

Remark on Existence of Positive Radial Solutions for Semilinear Elliptic Equations with Harmonic Term

岐阜大学 工学部 浅川 秀一 (Hidekazu ASAKAWA)
Faculty of Engineering, Gifu University

1 序

次のような楕円型方程式の球対称解の満たす常微分方程式を考える.

$$\frac{(\rho(r)u'(r))'}{\rho(r)} + \lambda u(r) - B^2 r^2 u(r) + K(r)u(r)^p = 0, \quad 0 < r < +\infty \quad (1.1)$$

$$\exists \lim_{r \rightarrow 0} u(r) > 0, \quad \exists \lim_{r \rightarrow +\infty} r^{N/2 - \lambda/(2B)} \exp(Br^2/2) u(r) > 0, \quad (1.2)$$

ただし, $N > 2$, $B > 0$, $\rho(r) := r^{N-1}$, $p = (N+2)/(N-2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ であり, $K(r) = 1$, または, $K(r) := \exp(-(p-1)Br^2/2)$ とする. $B = 1/4$ で $K(r) := \exp(-(p-1)r^2/8)$ の場合に,

$$v(r) := \exp(-r^2/8) u(r), \quad \tilde{\rho}(r) := r^{N-1} \exp(r^2/4), \quad \mu := \lambda + N/4$$

と置くと, 方程式 (1.1)-(1.2) は半線形熱方程式の前向自己相似解の方程式;

$$(\tilde{\rho}(r)v'(r))' + \mu \tilde{\rho}(r)v(r) + \tilde{\rho}(r)v(r)^p = 0, \quad 0 < r < +\infty \quad (1.3)$$

$$\exists \lim_{r \rightarrow 0} v(r) > 0, \quad \exists \lim_{r \rightarrow +\infty} r^{N-2\mu} \exp(r^2/4) v(r) > 0 \quad (1.4)$$

に変換される. 方程式 (1.1)-(1.2) と (1.3)-(1.4) の正値解は, それぞれ (1.2) と (1.4) により, 所謂, 正値急減衰解である.

$\lambda \geq \lambda_1$ のとき, 方程式 (1.1) が正値解をもたないことはよく知られている. ここで, λ_1 は線形部分の固有値問題;

$$(\rho(r)u'(r))' + \lambda \rho(r)u(r) - \rho(r)B^2 r^2 u(r) = 0, \quad 0 < r < +\infty \quad (1.5)$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\rho(r)u(r)^2} dr = +\infty, \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{\rho(r)u(r)^2} dr = +\infty.$$

の第一固有値である。直接計算により $\lambda_1 := BN$ であり、対応する正値の固有関数は $e_1(r) := \exp(-Br^2/2)$ である。したがって、方程式 (1.3) の場合には、 $\mu \geq \mu_1 := N/2$ のときに正値解をもたないことになる。

方程式 (1.3)-(1.4), および方程式 (1.1)-(1.2) の正値解の存在, より正確には方程式が正値解をもつようなパラメータ μ, λ の範囲を求める問題は [10, 4, 5, 7, 8] 等で研究されている。 $K(r) := 1$ の場合の方程式 (1.1)-(1.2) については, Kavian-Weissler [10] に若干の記述があり, $\lambda_* \in (0, \lambda_1)$ があって $\lambda \in (\lambda_*, \lambda_1)$ なら方程式 (1.1)-(1.2) が正値解をもつことが注記されている。方程式 (1.3)-(1.4) については, 次のことが知られている。

- (Escobedo-Kavian [7]) $N = 4, 5, 6, \dots$ のときは, $N/4 < \mu < \mu_1 := N/2$ が正値解をもつための必要十分条件であり, $N = 3$ のときは, $1 < \mu < \mu_1 := 3/2$ なら正値解をもつ。
- (Atkinson-Peletier [4, 5]) $2 < N < 4$ のときは, $\mu \leq 1$ なら正値解をもたない。
- (Hirose [8, Theorem 1.2], [9]) $N \geq 4$ のときは, $\mu < \frac{3N(N-2)}{8(N-1)}$ なら正値解をもたない。

ここで, 注意したいのは, $N > 4$ のとき,

$$\frac{N}{4} < \frac{3N(N-2)}{8(N-1)} < \frac{N}{2} := \mu_1$$

となることである。[7] では, 重み付きソボレフ空間における Brezis-Nirenberg [6] に基づいた変分的方法により, 球対称解に限定しない前向自己相似解の偏微分方程式の正値解の存在を議論しているのであるが, 球対称関数に限定した同じ重み付きソボレフ空間を考えれば, 方程式 (1.3)-(1.4) の正値解の存在を議論することになる。したがって, [7] と [8] に述べられていることは $N = 5, 6, 7, \dots$ のときには相容れない。

結論を先に述べてしまうと, 次のようになる。

Proposition 1. $K(r) := 1$ とする。 $N > 2$ に対して, 次の (a), (b) が方程式 (1.1)-(1.2) が正値解をもつための必要十分条件である。

- (a) $N \geq 4$ のとき, $0 < \lambda < \lambda_1 := NB$.
- (b) $2 < N < 4$ のとき, $\lambda_* := (4 - N)B < \lambda < \lambda_1 := NB$.

Proposition 2. $K(r) := \exp(-(p-1)Br^2/2)$ とする. $N > 2$ に対して, 次の (a), (b) が方程式 (1.1)-(1.2) が正値解をもつための必要十分条件である.

(a) $N \geq 4$ のとき, $\lambda_* := BN(N-4)/(2N-2) < \lambda < \lambda_1 := NB$.

(b) $2 < N < 4$ のとき, $\lambda_* := (4-N)B < \lambda < \lambda_1 := NB$.

Proposition 2 で $B = 1/4$ の場合より, $\mu = \lambda + N/4$ だから次を得る.

Proposition 3. $N > 2$ に対して, 次の (a), (b) が方程式 (1.3)-(1.4) が正値解をもつための必要十分条件である.

(a) $N \geq 4$ のとき, $\mu_* := \frac{3N(N-2)}{8(N-1)} < \mu < \mu_1 := N/2$.

(b) $2 < N < 4$ のとき, $\mu_* := 1 < \mu < \mu_1 := N/2$.

Proposition 3 により, $N \geq 4$ のとき, 方程式 (1.3)-(1.4) の正値解が存在する μ の下端は, Hirose [8] の非存在の上端 μ_* である. [7] の議論で, $N = 5, 6, 7, \dots$ のときに μ_* より小さい $N/4$ まで正値解が存在するというギャップが起こってしまった原因は, Talenti 解;

$$v_\varepsilon(r) := \frac{1}{(\varepsilon + r^2)^{(N-2)/2}} \quad (\varepsilon > 0)$$

を使ったオーダーの計算が, 以下に述べる点でラフなことによる. $\varphi(\cdot)$ を滑らかな切り落とし関数, $K(x) := \tilde{\rho}(r) = \exp(|x|^2/4)$ とし, $u_\varepsilon := \varphi v_\varepsilon K^{-1/2}$ とおくと, $N = 5, 6, 7, \dots$ のとき,

$$\begin{aligned} \int |u_\varepsilon|^{2N/(N-2)} K dx &= \varepsilon^{-N/2} (A_0 + O(\varepsilon)), \\ \int |\nabla u_\varepsilon|^2 K - \lambda |u_\varepsilon|^2 K dx &= \varepsilon^{N/2-1} (A_1 + \tilde{A}_2 \varepsilon + o(\varepsilon)), \end{aligned} \quad (1.6)$$

という形の評価式が導かれる. ただし, $A_0, A_1 > 0$ と $\tilde{A}_2$ は ε には依らない定数である. このとき,

$$\left(\int |u_\varepsilon|^{2N/(N-2)} K dx \right)^{-(N-2)/N} = \varepsilon^{1-N/2} (A_0^{-(N-2)/N} + O(\varepsilon))$$

であり,

$$\frac{\int |\nabla u_\varepsilon|^2 K - \lambda |u_\varepsilon|^2 K dx}{\left(\int |u_\varepsilon|^{2N/(N-2)} K dx \right)^{(N-2)/N}} = A_0^{-(N-2)/N} (A_1 + \tilde{A}_2 \varepsilon) + A_1 O(\varepsilon) + o(\varepsilon)$$

となる筈である。しかし、[7] では、このステップで $A_1 O(\varepsilon)$ が消えてしまっている。上の式の右辺に $O(\varepsilon) = A_1 O(\varepsilon)$ があると ε の項による制御ができない。(1.6) 式に立ち戻って、括弧内の誤差項が $O(\varepsilon^2)$ になるように評価式を立て直す必要が生じる。

Proposition 1-3 を得るために用いた方法は、[7] の議論に修正を行った訳ではなくて別の方法をとった。方程式 (1.1) は、Liouville 型の変数変換 ([1, 3]) により次の形の方程式;

$$v''(t) + m(t)v(t) + k(t)v(t)^p = 0, \quad 0 < t < 1 \quad (\text{BNE})$$

に変換される。変換された区間 $(0, 1)$ 上の方程式に、[2, 3] に述べられている方程式 (BNE) に対する正値解の存在・非存在の結果等を適用した。第 3 節で見るように、方程式 (1.1) に上記の Liouville 型の変数変換を施すと、 $K(r) := 1$ と $K(r) := \exp(-(p-1)Br^2/2)$ の場合で、それぞれ $k(t) = [\eta t(1-t)]^{-(p+3)/2}$ と $k(t) = [\eta t]^{-(p+3)/2}$ になる。次節では、 $k(t) = [\eta t(1-t)]^{-(p+3)/2}$ または $k(t) = [\eta t]^{-(p+3)/2}$ に限定し、 $m(\cdot)$ の設定も簡単にした場合に、方程式 (BNE) に対する [2, 3] の正値解の存在・非存在の結果の一部を整理して述べる。(1.1) や (1.3) のような具体的な半線形楕円型方程式を Liouville 型の変数変換により変換した方程式 (BNE) を扱うには、それらで十分である。第 3 節では、方程式 (1.1) に対する Liouville 型の変数変換の具体形を与えると同時に、Proposition 2 の (a) の証明の概略だけは述べることにした。Proposition 1-3 の証明は他所に詳しく述べるつもりである。

2 方程式 (BNE) の正値解

この節では、区間 $(0, 1)$ 上の方程式 (BNE) に対する正値解の存在と非存在について述べる。係数関数 $k(\cdot)$ は、

$$k(t) := [\eta t(1-t)]^{-(p+3)/2}, \text{ または, } k(t) := [\eta t]^{-(p+3)/2} \quad (\eta > 0)$$

とし、 $m(\cdot)$ は $C(0, 1)$ に属し、

$$m[0] := \lim_{t \rightarrow 0} t^2 m(t) = 0, \quad m[1] := \lim_{t \rightarrow 1} (1-t)^2 m(t) \in [-\infty, 1/4)$$

とする。[2, 3] では、もっと一般の係数関数に対する結果が得られているが、以下に述べることは、その特別な場合、或いは、その容易な変形版である。

方程式 (BNE) の正値解の存在・非存在と、線形部分の方程式;

$$v''(t) + m(t)v(t) = 0, \quad 0 < t < 1 \quad (\text{LPE})$$

との間には密接な関連がある。例えば、次の (DC) は、方程式 (BNE) が正値解をもつための必要条件である ([2]をみよ)。

(DC) 方程式 (LPE) は、次のような正値解 $\hat{z}(\cdot)$ をもつ。

$$\int_{1/2}^1 \frac{1}{\hat{z}(t)^2} dt = +\infty, \quad \int_0^{1/2} \frac{1}{\hat{z}(t)^2} dt < +\infty.$$

条件 (DC) が成立しないときは、(BNE) は正値解をもたないことになるが、これは、方程式 (1.1) が $\lambda \geq \lambda_1$ のときは正値解をもたないことに相当する。以下では、常に条件 (DC) を仮定する。

Definition 2.1. (BNE) の正値解 $v(\cdot)$ が急減衰解 (*rapidly decay*) とは、

$$\exists \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(t)}{z(t)} > 0, \quad \exists \lim_{t \rightarrow 1} \frac{v(t)}{\hat{z}(t)} > 0$$

が成り立つことである。ただし、 $z(\cdot)$ は

$$z(t) := \hat{z}(t) \int_0^t \frac{1}{\hat{z}^2(y)} dy$$

で与えられる (LPE) の正値解である。

係数 $m(\cdot)$ が非負値性の仮定;

(PM) $\delta \in (0, 1)$ があって、すべての $t \in (0, \delta]$ に対して、 $m(t) \geq 0$;

を満たすとき、次ぎの正値急減衰解の存在定理が成り立つ。

Theorem 4. $k(t) = [\eta t(1-t)]^{-(p+3)/2}$ ($\eta > 0$) とする。(PM) と $m[0] = 0$, $m[1] \in [-\infty, 0]$ を仮定する。このとき、次の (a) または (b) が成り立つなら、(BNE) は正値急減衰解をもつ。(a) $\int_0^{1/2} m(t) dt = +\infty$; (b) $\int_0^{1/2} m(t) dt < +\infty$ かつ $\hat{z}'(0)/\hat{z}(0) > -1$ 。

Theorem 5. $k(t) = [\eta t]^{-(p+3)/2}$ ($\eta > 0$) とする。(PM) と $m[0] = 0$, $m[1] \in [-\infty, 1/4)$ を仮定する。このとき、次の (a) または (b) が成り立つなら、(BNE) は正値急減衰解をもつ。(a) $\int_0^{1/2} m(t) dt = +\infty$; (b) $\int_0^{1/2} m(t) dt < +\infty$ かつ $\hat{z}'(0) > 0$ 。

(b) の $m(\cdot) \in L^1(0, 1/2)$ のときには、 $\hat{z}(\cdot) \in C^1[0, 1)$ であり、 $\hat{z}'(0)$, $\hat{z}(0)$ の値が意味をもつことを注意しておく。

次の二つの正值急減衰解の非存在の補題は, [11] 等にも述べられている Pohozaev の等式の変形版からの帰結である. $m(\cdot)$ に可微分性を要求しない形で述べておく.

Lemma 6. $k(t) = [\eta t(1-t)]^{-(p+3)/2}$ ($\eta > 0$) とする. $[t(1-t)]^2 m(t)$ が $(0, 1)$ 上で非増加であり, $m[0] = 0$, $m[1] \in [-\infty, 0)$ であれば, (BNE) は正值急減衰解をもたない.

Lemma 7. $k(t) = [\eta t]^{-(p+3)/2}$ ($\eta > 0$) とする. $t^2 m(t)$ が $(0, 1)$ 上で非増加であり, $m[0] = 0$, $m[1] \in [-\infty, 0]$ であれば, (BNE) は正值急減衰解をもたない.

最後にもう一つあげる正值急減衰解の非存在の補題は, [11] 等に述べられている Pohozaev の等式からの帰結の書き換えである.

Lemma 8. $k(t) = [\eta t(1-t)]^{-(p+3)/2}$ または $k(t) = [\eta t]^{-(p+3)/2}$ ($\eta > 0$) とする. $[z(t)\hat{z}(t)]^{(p+3)/2} k(t)$ が $(0, 1)$ 上で非増加であり,

$$+\infty \geq \lim_{t \rightarrow 0} [z(t)\hat{z}(t)]^{(p+3)/2} k(t) > \lim_{t \rightarrow 1} [z(t)\hat{z}(t)]^{(p+3)/2} k(t)$$

が成り立つなら, (BNE) は正值急減衰解をもたない.

3 Liouville 型の変数変換

この節では, 方程式 (1.1) を区間 $(0, 1)$ 上の方程式 (BNE) に変換する Liouville 型の変数変換 ([1, 3]) の具体形を与える. また, 最後に, Proposition 2 の (a) の証明の概略を記しておく.

まず, $K(r) := 1$ の場合は, 変数変換を

$$t := \frac{r^{N-2}}{1 + r^{N-2}}, \quad \frac{v(t)}{\sqrt{t(1-t)}} := \sqrt{N-2} r^{(N-2)/2} u(r), \quad (3.1)$$

と定義すると, 方程式 (1.1) は

$$v''(t) + m(t)v(t) + [\eta t(1-t)]^{-(p+3)/2} v(t)^p = 0, \quad 0 < t < 1 \quad (3.2)$$

となる. ただし, $\eta := N-2$ で,

$$[t(1-t)]^2 m(t) := \frac{\lambda}{\eta^2} \left(\frac{t}{1-t} \right)^{\frac{2}{(N-2)}} - \frac{B^2}{\eta^2} \left(\frac{t}{1-t} \right)^{\frac{4}{(N-2)}}. \quad (3.3)$$

$K(r) := \exp(-(p-1)Br^2/2)$ の場合は, 変数変換を

$$t := \exp\left(-(N-2) \int_r^{+\infty} y^{-1} \exp(-By^2/(N-1)) dy\right)$$

$$\frac{v(t)}{\sqrt{t}} := \frac{\sqrt{N-2} r^{(N-2)/2} u(r)}{\exp(Br^2/(2N-2))} \quad (3.4)$$

で定義すると, 方程式 (1.1) は

$$v''(t) + m(t)v(t) + [\eta t]^{-(p+3)/2} v(t)^p = 0, \quad 0 < t < 1 \quad (3.5)$$

となる. ただし, $\eta := N-2$ で,

$$t^2 m(t) := \frac{r^2 \exp(2Br^2/(N-1))}{(N-2)^2} \left\{ \lambda - \frac{BN(N-4)}{2(N-1)} \right\}$$

$$+ \frac{1}{4} \left\{ 1 - \exp(2Br^2/(N-1)) + \exp(2Br^2/(N-1)) \frac{2Br^2}{N-1} \right\}$$

$$- \exp(2Br^2/(N-1)) \frac{NB^2 r^4}{(N-1)^2(N-2)}. \quad (3.6)$$

何れの場合にも, 解の正値性は変換によって保存されて, 前節の条件 (DC) は, $\lambda < \lambda_1$ と同値であり, $\lambda \geq \lambda_1$ のときは, (3.2) と (3.5) は正値解をもたない. また, $\lambda < \lambda_1$ のときは, (1.1)-(1.2) が正値解をもつことは, それぞれの場合に (3.2) と (3.5) が正値急減衰解をもつことと同値である.

Proposition 2 の (a) の証明の概略:

上に述べたことから, $\lambda < \lambda_1$ の場合だけを考えればよい. (3.6) より, $\lambda > BN(N-4)/(2N-2)$ のときは係数 $m(t)$ が (PM) を満たす. 直接の微分計算により,

$$\frac{(N-2)^2}{\exp\left(\frac{2Br^2}{N-1}\right)} \frac{d}{dr} [t^2 m(t)] = \left(\lambda - \frac{BN(N-4)}{2(N-1)} \right) \left(2r + \frac{4Br^3}{N-1} \right)$$

$$- \frac{2(N^2-4)B^2 r^3}{(N-1)^2} - \frac{4N(N-2)B^3 r^5}{(N-1)^3}$$

となり, $\lambda \leq BN(N-4)/(2N-2)$ のとき, 全ての $t \in (0, 1)$ に対して,

$$\frac{d}{dt} [t^2 m(t)] = \frac{d}{dr} [t^2 m(t)] \frac{dr}{dt} < 0$$

がわかる. (3.4) の第一式を用いて, t と r のオーダーの比較を行うと, $m[0] = 0$, $m[1] = -N(N-2)/4 < 0$, 及び, $\lambda \geq BN(N-4)/(2N-2)$ のとき,

$$\int_0^{1/2} m(t) dt < +\infty \iff 2 < N < 4$$

が得られる. 以上より, Theorem 5 の (a) と Lemma 7 を適用すると Proposition 2 の (a) の主張が導かれる.

References

- [1] H. Asakawa, On Liouville Transform for ODEs corresponding to semilinear elliptic equations, *Surikaisekikenkyusho kokyuroku* **1474** (2006) 169–177.
- [2] H. Asakawa, Phenomenon of critical dimension to Brezis-Nirenberg type super linear 2nd order ODEs, preprint.
- [3] H. Asakawa, Liouville type transformation and existence of positive rapidly decaying solution of semilinear elliptic equations, preparation.
- [4] F. V. Atkinson, L A Peletier; On the radial solutions of the equation $\Delta u + (1/2)x \cdot \nabla u + (1/2)\lambda u + |u|^{p-1}u = 0$, *C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I* **302** (1986), 99–101.
- [5] F. V. Atkinson, L A Peletier; Radial similarity of a parabolic equation, "Nonlinear parabolic equations: qualitative properties of solutions (Rome, 1985)," *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, **149**, Longman Sci. Tech., Harlow, 1987, 5–12
- [6] H. Brezis and L. Nirenberg; Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents, *Comm. Pure Appl. Math.* **36** (1983), 437–477.
- [7] M. Escobedo and O. Kavian, Variational problems related to self-similar solutions of the heat equation, *Nonlinear Anal. TMA* **11** (1987), 1103–1133.
- [8] M. Hirose; Structure of positive radial solutions to the Haraux-Weissler equation II, *Advances in Mathematical Sciences and Applications* **9**(1999), 473–497.
- [9] M. Hirose; "On radial solutions of semilinear elliptic equations with a gradient term", Doctor Thesis, Waseda University, 1998.
- [10] O. Kavian, F. B. Weissler; Self-similar solutions of the pseudo-conformally invariant nonlinear Schrödinger equation, *Michigan Math. J.* **41** (1994), 151–173.
- [11] E. Yanagida and S. Yotsutani, A unified approach to the structure of radial solutions for semilinear elliptic problems. Recent topics in mathematics moving toward science and engineering. *Japan J. Indust. Appl. Math.* Vol. 18 (2001), 503–519.