

Schrödinger 型作用素の正の固有値と一意接続定理

(東大・理) 増田 久弥

この講演の目的は,

$$\mathcal{L}u \equiv -\sum \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i b_j(x) \right) a_{jk}(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i b_k(x) \right) u - qu$$

が、適当な係数に対する条件の下で、 L^2 での、正の“固有値”をもたないことを、次の簡単な場合に“示す”ことにあります。

$$(1) \quad \Delta u + qu + k^2 u = 0 \quad (x \in \Omega)$$

$$k^2 > 0.$$

(Ω は、 $|x| \geq R_0$ を含む領域)

(1) に“示す”のは、例えば、

F. Rellich (Jahresber. Deutsch. Math. Verein. 1943)

$q \equiv 0$ の場合:

T. Kato (C. P. A. M. 1959) $q = O\left(\frac{1}{r^{1+\epsilon}}\right)$ ($\epsilon > 0$)

$r = |x|.$

S. Agmon (J. d'Anal. Math. 1970)

$$q = q_0 + q_1$$

$$q_0 = o(1), \quad \frac{\partial q_0}{\partial r} = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad q_1 = o\left(\frac{1}{r}\right)$$

の場合を, (大ざ. ぼにえば)扱った.

変数係数の場合,

S. Roze (Mat. Sb. 1969) $q = o\left(\frac{1}{r}\right), b_j \equiv 0$.

Ikebe-Uchiyama (R.I.M.S. 1971) $b_j \neq 0$.
 を扱っている。
 $q = o\left(\frac{1}{r}\right)$

さて, (1)のポテンシャル q に対し次の仮定をおく.

仮定 $q = q_0 + q_1$

$$(2) \quad q_0 = o(1), \quad \frac{\partial q_0}{\partial r} = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad q_1 = o\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$(r=|x| \rightarrow \infty)$$

ラプラス作用素 Δ を, 極座標表をみると,

$$\Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{N-1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2} \Lambda$$

(N : 次元, Λ は $N-1$ 次元球面上の Laplace-Beltrami 作用素)。さて (1) は,

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{N-1}{r} \frac{du}{dr} + \frac{1}{r^2} \Lambda u + q u + k^2 u = 0$$

となる。変換

$$V = r^{\frac{N-1}{2}} u$$

とすると, V は, 次の方程式を満たす:

$$(3) \quad \frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \Delta V + \left(q - \frac{(N-1)(N-3)}{4r^2} + k^2 \right) V = 0$$

すなわち, $\frac{R}{2} > \varepsilon > 0$ なる ε を任意に固定する。

$$q = q_0 + q_1 = q_0 + \frac{\varepsilon}{r} + q_1 - \frac{\varepsilon}{r}$$

と分解し,

$$\begin{cases} A_0 = \frac{1}{r^2} \Delta - \frac{(N-1)(N-3)}{4r^2} + q_0 + \frac{\varepsilon}{r} + k^2 \\ A_1 = q_1 - \frac{\varepsilon}{r} \end{cases}$$

とおく。(3) は,

$$(4) \quad \frac{d^2 V}{dr^2} + A_0 V + A_1 V = 0 \quad r \geq R_0$$

なる, Hilbert space $H^2 = L^2(S_{N-1})$ (S_{N-1} は $N-1$ 次元単位球面) 上の, 常微分方程式と考える。

A_0, A_1 は次の性質をもつ。十分大きな R_1 が存在し,
 $r > R_1$ に対し,

$$(5) \quad |q_1 - \frac{\varepsilon}{r}| \leq \frac{2\varepsilon}{r}, \text{ i.e. } (A_1 y, y) \leq \frac{2\varepsilon}{r} \|y\|^2$$

$$(6) \quad -(A_1 y, y) \geq \frac{\varepsilon}{r} \|y\|^2$$

$$\begin{aligned}
 (\Pi) \quad & (\dot{A}_0 y, y) + 2 \operatorname{Re} (A_1 y, z) \\
 & \geq - \frac{4^2}{Rr} \{ \|z\|^2 + (A_0 y, y) \}. \\
 & (\forall z \in L^2(S_{N-1}), \forall y \in D(A_0))
 \end{aligned}$$

ここで、 $\dot{A}_0$ は、 $r \rightarrow \infty$ の微分した作用素を表わす。

さて、一般的にヒルベルト空間 H の中、

$$(8) \quad \frac{d^2 u}{dr^2} + \mu(r) \frac{du}{dr} + A_0(r) u + A_1(r) u = 0 \quad r \geq R_0$$

なる常微分方程式を考えよう。ここで、

仮定 1

(i) $\mu(r) \in L^1_{loc}[R_0, \infty)$ (閉)

(ii) 各 r に対し、 $A_0(r)$ は、対称作用素で、その定義域は、一定 ($\equiv D_0$)

(iii) 各 $y \in D_0$ に対し、 $A_0(r)y$ は、 $r \geq R_0$ につき、連続的に (強) 微分可能； $\frac{d}{dr} A_0(r)y \equiv \dot{A}_0(r)y$

(iv) $D(A_1(r))$ は、 D_0 を含む。

仮定 2 次々如き、 $\gamma(r) \in L^1_{loc}[R_0, \infty)$ があつて、

$\|z\|^2 + (A_0 y, y) > 0$ 有る任意の $\{y, z\}$
 $\in D_0 \times H$ に対し, 評価

$$\begin{aligned} \mu(r) \|z\|^2 + (\dot{A}_0 y, y) + 2 \operatorname{Re}(A_1 y, z) \\ \geq -\gamma(r) [\|z\|^2 + (A_0 y, y)] \end{aligned}$$

が成立する。

仮定3 $\lambda(r) \in L^1_{loc}([R_0, \infty))$ があつて,
 $-(A_1 y, y) \geq \lambda(r) \|y\|^2 \quad (\forall y \in D_0)$
 が成立。

この時,

定理. 上の仮定 1-3 の下で, (8) の解 u は,
 次の評価をみたす。

(I) ある r_0 があつて,

$$\|u_r(r_0)\|^2 + (A_0(r_0) u(r_0), u(r_0)) > 0$$

$$(u_r = du/dr = u')$$

ならば, ある定数 $C > 0$ があつて,

$$\|u_r(r)\|^2 + (A_0(r) u(r), u(r)) \geq C e^{-\int_{r_0}^r \gamma(p) dp}$$

$$r \geq r_0.$$

(II) $\forall r \geq R_0$ に対し,

$$\|u_r\|^2 + (A_0 u, u) \leq 0$$

ならば, ある定数 $C_1 > 0$ C_2 があつて,

$$\|u(r)\|^2 \geq C_1 \exp \left(C_2 \int_{R_0}^r e^{\int_{R_0}^s \mu(\sigma) d\sigma} + \int_{R_0}^r \lambda(\rho) \underbrace{e^{\int_A^{\rho} \mu(\sigma) d\sigma}}_{(r-\rho)} d\rho \right)$$

これを、~~承~~^認します。この時、(1)の non-trivial な L^2 -解は、存在しないことが示される。 u を (1) の L^2 -解^非とする。この時、

$$\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx < \infty$$

と仮定してもいい。 $v = r^{\frac{N-1}{2}} u$ は、(4)の解であるから、これは、(8)の特別な場合である；

$$\mu(r) \equiv 0, \quad A_0 = \frac{\Lambda}{r^2} + q_0 - \frac{(N-1)(N-3)}{4r^2} + \frac{\varepsilon}{r} + k^2$$

$$A_1 = q_2 - \frac{\varepsilon}{r}, \quad \lambda(r) = \frac{\varepsilon}{2r}, \quad \gamma(r) = -\frac{4\varepsilon}{kr}$$

(7), (8), (9)から仮定1~3を上に定めた A_0, A_1 はみたしていい。故に、

(II) $\|v_r\|^2 + (A_0 v, v) \leq 0 \quad (\forall r \geq R_0)$ の場合.

$$\|v(r)\|^2 \geq C e^{-C(r-r_0) + \frac{\varepsilon}{2} r (\log r - 1)}$$

$$\therefore \|u(r)\|_{L^2(S_{N-1})}^2 \geq \text{（塗りつぶされた楕円）} C \cdot r^{-N+1} e^{\frac{\varepsilon}{4} r \log r} \quad (r \sim +\infty)$$

これは、 $u \in L^2(\mathcal{N})$ に反する。

(I) $\|v_r\|^2 + (A_0 v, v) > 0 \quad (\exists r > R_0) \text{ 場合:}$

$$\|v_r\|^2 + (A_0 v, v) \geq \frac{\text{const.}}{r^\delta}$$

$$(\delta \equiv 4\varepsilon/k)$$

を得る。 $v = r^{\frac{N-1}{2}} u$ と

$$(A_0 v, v) \leq \text{const.} \|v\|^2 \leq \text{const.} r^{N-1} \|u\|^2,$$

$$\|v_r\|^2 \leq r^{N-1} \|u_r - \frac{N-1}{2r} u\|^2 \leq \text{const.} r^{N-1} (\|u_r\|^2 + \|u\|^2)$$

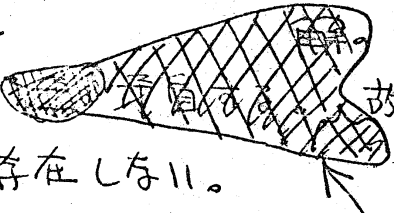
故に.

$$\|v_r\|^2 + \|u\|^2 \geq \frac{\text{const.}}{r^{N-1+\delta}}$$

を得る.

$$\therefore \int (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx \geq \text{const.} R^{1-\delta}$$

$$R_1 \leq |x| \leq R$$

とすると,  故に non-trivial な L^2 解は存在しない。

$$\begin{aligned} u &\equiv 0 \quad \text{in } |x| \geq R_1 \\ \text{解の一意性定理から} \\ u &\equiv 0 \quad \text{in } U. \end{aligned}$$