

力学的 coherence を介した 速いダイナミクスから 遅いダイナミクスへの情報伝搬

東京大学 総合文化研究科 広域科学専攻 藤本 仰一

fujimoto@complex.u-tokyo.ac.jp

断熱近似 (隸属化原理) とは対照的に、速いスケールから遅いスケールへの相関の伝搬を実現するために、複数のカオス的な振動子 i をその時間スケールを τ^i と等比級数的に分布させて結合したモデルを調べた。この伝搬は、 τ がある範囲内でのみ実現し、様々なスケールでの引き込みとそれらのカスケードに因ることが見出された。

生態系、生体系、気象系、化学反応動力学などでは、様々な時間スケールのダイナミクスが何桁にもわたって混在し、互いに影響を及ぼしあっていて、それらの関係を記述する数理的枠組の構築は重要である。スケールが混在する系の特徴を抽出する方法として、「速い変数はその平均+ノイズと見て、遅い変数の変化のみに注目せよ」という断熱近似があるが、上記の系では、様々なスケールの混在により各ダイナミクスの間の (力学的) コヒーレンスが無視できず、その上、むしろ速い変数の方が系全体のダイナミクスにとって重要な役割をする状況もある。

そこで以下の数理モデルを用いて、“どのような場合に速いダイナミクスの方が重要な役割 (relevant) をするか?、その場合に、速いダイナミクスの性質は、どのように時間スケールを変換されて遅いダイナミクスへと伝搬されるか?”について、非線形力学系の立場から一般的な理論を構築したい。関係する性質として、カオスなどが持つ不安定性がある。カオスは、ミクロスケールの揺らぎがマクロスケールに増幅されるが、この場合に増幅されるのはあくまで揺らぎであって統計的性質ではなく、これに加えて何らかの機構を提示することが本論の目標である。

本論では、『速い変数の統計的性質に、遅い変数の統計的性質が依存する』性質に

注目し、様々な時間スケールのダイナミクスが何桁にもわたって混在し互いに影響を及ぼしあうモデルを以下に導入する。即ち、トポロジカルな性質が同じ非線形振動子を複数個用意し、それらの時間スケールのみに異なりを導入して結合する。スケールの異なりは等比級数的に分布させる。各素子の非線形振動子を

$$\frac{d\vec{X}_i}{dt} = \vec{F}(\gamma, \vec{X}) \quad (1)$$

とする。ここでは、Lorenz 方程式を用いた。その時間微分項に変数変換を施して、

$$\begin{cases} T_i \frac{d\vec{X}_i}{dt} = \vec{F}(\gamma, \vec{X}_i) \\ T_i \equiv T_1 \tau^{i-1}, \quad \tau > 1, \quad T_i > T_{i-1} \end{cases} \quad (2)$$

とし、それらを近い時間スケールを持つ素子と結合して、

$$T_i \frac{d\vec{X}_i}{dt} = \vec{G}(\vec{F}(\gamma, \vec{X}_i), \vec{X}_{i-1}, \vec{X}_{i+1}) \quad (3)$$

とする。 $\vec{X}$ は各素子の変数で、各素子 i ($= 1, 2, \dots, L \equiv \text{system size}$) の特徴的な時間スケールは $T_i > T_{i-1}$ で、 i が大きいほど遅いダイナミクスになる。

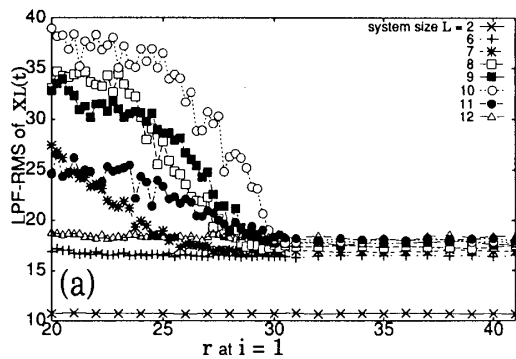
このモデルで、トータルの時間スケール差を $\tau^{L-1} = 10^2$ と一定にして、 L を大きく (τ を小さく) していくと、ある範囲内 $\tau_* \geq \tau > 1$ で、『速いダイナミクスの

¹ τ を一定のまま、 L を増やしてトータルの時間スケール差を 10^5 程度にしても本論で述べる結果は維持される。重要なのは、 L でなく τ である。

統計的性質を変えると遅いダイナミックスの統計的性質が変わる』ことを以下の数値実験を通して示した

数値実験：一番速い素子 ($i = 1$) の制御パラメータのみを変えて、一番速い素子に分岐を起こした場合に、一番遅い素子 ($i = L$) の遅い時間スケールの定性的 (統計的) 性質に変化が起こるかどうかを見る。

下図は、横軸に一番速い素子 ($i = 1$) の制御パラメータ、縦軸に遅いスケールの統計的性質として、一番遅い素子の時系列から高周波成分を除去した²分散を示す。凡例に示すようにマークは (L, τ) に対応する。 $7 \leq L \leq 11$ のみで依存性がある。



ここで示した性質は、個々のエレメントに Rössler 方程式を用いた場合にも見られた。以下に共通する性質を示す。

1. 隣あう近い時間スケールの素子の間に coherence (引き込み等) があること。引き込み理論と同様、非線形性があり、 τ がそこそこ小さければよい。
2. 分岐カスケード。
これを実現するには、引き込み条件に加えた何らかの条件が必要である。これについては研究中で、カスケードのロバストネスの理解、さらに、スケール方向に伝達変換出来る／出来ない性質の区別に至るための重要な性質であると考えている。また、パラメーター

² 速いスケールでの変化の直接的な寄与を除き、遅いスケールに現われる変化のみを測定するため。

の変え方が分岐を跨ぐような変え方ではないと上述の依存性は見られない。

3. 操作 (或は、依存性) に関する時間スケール方向の非対称性。

この場合、速いダイナミックスに遅い素子のパラメータ変化の依存性は見出されない。遅いダイナミックスはパラメーター (relevant) で速いダイナミックスが変数 (irrelevant) という隷属化原理 (断熱近似) の描像とは反対の関係である。

これらの性質は、非常に一般的であり、次のような非線形力学系研究の方向性が非常に有望であることを示唆する：様々なスケール (モード) が独立でもなく、混合的ではなく、系全体を貫く力学的 coherence を有する系³。このような性質を持つ力学系の世界の知見を豊かにすべく以下のモデルの研究にも取り組んでいる。これらの系においても、本論で述べた中間的なスケールで中継することによる速い (ミクロ) スケールから遅い (マクロ) スケールへの統計的性質の伝搬が可能であり、それを成立させるには上述の3つの性質 (に近い性質) が必要であることを見出している。

- convective instability along time scales : カオス的な不安定性の代わりに、convective instability (移流不安定性) という流れに沿って乱れが増幅していく空間的な不安定性を持つダイナミックスを1素子に用いる。上述の統計的性質の伝搬には、traveling wave のように単に伝搬する性質だけでなく、不安定性が必要であることを経験的に見出している。
- 階層的 Turing pattern: 1素子に反応拡散方程式を用意し、時間スケールの代わりに空間スケールを等比級数的に分布させて相互作用させる。

³ 活発に研究されている非線形振動子の集団運動もこのカテゴリーに近いが、どのレベルで共通性が見出せるのかは現時点では、はっきりしていない。