

無限テンソル積作用素の極分解

東工大 理 中神祥臣

§1. 序論. 応用上必ずしも有界でない作用素の無限テンソル積が必要となる. ここでは内作用素 α_i の無限テンソル積を $\otimes' \mathcal{H}_i$ から $\otimes' \mathcal{H}_i$ への内作用素として定義し, 幾つかの応用を試みる. 以下次のような記号と規約を使う.

I : 添字集合 (無限) ; $i, k \in I$

$J \subset I \iff J$ は I の有限部分集合

$\mathcal{H}_i$: $\{0\}$ でないヒルベルト空間 ; $\xi_i, \eta_i \in I$

α_i : 稠密な定義域 $D(\alpha_i)$ を持つ $\mathcal{H}_i$ 上の内作用素

M_i : $\mathcal{H}_i$ 上の作用素環

S : $\sum \|\xi_i\| - 1 < \infty$ なる $(\xi_i) \in \prod \mathcal{H}_i$ 全体

S_0 : $0 < \prod \|\xi_i\| < \infty$ なる $(\xi_i) \in \prod \mathcal{H}_i$ 全体

$(\xi_i) \sim (\eta_i) \iff \sum |(\xi_i | \eta_i) - 1| < \infty$

$(\xi_i) \approx (\eta_i) \iff \sum ||(\xi_i | \eta_i)| - 1| < \infty$

$(\xi_i) \approx (\eta_i) \iff$ 或るユニタリー作用素 $u_i \in M_i'$ が存在して

$(\xi_i) \sim (u_i \eta_i)$

$(\xi_i) \sim_p (\eta_i) \Leftrightarrow$ ある半等距離作用素 $v_i \in M_i'$ が存在して

$$(\xi_i) \sim (v_i \eta_i)$$

$(\xi_i) \sim_c (\eta_i) \Leftrightarrow$ ある Σ -タリ-作用素 $c_i \in M_i \cap M_i'$ が存

$$在して (\xi_i) \sim (c_i \eta_i)$$

$$C \equiv S/\sim, \quad C_0 \equiv S_0/\sim; \quad c \in C, \quad c \in C_0.$$

$C(\xi_i) \in C$: (ξ_i) を代表元としてもつもの

$C(\xi_i) \sim C(\eta_i) \Leftrightarrow (\xi_i) \sim (\eta_i)$, ここで $\sim$ は $\sim, \sim, \sim,$

$\sim, \sim$ または $\sim$

$\otimes \mathcal{H}_i$: 完全無限テンソル積

$\mathcal{H}_c \equiv \otimes^c \mathcal{H}_i \equiv \otimes(\mathcal{H}_i, \xi_i)$: 不完全無限テンソル積

$\pi_i : x \in M_i \mapsto x \otimes 1 : \mathcal{H}_i \otimes (\otimes_{i \neq i} \mathcal{H}_i)$ 上の表現

$$\otimes M_i \equiv (\bigcup \pi_i(M_i))''$$

$\otimes^c M_i \equiv \otimes(M_i, \xi_i)$: $\otimes M_i$ の $\mathcal{H}_c$ への制限

$p_c : \otimes \mathcal{H}_i$ から $\mathcal{H}_c$ への射影 ; $p_c \in (\otimes M_i)'$

$p(c) : p_c$ の $(\otimes M_i)'$ の中心での台

§ 2. 閉作用素の無限テンソル積 $\mathcal{H}_i$ は稠密な定義域

$D(\mathcal{H}_i)$ を持つ $\mathcal{H}_i$ 上の閉作用素とする.

定義. (ξ_{0i}, η_{0i}) が $(\mathcal{H}_i)$ の non-zero reference pair とは

i) $(\xi_{0i}) \in S_0, (\eta_{0i}) \in S_0$

ii) $\xi_{0i} \in D(\mathcal{H}_i), (\mathcal{H}_i \xi_{0i}) \in S$

$$\text{iii)} \quad (x_c, z_{0c}) \sim (\gamma_{0c})$$

$$\text{iv)} \quad \gamma_{0c} \in D(x_c^*), \quad (x_c^*, \gamma_{0c}) \in S$$

が成り立つことである。

いま定義の条件 i), ii), iii) を仮定してみる。 $z_c \in D(x_c)$, $c \in I$ かつ有限個の c を除いて $z_c = z_{0c}$ をみたす $\otimes z_c$ の全体に対し

写像 $\otimes z_c \mapsto \otimes x_c z_c$ は $\mathcal{H}_c$, $c \equiv c(z_{0c})$ で稠密な

定義域をもち, $\mathcal{H}_{c'}$, $c' \equiv c(\gamma_{0c})$ に値を取る線型写像 $\odot(x_c, z_c)$ へ代数的に拡張される。条件 (iv) はこの $\odot(x_c, z_{0c})$ が閉拡大をもつための一つの完全条件になっている。条件 (i), (ii), (iii) をみたすが (iv) をみたさないような $(z_{0c}), (\gamma_{0c})$ の対も作ることができる。閉拡大がある場合, それを $\otimes^{c|c} x_c$ と表わす。特に $c' = c$ の場合には $\otimes^c x_c$ と表わす。

定理 1. x_c を正値, 自己共役とする。 (z_{0c}, γ_{0c}) が (x_c) の non-zero reference pair ならば, $(z_{0c}) \sim (\gamma_{0c})$ かつ $\otimes^c x_c$ は $\mathcal{H}_c$ 上で自己共役である。

定理 2. x_c の極分解を $u_c | x_c$ とすれば, $\otimes^{c|c} x_c = (\otimes^{c|c} u_c) (\otimes^c | x_c|)$ となり極分解になっている。

$$\text{定理 3.} \quad (\otimes^{c|c} x_c)^* = \otimes^{c|c'} x_c^*$$

$$\text{定理 4.} \quad x_c \eta M_c \text{ ならば } \otimes^c x_c \eta \otimes^c M_c$$

§ 3. Reference Pair の存在条件。

定理5. λ_i を可逆, 正值, 自己共役とし, $y_i \equiv \log \lambda_i$ とする. e_i を閉区間 $[\lambda_i^{-1}, \lambda_i]$ ($\lambda_i > 1$) に対応する λ_i のスペクトル射影とする. 次の6条件は $c \in C$ に対し同値である:

- i) (λ_i) の non-zero reference pair $(\xi_{0i}, \xi_{0i}), c = c(\xi_{0i})$ がある;
- ii) 全 2 の λ は或る $(\xi_i) \in c$ に対し, $(e_i \xi_i) \in S, (\lambda_i e_i \xi_i) \in S, (e_i \xi_i) \sim (\lambda_i e_i \xi_i)$;
- iii) 全 2 の $(\xi_i) \in c$ に対し, $(e_i \xi_i) \in S, \sum \|y_i e_i \xi_i\|^2 < \infty, \sum |(y_i e_i \xi_i | \xi_i)| < \infty$;
- iv) 或る $(\xi_i) \in c$ に対し, $\xi_i \in D(y_i), \sum \|y_i \xi_i\|^2 < \infty, \sum |(y_i \xi_i | \xi_i)| < \infty$;
- v) $\otimes^c \lambda_i^{it}$ は 1 経数ユニタリー群, $t \in \mathbb{R}$;
- vi) 全 2 の λ は或る $(\xi_i) \in c$ と全 2 の $t \in \mathbb{R}$ に対し $(\xi_i) \sim (\lambda_i^{it} \xi_i)$.

ここで注意したいことは, これらの条件はどれも, 独立な確率変数の無限和が確率収束するための条件の古い換えになっている. とりわけ条件(iii)は Kolmogorov の 3 級数定理であり, 条件(iv)は確率変数の特性関数の無限積が再び特性関数になるということである. さらに条件(i)の下で, (y_i) は Reed が定義した意味での strong convergence vector $\otimes \xi_{0i}$, $c = c(\xi_{0i})$ を持っている.

注意6. $\lambda_c > 0$ ($\lambda_c \in \mathbb{R}$) とする. 定理5で条件(i), (ii), (v) の x_c の代りに $\lambda_c x_c$, 条件(iii), (iv) では y_c の代りに $y_c + \log \lambda_c$, 条件(vii) では $\sim$ の代りに $\sim$ を使うこともよい. このとき $\log \lambda_c$ は y_c に対する繰り込み定数と解釈できる. λ_c を M_c' 又はその中心の可逆, 正值, 自己共役な元としても条件(i) ~ (v) の間の同値性は成り立つ. そのとき (vi) の $\sim$ を $\sim$, $\sim$ に代えると条件(i) ~ (v) は条件(vi) に対する十分条件になっている. $\sim$ については§7の定理14で触れる.

$$\text{定理7. } \otimes^c x_c^* x_c = (\otimes^{c^*} x_c)^* (\otimes^{c^*} x_c)$$

定理8. $(\otimes^c x_c)^{zt} = \otimes^c x_c^{zt}$ 特に $(\otimes^c x_c)^z = \otimes^c x_c^z$ が全ての $z \in \mathbb{C}$ で成り立つ.

この定理の下で次のことに注意しよう. $y_c \equiv \log x_c$ かつ $\pi_c^c(y_c) \equiv \pi_c(y_c) \upharpoonright \mathcal{H}_c$ とすれば

$$\log \otimes^c x_c = \sum \pi_c^c(y_c)$$

となる. たゞし右辺は定理8の式の右辺を $t=0$ で微分して得られる, Stieltjesが定義した非有界作用素の和である.

§4. モジュラー作用素の無限テンソル積

左ヒルベルト環 $\mathcal{O}_c$ の完備化を $\mathcal{H}_c$ とする. $\mathcal{O}_c$ は規格化された元 ξ_{0c} をもち $\xi_{0c} = \xi_{0c}^2 = \xi_{0c}^\#$ をみたしているものとする

る. $\xi_l \in \mathcal{O}_l$, $l \in I$ かつ有限個の l を除いて $\xi_l = \xi_{0l}$ なる
 $\otimes \xi_l$ 全体の線形拡大を $\odot(\mathcal{O}_l, \xi_{0l})$ と表わす. これには自然に
 $\#$ -演算と積が定義できて左ヒルベルト環になる. $\mathcal{O}_l$ 上の
 $\#$ -演算 S_l と $C \equiv C(\xi_{0l})$ に対し $\otimes^C \Delta_l = (\otimes^C S_l^*)(\otimes^C \overline{S}_l)$ が
 $\mathcal{H}_l$ 上で成り立っている. このことから直ちに

系 9. $\omega_l \equiv \omega_{\xi_{0l}}$, $C \equiv C(\xi_{0l})$ かつ $\otimes^C M_l$ 上で $\omega \equiv \otimes \omega_l$
 とすれば, $\otimes^C M_l$ 上の自己同型写像 $\otimes^C \sigma_t^\omega$ が定義でき, σ_t^ω
 $= \otimes^C \sigma_t^{\omega_l}$ となる.

§ 5. σ -有限測度の無限積

当節では I は可算とする. $(\Omega_l, \mathcal{F}_l, \nu_l)$, $l \in I$ を確率空間と
 する. $(\Omega, \mathcal{F}) \equiv \prod (\Omega_l, \mathcal{F}_l)$, $\nu \equiv \prod \nu_l$, $\mathcal{H}_l \equiv L^2(\Omega_l, \mathcal{F}_l, \nu_l)$ かつ
 $\mathcal{Z}_l \equiv L^p(\Omega_l, \mathcal{F}_l, \nu_l)$ とする. $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ は確率空間になる.
 $\mathcal{H}_l \cap \mathcal{Z}_l$ の元 ξ を $\mathcal{Z}_l$ の元と見るときには $\pi_l(\xi)$ と表わす. η
 $\in \mathcal{H}_l$ に対し $\omega_\eta \in \omega_\eta(x) \equiv (x\eta|\eta)$, $x \in \mathcal{Z}_l$ で定義する.

μ_l を $(\Omega_l, \mathcal{F}_l)$ 上で ν_l に関して絶対連続な σ -有限測度と
 し, $h_l \equiv d\mu_l/d\nu_l$ とする. $\xi_l \in D(h_l^{1/2})$ かつ $h_l^{1/2}\xi_l \neq 0$ に対しそ
 れぞれを規格化したものを ξ_{0l} , η_{0l} とすれば, $\omega_{\eta_{0l}}$ は Ω_l 上
 で ν_l に関して絶対連続である. そこですべて $\alpha, j \subset I$ に
 対し Ω 上の σ -有限測度 μ_j を

$$\mu_j \equiv \left(\otimes_{\alpha \in j} \|h_\alpha^{1/2} \xi_\alpha\|^2 \mu_\alpha \right) \otimes \left(\otimes_{l \in I \setminus j} \omega_{\eta_{0l}} \right)$$

で定義する. 勿論 μ_j は $\otimes^j M_L$, $C \sim C(\gamma_{0L})$ 上の半有限型で正規なトレースである.

命題 10. $0 < \prod \|\pi(\xi_L)\| < \infty$ かつ $\mu_L \ll \nu_L$ とする. もし $(\gamma_{0L}, \gamma_{0L})$ が $(\pi(\xi_L))$ の non-zero reference pair ならば

$$\mu \equiv \sup_{J \subset \mathbb{N}} \mu_J$$

は Ω 上の σ -有限測度である. 特に $(\gamma_L) \not\sim (\gamma_{0L})$ ならば μ と $\otimes \omega_{\gamma_L}$ は互に特異である.

上で定義された μ は $(\xi_L) \in S_0$ により定義されるので, $\mu^{(\xi_L)}$ と表わすことにする.

定理 11. ν_L, ν, μ_L, h_L を上のようにし, $\mu_L \sim \nu_L$ (又は $\mu_L \ll \nu_L$) とする. $\xi_L \in D(h_L^{1/2})$, $0 < \prod \|\pi(\xi_L)\| < \infty$ に対し ξ_{0L}, γ_{0L} を上のようにし, $h_{0L} \equiv \|\xi_L\|^2 \|h_L^{1/2} \xi_L\|^{-2} h_L$ とする. $(\gamma_{0L}, \gamma_{0L})$ が $(\pi(\xi_L))$ の non-zero reference pair ならば, 次の 3 条件は同値である:

- i) $\mu^{(\xi_L)} \sim \nu$ (又は $\mu^{(\xi_L)} \ll \nu$);
- ii) $(\xi_L) \in S$ かつ (ξ_L, ξ_L) は $(h_{0L}^{1/2})$ の non-zero reference pair;
- iii) $(\xi_L) \in S$ かつ $(\xi_L) \sim (h_{0L}^{1/2} \xi_L)$.

ここで注意すべきことは条件 (iii) は Hill の条件である.

§ 6 半有限型重みの無限テンソル積

$\xi_i \in \mathcal{H}_i$ を M_i に対し分離かつ巡回的な単位ベクトル, M_i 上で $\phi_i \equiv \omega_{\xi_i}$, $h_i \in M_i$ を可逆, 正値な自己共役作用素, ψ_i を $(M_i)_+$ 上の半有限型, 忠実, 正規な重みで $\psi_i = h_i^{1/2} \phi_i h_i^{1/2}$, $\mathcal{M}_i \equiv \{x \in M_i : \psi_i(x^*x) < \infty\}$ とする. $e_i(n)$ を閉区間 $[0, n]$, $n \in \mathbb{N}$ に対応する h_i のスパートル射影とする. $J_{\xi_i}, \Delta_{\xi_i}$ をそれぞれ ϕ_i から導かれるモジュラー共役作用素, モジュラー作用素とする. $x \in M_i$ に対し $j_{\xi_i}(x) \equiv J_{\xi_i} x J_{\xi_i}$ とおく. $x \in \mathcal{M}_i$ に対し $x h_i^{1/2} e_i(n) \xi_i = j_{\xi_i}(h_i^{1/2} e_i(n)) x \xi_i$ となる. $\{e_i(n+1) - e_i(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ は直交し, しかも $\sup_n \|j_{\xi_i}(h_i^{1/2} e_i(n)) x \xi_i\|^2 \leq \psi_i(x^*x) < \infty$ であるから, $\{x h_i^{1/2} e_i(n) \xi_i\}_{n=0}^\infty$ は収束列である. この極限 $j_{\xi_i}(h_i^{1/2}) x \xi_i$ を形式的に $x h_i^{1/2} \xi_i$ と書く. $x_{0i} \in \mathcal{M}_i$, $x_{0i} \neq 0$ に対し

$$\xi_{0i} \equiv \|x_{0i} \xi_i\|^{-1} x_{0i} \xi_i \quad \text{かつ} \quad \eta_{0i} \equiv \|x_{0i} h_i^{1/2} \xi_i\|^{-1} x_{0i} h_i^{1/2} \xi_i$$

とおく. $(\otimes^{c'} M_i)_+$, $c' \sim c(\eta_{0i})$ 上の半有限型, 正規な重みを

$$\psi_J \equiv (\otimes_J \|x_{0i} h_i^{1/2} \xi_i\|^{-2} \psi_i) \otimes (\otimes_{i \in J} \omega_{\eta_{0i}})$$

とする.

命題 12. $0 < \prod \|x_{0i}\| < \infty$ とする. もし (η_{0i}, γ_{0i}) が (x_{0i}) の non-zero reference pair でしかも $\|\Delta_{\eta_{0i}}^{-1/2} \pi_{\eta_{0i}}(x_{0i}) \Delta_{\eta_{0i}}^{1/2}\| \leq \|x_{0i}\|$ ならば

$$\psi \equiv \lim_{J \ll I} \psi_J$$

は $(\otimes^{c'} M_i)_+$, $c' \sim c(\gamma_{0i})$ 上の半有限型, 忠実, 正規な重みである.

ここで得られた ψ は (x_{0i}) により定義されたので, $\psi(x_{0i})$ と表わすことにする. これは ψ_i の無限テンソル積の一種と解釈できる.

定理 13. $\xi_i, \phi_i, \psi_i, h_i, x_{0i}$ を上のようにする. $C \equiv C(\xi_i)$, $C \sim C(\gamma_{0i})$ とする. $\otimes^C M_i$ 上で $\phi \equiv \otimes \phi_i$, $\otimes^C M_i$ 上で $\psi \equiv \psi(x_{0i})$ とする.

(1) $\lambda_i \equiv \|x_{0i}\xi_i\| \|x_{0i}h_i^{1/2}\xi_i\|^{-1}$, $h_{0i} \equiv \lambda_i^2 h_i$ とする. ψ が $\otimes^C M_i$ 上の半有限型, 忠実, 正規な重みであるための十分条件は次の条件のいずれか 1 つである:

- (i) $(x_{0i}\xi_i) \in S_0$ かつ $(\xi_{0i}) \sim_p (\gamma_{0i})$;
- (ii) 或る $(\xi_{1i}) \in C$ に対し, (ξ_{1i}, ξ_{1i}) は $(h_{0i}^{1/2})$ の non-zero reference pair である;
- (iii) $(e_i \xi_i) \in S$, $(h_{0i}^{1/2} e_i \xi_i) \in S$, $(e_i \xi_i) \sim (h_{0i}^{1/2} e_i \xi_i)$ なる h_{0i} のスペクトル射影 e_i がある.

(2) x_{0i} が h_i と可換とする. (1) のすべての条件は ψ が $\otimes^C M_i$ 上の半有限型, 忠実, 正規な重みであるための必要条件である.

§ 7. 半有限型 $\otimes^C M_i$

定理 14. $\xi_i \in \mathcal{H}_i$ を M_i に対し分離かつ巡回的な単位ベクトル, $C = C(\xi_i)$ とする. 次の 4 条件は同値である:

- (i) $\otimes^c M_L$ は半有限型;
- (ii) M_L 上の任意な半有限型, 忠実, 正規なトレース τ_L に対し $(\xi_L) \sim ((d\tau_L/d\omega_{\xi_L})^{it} \xi_L)$ ($\otimes^c \mathcal{H}_L$ が可分なとき);
- (iii) $\otimes^c e_L$ が $\otimes^c M_L$ で 0 でなく有限型であるような M_L の射影 e_L がある;
- (iv) 或る半有限型, 忠実, 正規なトレース τ_L が存在して $(\xi_L) \sim ((d\tau_L/d\omega_{\xi_L})^{it} \xi_L)$.

系 15. $\otimes^c \mathcal{H}_L$ は可分とする. 半有限型の $\otimes^c M_L$ は有限型の $\otimes^c (M_L)_{e_L}$ と I_∞ 型因子 $B(K)$ のテンソル積である:

$$\otimes^c M_L \sim (\otimes^c (M_L)_{e_L}) \otimes B(K).$$

§ 8. CCR のテンソル積表現 $\mathbb{C}^I$ は複素ベクトル空間になる. $\mathcal{H}_L$ 上の可逆, 正規, 自己共役な λ_L に対し, 2つの試料関数空間 $V(\lambda_L, c)$ と $V_\omega(\lambda_L, c)$ を考える. 前者は (λ_L^t) が c に non-zero reference pair を持つような $f \equiv (f_t) \in \mathbb{C}^I$ 全体であり, 後者は或る $(\lambda_t) \in (\mathbb{R}_+^*)^I$ が存在して $(\lambda_t \lambda_L^t)$ が上と同様な条件を満たす f 全体である. $V(\lambda_L, c)$ は Streit の意味での試料関数空間である. 有限個の i を除いたところから 0 である $(f_t) \in \mathbb{C}^I$ 全体を c_0 とする. $U_L(s) \equiv e^{is\phi_L}$, $V_L(t) \equiv e^{it\pi_L}$ ($s, t \in \mathbb{R}$) を $\mathcal{H}_L$ 上で $U_L(s)V_L(t) = e^{-ist} V_L(t)U_L(s)$ を満たす既約ユニタリ表現とし, s, t を $\mathbb{C}$ まで許可こと

に於て. C_0 の元 $f \equiv (f_c)$, $g \equiv (g_c)$ に対し

$$U(f) \equiv \bigotimes^c U_c(f_c) \quad V(g) \equiv \bigotimes^c V_c(g_c)$$

とすれば交換関係 $U(f)V(g) = e^{-i\langle f, g \rangle} V(g)U(f)$ が成り立つ.

この U, V の admissible 試料関数空間を $V_\phi(C)$, $V_\pi(C)$ とす

る. $V_\phi(C)$ の元 $\hat{f}$ の代表元 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ に対し, つまり, すべて

の $\lambda \in \mathbb{R}$ で $s\text{-}\lim U(\lambda f_n)$ が存在し然も $\lambda \in \mathbb{R}$ に関し強連続

な $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset C_0$ に対しては交換関係により $f \equiv \sigma(C_0^*, C_0)\text{-}\lim f_n$

が存在するので, $V_\phi(C)$ の元から C_0^* への写像 σ が得られる.

同様のことが $V_\pi(C)$ の元に対しても成る.

定理 16. $f \in \sigma(V_\phi(C))$ (又は $\sigma(V_\pi(C))$) であるための一つの完全条件は $f \in V_w(e^{\phi}, C)$ (又は $V_w(e^{\pi}, C)$).

引用文献

1. Elliott, G., Finite projections in Tensor product von Neumann algebras. Preprint.
2. Nakagami, Y., Infinite tensor products of operators. Publ. RIMS, Kyoto Univ. 10 (1974), 111-145.
3. Reents, G., On infinite direct products of continuous unitary one-parameter groups. Preprint.