.
- [Sa] Sato, F.: Siegel's main theorem of homogeneous spaces. Commentarii Math. Universitatis Sancti Pauli. . **41**(1992), 141-167.
- [Sh] Shimura, G.: On Eisenstein series. Duke Math. J. **50**(1983), 417-476.
- [Si] Siegel, C. L.: Über die analytische Theorie der quadratischen Formen I, II, III. Ann. of Math. **36**(1935), 527-606; **37**(1936), 230-263; **38**(1937), 212-291.