

青本, Gel'fand の hypergeometric function の
determinant について.

千葉大・教. 寺松友秀
マシムス大.

1 Introduction.

織田氏と著者の論文の中で、構成した、
Braid 群の表現、及び、 ζ の determinant に関する
研究は、自然に、一般組紐群 (= generalized braid
group) の表現の構成、 ζ の determinant に関する
研究へと一般化された。determinant というものも、
与えられた表現の Abel 的部分のみを扱った、
もちろん、表現に関して、知るには、不十分であるが、
いわゆる "一般 Magnus 表現" の determinant 及び
 ζ の Hodge analogue とも言及、青本-Gel'fand の
hypergeometric function の determinant は、Jacobi 和や、
 Γ -関数、Discriminant 等の重要な興味深い
invariant を含む。

著者が話した determinant に関する結果は、 q について、
独立に Varchenko 氏により発見された (1989 年)
事実として、知られた。Braid 群の Monodromy
表現として、 ζ を見る時、これは、Galois 表現とも関連
づけられた Varchenko 氏の手法は、Configuration に
対して、pencil によって行われ、これは、 ζ の場合、
この考え方は、F. Loeser 氏により、De sheaf の場合
に、analogy が与えられた。彼は、これにより、有限体上の
あるべき関数に関する等式を、Fourier 変換を
用いて示した。Loeser 氏の証明は、やはり、Configuration

の Pencil を使う. 美しい手法で示すこと
 して. 1/2 (証明は変化する). Hypergeometric function
 には q -analogue が存在する. Γ 関数, Beta 関数
 が. 自然に q -analogue に拡張されるように.
 Hypergeometric function も q -analogue に拡張される
 ことは q を $q \rightarrow 1$ の極限で Γ 関数に一致することから
 最近示された. (準備中) 最近の青本にも.
 Selberg integral の analogue の論文には b -関数の
 q -analogue が現れる. これは a も q の新しい
 configuration space, q -analogue 等の, 新古典的
 対象が存在する. 予想されるように思われる.

2. 青本 - Gel'fand の hypergeometric function の determinant

初めに, Configuration に関する Notation を定める.
 $m, n \in \mathbb{Z}$. $m > n+1$ となる整数とする. $A = (a_{ij}) \in$

$M(m \times (n+1))$ であるとする. A が条件

$$(*) \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} A \\ 0 \cdots 0, 1 \end{pmatrix} \text{ の } (n+1)\text{-小行列式}$$

が 0 となる

を満たすものとする. $\mathbb{C}^n \subset \mathbb{P}^n$ の open set $= \{(x_0, \dots, x_n) \mid x_0 \neq 0\}$
 と見ると, $\mathbb{C}^n$ 内の hyperplane $H_i^0 = \{ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + a_{i, n+1} x_0 = 0 \}$
 $(i=1, \dots, m)$ の closure H_i は, $\mathbb{P}^n$ 内の

projective hyperplane を定める. $H_\infty = \mathbb{P}^n - \mathbb{C}^n$ とする.

この時, 条件 (*) は, $H_1 \cup \dots \cup H_m \cup H_\infty$ が $\mathbb{P}^n$ 内で,

normal crossing になっていることを意味する.

$$X \subset \mathbb{P}^n, \quad X = \mathbb{C}^n - \bigcup_{i=1}^m H_i^0 \text{ 上の covering である.}$$

$$\exp(w_i) = L_i(x) \quad (i=1, \dots, m)$$

で定義されることもできる.

Definition (Schur function)

$\alpha \in \text{index set}$ $\alpha = (i_1, \dots, i_n) \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m-1$
 $\in \mathbb{Z}_0$ $\alpha \in \mathbb{Z}$, $J = \alpha \in \mathbb{Z}$. $x_1, \dots, x_n$ a 関数
 $x_J \in (J = (j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{Z}_0)$

$$x_J = \det \begin{pmatrix} x_1^{j_1-1}, \dots, x_1^{j_n-1} \\ \vdots \\ x_n^{j_1-1}, \dots, x_n^{j_n-1} \end{pmatrix} \times \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

で定義される. $x_1, \dots, x_n$ は関数の対称式である.
 基本対称式 e_i 多項式として, $unique$ に書き表わす.
 $x_i \in x_1, \dots, x_n$ i 次基本対称式として, $x_J \in$
 $S_J(x_1, \dots, x_n)$ と表わす時, S_J は Schur polynomial
 と言う. $\mathbb{Z}$. 今から, X 上 a differential form DW ,
 chain を定義する. $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{C}^m$ $\in$,
 $\text{Re}(\alpha_i) > 0$ $\in i$ 高 $\in \mathbb{Z}$ $\in \mathbb{Z}$ $\in \mathbb{Z}$.

Definition of differential form ω_J on $\tilde{X}$

$\tilde{X} \in \exp(\omega_i) = L_i(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}_0$. $J \in \alpha \in \mathbb{Z}$
 $\in \mathbb{Z}$ 時, $\tilde{X}$ 上 a differential form $\omega_J \in$.

$$\omega_J = \prod_{j=1}^m \exp\{(\alpha_j - 1)\omega_j\} S_J(x_1, \dots, x_n) \underbrace{dx_n \wedge \dots \wedge dx_1}_{\text{order}}$$

と置く.

Definition of Chain $\tilde{D}_I$

$I \in \mathcal{O} a \in \mathbb{C}$ とする。 $M(m \times (n+1), \mathbb{C})$ 内 $a(x)$ を満たす $\bar{a}$ からなる集合 Σ , $M^0(m \times (n+1), \mathbb{C})$, $M^0(m \times (n+1), \mathbb{C}) \cap M(m \times (n+1), \mathbb{R}) = M^0(m \times (n+1), \mathbb{R})$ とおく。

$M_S^0 = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \mid \lambda_i \neq \lambda_j, \lambda_i \in \mathbb{R}\} \cap \bar{a}$.

$(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in M^0(m \times (n+1), \mathbb{R}) \cap \bar{a}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & \lambda_1^n \\ & & \\ & & \\ 1 & \dots & \lambda_m^n \end{pmatrix} \in \Sigma \text{ と定める}$$

これは Σ 上 定まる 写像 $M_S^0 \rightarrow M^0(m \times (n+1), \mathbb{R})$ の

chamber $\{(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \mid \lambda_1 < \dots < \lambda_m\}$ の像を含む

$M^0(m \times (n+1), \mathbb{R})$ の connected component $M_0 \in \mathbb{R}^n$.

$A \in M_0$ とする。 $I \in \mathcal{O} a \in \mathbb{C}$ とする。 $\mathbb{R}^n$ 内の領域

$$D_I = \{(x_1, \dots, x_n) \mid (-1)^{p-1} L_{ip}(x_1, \dots, x_n) > 0,$$

$$(-1)^p L_{ip+1}(x_1, \dots, x_n) > 0$$

$$\text{for all } p=1, \dots, n\}$$

1) relatively compact である。 $I \in \mathcal{O} a \in \mathbb{C}$ とする。 Covering

$$\tilde{X} \rightarrow X = \mathbb{C}^n - \bigcup_{i=1}^m H_i \quad \text{where } H_i \text{ is a hyperplane. } D_I \text{ is a lifting}$$

$\tilde{D}_I$ 1) .

$$(1) \quad (x_1, \dots, x_n) \in D_I$$

$$(2) \quad \omega_j \in \mathbb{R} - \mu \pi i, \quad \mu = \#\{k \mid j_k < j\}$$

条件 1) unique に定まる。

$I \in \mathcal{O} a \in \mathbb{C}$ とする。 $\tilde{X}$ 上 differential form ω_j を $\tilde{D}_I$ 上の

$\mathcal{O} a \in \mathbb{C}$ 上 I, J に対して定義 ω_j を $\tilde{D}_I$ 上の ω_j の行列式

$$\det \left(\int_{\tilde{D}_I} \omega_j \right) \text{ を考える。}$$

Main Theorem を述べる前に、いくつかの小行列式の定義をしよう。Index set C, C_∞ を与えよ。

$$C = \{ (i_1, \dots, i_{n+1}) \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_{n+1} \leq m \}$$

$$C_\infty = \{ (i_1, \dots, i_n) \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m \}$$

とす。 C の $\bar{I}$ 及び C_∞ の $\bar{I}'$ に対して、 $D_I, D_{I'}$ を与えよ。

$$D_I = \det \begin{pmatrix} a_{i_1,1} & \dots & a_{i_1,n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_{n+1},1} & \dots & a_{i_{n+1},n+1} \end{pmatrix}$$

$$D_{I'} = \det \begin{pmatrix} a_{i_1,1} & \dots & a_{i_1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_n,1} & \dots & a_{i_n,n} \end{pmatrix}$$

と定義する。また、 $I \in C, I' \in C_\infty$ とし、 $\alpha_\infty, \alpha_I, \alpha_{I'}$ を与えよ、 $\alpha_\infty = -\sum_{i=1}^m \alpha_i, \alpha_I = \sum_{i \in I} \alpha_i, \alpha_{I'} = \sum_{i \in I'} \alpha_i + \alpha_\infty$ と定義する。

Theorem 周期行列 $(\int_{\tilde{D}_I} \omega_J)$ の行列式は、

$$\det \left(\int_{\tilde{D}_I} \omega_J \right) = \frac{\prod_{I \in C} D_I^{\alpha_I} \cdot \prod_{I' \in C_\infty} D_{I'}^{\alpha_{I'}}}{\prod_{I \in C} D_I} \times \prod_{i=1}^m \exp(N(1-i)\alpha_i \pi \sqrt{-1}) \times \left(\frac{\Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)} \right)^N$$

と与えられる。ここで $N = m-2 \cdot C_{n-1}$ 。

12. 定理 a. Braid 群の表現論的な意味であるが、与えられたように解釈できる。

$M_{\mathbb{C}} = M^0(m \times (n+1), \mathbb{C})$ 上に. 各 $A \in M_{\mathbb{C}}$ に対応して, $\tilde{X}$ は対応する $\mathbb{C}^n$ 上の family $\tilde{X}$ が存在する. 具体的に,

$$\tilde{X} = \{ (w_i, x_j, A) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n \times M_{\mathbb{C}} \mid \exp(w_i) = \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j + a_{i, n+1}, i=1, \dots, m \}$$

$\mathbb{C}^n$ 上の family $\tilde{X}$ である. Structure morphism $\varepsilon: \tilde{X} \rightarrow M_{\mathbb{C}}$

とある. $\mathbb{C}^n$ 上の family $\tilde{X}$ である. $\pi_1(M_{\mathbb{C}})$ -module とある.

また, $\tilde{X}$ 上の $\sigma_j: w_i \mapsto w_i + \delta_{ij}$ ($j=1, \dots, m$) による $M_{\mathbb{C}}$

上の $G = \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z} \sigma_i$ action が存在する. $M_{\mathbb{C}}$ 上の

$\eta = [A] \in \text{fix } \sigma_i$ である. $H^n(\tilde{X}, \eta, \mathbb{Z})$ である.

$G \times \pi_1(M_{\mathbb{C}}, \eta)$ module の構造を持つ. $\mathbb{Z}$ 上の G 群環

$\mathbb{Z}[G] = \mathbb{Z}[\sigma_1^{\pm 1}, \dots, \sigma_m^{\pm 1}] \in A$, $\mathbb{Z}$ の商体 $K \in \mathbb{Q}$.

Proposition $H^n(\tilde{X}, \eta, \mathbb{Z}) \otimes_A K$ である. K 上の

$$b = (-1)^n \chi(\mathbb{C}^n - \bigcup_{i=1}^m H_i)$$

である Proposition から. $\pi_1(M_{\mathbb{C}}, \eta)$ である. K 上の n -次元 vector space

$H^n(\tilde{X}, \eta, \mathbb{Z}) \otimes_A K$ である. K 上の n -次元 vector space

$$\pi_1(M_{\mathbb{C}}, \eta) \longrightarrow \text{Aut}_K(K) = K^\times$$

である. $\pi_1(M_{\mathbb{C}}, \eta)^{\text{ab}}$ である. $\pi_1(M_{\mathbb{C}}, \eta)^{\text{ab}}$ である.

$\pi_1(M_{\mathbb{C}}, \eta)^{\text{ab}}$ の構造を, 記述する. $\pi_1(M_{\mathbb{C}}, \eta)^{\text{ab}}$ である.

$$\chi_I: \pi_1(M_{\mathbb{C}}, \eta) \longrightarrow \mathbb{Z} (\text{resp } \chi_{I'}) \in D_I, (\text{resp } D_{I'})$$

である. exponential-Kummer character. χ_I である.

$$\sigma \mapsto \sigma(\log D_I) - \log D_I (\text{resp } \sigma(\log D_{I'}) - \log D_{I'})$$

である. $\mathbb{Z}$ である.

$$\text{Proposition } \bigoplus_{I \in \mathcal{C}} \chi_I \oplus \bigoplus_{I' \in \mathcal{C}'} \chi_{I'}: \pi_1^{\text{ab}}(M_{\mathbb{C}}, \eta) \longrightarrow \bigoplus_{I, I'} \mathbb{Z}$$

である. Isomorphism.

この等式において、右辺に対応する generator $\varepsilon, \bar{\varepsilon}_I, \bar{\varepsilon}_{I'}$ と書く。 $\sigma_\infty = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)^{-1}$ とおく

Corollary to main theorem

$$\Phi(\bar{\varepsilon}_I) = \prod_{i \in I} \sigma_i \in K^\times$$

$$\Phi(\bar{\varepsilon}_{I'}) = \prod_{i \in I'} \sigma_i \times \sigma_\infty \in K^\times$$

Rem この Corollary と比較定理を用いて, generalized Braid group に関する Oda-T. の定理の Analogy がいえる。