

非線形発展方程式のバクハツ-減衰型のげんみつ解

大阪外語大 物理科 中村 明
Nakamura Akira§1. Introduction

ソリトンの解をもつ、非線形偏微分方程式の研究は大きく広がり、近年の流行の1つとなった。かんたんにできる問題は、だいたいとかれたので、質的に新しい研究が、のぞまれる。(ソリトンの問題も、だいたいやりつくされたと思うこともできるし、それは、向に對してもどの時点でも必ずずいえることであるか、正しくはない!)

さて、この10数年の、目を見はるソリトン理論の発展とはいえ、それは 主には、ほとんど 空間1次元なのであって多次元(空間2,3次元)のシステムでは、まだわからないことが いっぱいある。ここでは 多次元システムについて研究する。

結論から先にいえば、多次元系では、かつうの意味の

ソリトン —— 《一定の波の形で、一定のスピードで進む局在した 進行波》 —— とは異なるモードが存在するといふことである。 かんたんのため 筆者は このモードを リップロンと呼ぶ (ノン-ソリトン部分=リップル部分の elementary mode という意味で リップロンとよぶ)。

§2. 歴史的な由来 — 多次元 KdV

一次元での もっとも代表的な 例は KdV eq. といえるように、多次元での もっとも代表的な例は 2次元 ($\equiv 2D$), 3次元 ($\equiv 3D$) KdV eq. と考えてよい。本質的に多次元の性質をのこしつつも、まず はじめの一歩として よりかんたんなケースを考えるために、Cylindrical 又は Spherical symmetry を仮定したときの 半径方向の波の伝わりについて考える。このときには、次の式がみちみちかれる、

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} + \epsilon \frac{u}{t} = 0, \quad (\epsilon = 0, \frac{1}{2}, 1). \quad (1)$$

ここで $\epsilon = 0$ はかつての KdV eq., ¹⁾ $\epsilon = \frac{1}{2}$ は Cylindrical

KdV eq. ($\equiv$ Cyl-KdV),²⁾ $\epsilon=1$ は Spherical KdV eq.³⁾ である。これより subscript x, y, z, t は 偏ビグンを表わすこととする。2, 3次元では, x は半径を表わす ($x \rightarrow \sqrt{x^2+y^2}, \sqrt{x^2+y^2+z^2}$)。

さてこれでは, これらの式を とく という 事について 考えてみると, Cyl-KdV eq. は たいたい よくわかって いる。Spherical KdV eq. は 数値計算 などの ことは 解析的に は まだ何もわかって いない。Cyl-KdV eq. は, 逆散乱法の Lax pair が Orszag により 発見され,⁴⁾ Calogero によって ぐわしく しらべられた。⁵⁾ Bäcklund 変換により 解を作り出すことは 中村によって された。⁶⁾

ここで少し物理的な面を考えてみよう。Cyl-KdV eq. は 要するに たとえば 静かな池に石を投げた時に 波の輪が広がってゆくが, この波を記述するものである。だから, この波は 波の高さ 11 から 中心で高く 外へひろがるにつれて だんだん ひくくなる。初めに 3次元物理で 考えられた時は, この逆のアプローチ, つまり 外側から 波を excite して ingoing の波をつくり それが 中心へ 収縮したとき 高い波 (high density plasma) をえき という 目的で 考えられた。このタイプの波が, 実は このタイトルに 与えた バクハフ-減衰型の解 (explode-decay mode or ripplon)

の第1の例なのである。

§3. これまでに かんたんな ripplon 解が わかりつつあ る例

さき上の例から 従来的一次元のソリトン(つまり一定の波形で一定のスピードで進むような波)とは ちがったタイプ(成長-減衰するタイプ)の波も 多次元では まわめて自然に 存在することかわかった。このような新しいタイプの解については、まだまだ 何もわかっていないのが現状である。まず手始めに、他にもこのような例があるかどうかを確かめたい。少なくとも以下の例については わかりつつある。(どれも完全にわかったわけではない)。

2D-KdV eq. (KP eq.)

2D cubic nonlinear Schrödinger ($\equiv$ NLS) eq.

Benney-Roskes 2D-NLS eq.

2D Toda Lattice eq.

この4例について以下で順番にみてゆきたい。

KP eq. は,

$$(u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x + 3\alpha^2 u_{yy} = 0, \quad (\alpha = \text{const.}) \quad (2)$$

である。これは変数変換によって Cyl-KdV eq. (1) とつながっており、このことがわかっていた。たゞ (2) 式は通常の soliton のほか explode-decay type の解をもつのである。^{2, 8, 9)} その形は次である。

$$u = (2 \log f)_{xx}, \quad f = 1 + \rho_i^2 [12(t+t_i)]^{-\frac{1}{3}} \int dz' A_i^2(z'),$$

$$z \equiv (x+x_i) [12(t+t_i)]^{-\frac{1}{3}} + \left(\frac{y+y_i}{\alpha}\right)^2 [12(t+t_i)]^{-\frac{2}{3}},$$

$$\rho_i, x_i, y_i, t_i = \text{const.}, \quad A_i''(z) - z A_i'(z) = 0. \quad (3)$$

A_i は Airy 函数と呼ばれる。さて Cyl-KdV eq. (1) は explode-decay type の解だけでなく通常の soliton 解をもたないが、KP eq. (2) は 両方のタイプの解をもつ。そして一般には N_1 -soliton, N_2 -ripple ... といったものの可なり重ねあわせの状態が厳密解として可能なのである。⁹⁾

Ripplon 解(3) は, せりより起こり, $u(x, y, t=-\infty)=0$,
局在をはじめ, ある時刻 $t=t_1$ で局在が極限となり, バウ
ハワシ(せり高くなられた極限), 又そのあと低くたぐしより
にせりへと近づく, $u(x, y, t+\infty)=0$, 解である.

次の例は

$$iu_t + \beta u_{xx} + \gamma u_{yy} + \delta u^* u u = 0, \quad (\beta, \gamma, \delta = \text{const.}) \quad (4)$$

である. この式は次の変換

$$u(x, y, t) = \frac{1}{t} e^{\frac{i\alpha^2}{4\beta t} + \frac{i\gamma^2}{4\gamma t}} w(X, Y, T),$$

$$X \equiv \frac{x}{t}, \quad Y \equiv \frac{y}{t}, \quad T \equiv -\frac{1}{t}, \quad (5)$$

によって不変であることが中村によりみつけられた.¹⁰⁾

つまり $u(x, y, t)$ が (4) の解なるは $w(X, Y, T)$ も (4) の
subscript x, y, t を X, Y, T とした式をみたす. これは
soliton を ripplon に変える変換であり, かつこの 1-soliton
から次の 1-ripplon solution

$$|u| = \frac{|u_0|}{t} \operatorname{sech} \frac{1}{t} (k_R x + v t), \quad u_0, k_R = \text{定数}, \\ v = \text{任意定数}, \quad (6)$$

かえりける。次の例は もう一つの 2D-NLS eq.,

$$i u_t + (-\beta) u_{xx} + \gamma u_{yy} + \delta u^* u u - 2 w u = 0,$$

$$\beta w_{xx} + \gamma w_{yy} - \beta \delta (u^* u)_{xx} = 0, \quad (7)$$

であり, この式は多重 soliton 解をもつことが知られている。この式もやはり 次の変換に対して不変である。¹¹⁾

$$u(x, y, t) = \frac{1}{t} e^{\frac{i x^2}{4(-\beta)t} + \frac{i y^2}{4\gamma t}} U(X, Y, T),$$

$$w(x, y, t) = \frac{1}{t^2} W(X, Y, T),$$

$$X \equiv \frac{x}{t}, \quad Y \equiv \frac{y}{t}, \quad T \equiv -\frac{1}{t}. \quad (8)$$

そして N_1 -soliton - N_2 -ripple ... のような重たなあわせが可能である。¹²⁾ 以上の具体例より 中村は次の予想を立て

た.¹³⁾

空間2次元では, ソリトンをもつ系は, かんたんな
リプレンをもつであろう.

最後の例 2D Toda Lattice eq. の ripplon は ごく最
近 (今月, 1982. 6月) に中村によって, みつけられた.
対称性からいって, 上記の中でも一番きれいな形をしている
解といえるが, この詳細は 原稿を今タスク中である.

§4. 1次元系の問題

さて上で 主に空間2次元であったが, 1次元でも
このような かんたんな ripplon 解があるだろうか?
特殊なケースでは 1つの具体例が知られている. それは

$$u_t + u_{xxx} - (3uHu_x)_x - (u^3)_x = 0,$$

$$Hu(x) \equiv \frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x')}{x' - x} dx', \quad (9)$$

という系であり, この式は soliton, multiple-periodic wave solution のほか 次のような かんたんな analytic function の closed form でかかれた ripplon をもつ.¹⁴⁾

$$u = (i \log f^*/f)_x,$$

$$f = A_i \left\{ \frac{x+x_i}{\sqrt[3]{12(t+t_i)}} - i p_i^2 [\operatorname{sgn}(t+t_i)] \sqrt[6]{12|t+t_i|} \right\}, \quad (10)$$

$$t_i, x_i, p_i = \text{real const.}$$

以上具体例を研究するところより, 問題を探求してきたが, このテーマは 大変面白いものである (マダマダわかっていないところがある). かぎられた例から 一般的性質を暗中模索しているところであろう. 2次元のケースでも, もっと多くの具体例が のぞまれるし, 3次元では 全くむづかしいところであろう. 1次元も, 色々の可能性があると信じる.

References

- 1) R.J. Zabrusky and M.D. Kruskal, Phys. Rev. Lett. 15 (1965) 240.
- 2) S. Maxon and J. Viecelli, Phys. Fluids, 17 (1974) 1614.
- 3) " , Phys. Rev. Lett. 32 (1974) 4.
- 4) V.S. Dzyuma, JETP Lett. 19 (1974) 387.
- 5) F. Calogero and A. Degasperis, Lett. Nuovo. Cimento 23(1978)/143.
- 6) A. Nakamura, J. Phys. Soc. Jpn. 49 (1980) 2380.
- 7) R. S. Johnson and S. Thompson, Phys. Lett. 66A(1978) 279.
- 8) N.C. Freeman, Adv. in Appl. Math. 20 (1980) 1.
- 9) A. Nakamura, J. Phys. Soc. Jpn. 51 (1982) 19.
- 10) " , " 50 (1981) 2469.
- 11) " , Phys. Lett. 88A (1982) 55.
- 12) " , J. Math. Phys. 23 (1982) No7. to appear.
- 13) " , " 23 (1982) 417.
- 14) " , J. Phys. Soc. Jpn. 51 (1982) No7. to appear.