

幾何ランダムウォーク上のアメリカン・ダブルエキササイズ・プット・オプションに対する 値関数の解析によるアプローチ

Value Function Approach for American Double Exercise
Put Option on Geometric Random Walk

大石 潤^{*1}, 笛吹 祐希^{*1}, 穴太 克則^{*2}

^{*1}: 芝浦工業大学大学院 理工学研究科 システム理工学専攻 数理科学部門

^{*2}: 芝浦工業大学 システム理工学部 数理科学科

概要: 幾何ランダムウォーク上の 2 回権利行使可能なアメリカン・プット・オプションの最適複数回停止問題の最適停止時刻を, 最適値関数の解析により解く. このアプローチは, マルコフ過程上の最適停止問題の一般理論を用いていない.

1. 幾何ランダムウォーク上のアメリカン・プット・オプション

株価の変動過程 S_n を,

$$S_n := S_0 \lambda^{\epsilon_1 + \dots + \epsilon_n} \quad (1)$$

とする. ここで, $\mathbb{P}(\epsilon_i = 1) = \mathbb{P}(\rho_i = b) = p, \mathbb{P}(\epsilon_i = -1) = \mathbb{P}(\rho_i = a) = q$ であり, $\lambda > 1, a = 1/\lambda - 1, b = \lambda - 1$ である. また, $S_0 \in E := \{\lambda^k, k = 0, \pm 1, \dots\}$ とすると, $S_n \in E, n \geq 1$ である. この株価変動過程 S_n は E 上の幾何ランダムウォークである. このとき, 無裁定かつ完備であり, リスク中立測度 $\tilde{\mathbb{P}}$ が存在することが知られており, 以下となる (参考 [4]).

$$\tilde{\mathbb{P}}(\epsilon_i = 1) = \tilde{\mathbb{P}}(\rho_i = b) = \frac{r - a}{b - a} =: p, \quad \tilde{\mathbb{P}}(\epsilon_i = -1) = \tilde{\mathbb{P}}(\rho_i = 1) = \frac{b - r}{b - a} =: q. \quad (2)$$

$$p = \frac{r - (\lambda^{-1} - 1)}{\lambda - 1 - (\lambda^{-1} - 1)} = \frac{(1 + r) - \lambda^{-1}}{\lambda - \lambda^{-1}} = \frac{\alpha^{-1} - \lambda^{-1}}{\lambda - \lambda^{-1}}, \quad (3)$$

$$q = \frac{\lambda - 1 - r}{\lambda - 1 - (\lambda^{-1} - 1)} = \frac{\lambda - (1 + r)}{\lambda - \lambda^{-1}} = \frac{\lambda - \alpha^{-1}}{\lambda - \lambda^{-1}}. \quad (4)$$

ただし, $\alpha = (1 + r)^{-1}$ である.

原資産価格が幾何ランダムウォーク S_n に従うアメリカン・プット・オプションの最適停止問題を考える. ここでは「権利行使」のことを「停止」と呼ぶこととする. $V_n^{[1]}(x)$ はオプションの満期時刻 N までの残り期間 n 期で, その時点での原資産価格が x であるときの最大期待利得とする. すなわち,

$$V_n^{[1]}(x) = \sup_{0 \leq \tau \leq n} \tilde{\mathbb{E}}_x [\alpha^\tau (K - S_\tau)^+], \quad n = N, N - 1, \dots, 0. \quad (5)$$

ただし, $0 < \alpha < 1$, $K > 0$ は権利行使価格である. このとき, 以下の最適方程式が成り立つ.

$$\begin{aligned} V_n^{[1]}(x) &= \max \left\{ (K - x)^+, \alpha \tilde{\mathbb{E}}_x \left[V_{n-1}^{[1]}(S_{n-1}) \right] \right\} \\ &= \max \left\{ (K - x)^+, \alpha p V_{n-1}^{[1]}(\lambda x) + \alpha q V_{n-1}^{[1]}(\lambda^{-1} x) \right\}, \quad n = N, N-1, \dots, 1. \end{aligned} \quad (6)$$

$$V_0^{[1]}(x) = (K - x)^+. \quad (7)$$

定理 1.1 最適停止時刻 $\tau^{[1]*}$ は,

$$\tau^{[1]*} := \inf \{ n \in \{0, 1, \dots, N\} : S_n \leq x_n^{[1]*} \}. \quad (8)$$

ここで, $x_n^{[1]*} := \inf \{ x \in E : V_n^{[1]}(x) = (K - x)^+ \}$ であり, $K =: x_0^{[1]*} \geq x_1^{[1]*} \geq \dots \geq x_N^{[1]*} \geq 0$.

インデックスを入れ替えて, $y_n^{[1]*} = x_{N-n}^{[1]*}$ とする. このとき,

$$0 \leq y_0^{[1]*} \leq \dots \leq y_N^{[1]*} = K. \quad (9)$$

最適停止領域 $D^{[1]}$ は次であり, 図 1 のようになる.

$$D^{[1]} = \{ (n, y) \in \{0, 1, \dots, N\} \times E : y \leq y_n^{[1]*} \}. \quad (10)$$

すなわち, 原資産価格が最適停止領域 $D^{[1]}$ 内に初めて到達した時刻が最適停止時刻となる.

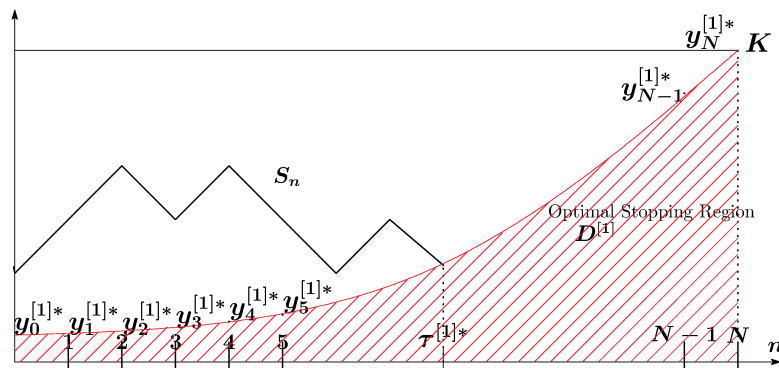


図 1: 最適停止領域 $D^{[1]}$

定理 1.1 を証明するため, 最適値関数 $V_n^{[1]}(x)$ の性質を調べる.

補題 1.1

- (i) $x \mapsto V_n^{[1]}(x)$ は連続, 非増加, convex.
- (ii) $n \mapsto V_n^{[1]}(x)$ は増加で, $V_0^{[1]}(x) \geq 0$.

(証明) (i) n に対する帰納法によって示す.

(a) $n = 0$ のとき, $V_0^{[1]}(x) = (K - x)^+$ は, 明らかに x について連続, 非増加, convex である.

(b) $n-1$ のとき, $V_{n-1}^{[1]}(x)$ は x について連続, 非増加, convex であると仮定する.

最適方程式より,

$$V_n^{[1]}(x) = \max\{(K-x)^+, \alpha p V_{n-1}^{[1]}(\lambda x) + \alpha q V_{n-1}^{[1]}(\lambda^{-1}x)\}. \quad (11)$$

$(K-x)^+$ は (a) より連続, 非増加, convex であり, $\alpha p V_{n-1}^{[1]}(\lambda x) + \alpha q V_{n-1}^{[1]}(\lambda^{-1}x)$ は仮定より連続, 非増加, convex である. 2つの連続関数の max は連続, 非増加, convex であるため, $V_n^{[1]}(x)$ は x について連続, 非増加, convex.

(a), (b) より $V_n^{[1]}(x)$ は x について連続, 非増加, convex.

(ii) (7) 式より, $V_0^{[1]}(x) \geq 0$. また, (5) 式より,

$$V_n^{[1]}(x) = \sup_{0 \leq \tau \leq n} \mathbb{E}_x [\alpha^\tau (K - S_\tau)^+] \leq \sup_{0 \leq \tau \leq n+1} \mathbb{E}_x [\alpha^\tau (K - S_\tau)^+] = V_{n+1}^{[1]}(x). \quad (12)$$

よって, $V_n^{[1]}(x)$ は n について増加である. □

補題 1.2 各 $n = N, N-1, \dots, 0$ に対して,

$$\lim_{x \downarrow 0} V_n^{[1]}(x) = K. \quad (13)$$

(証明) n についての帰納法によって示す. $\lim_{x \downarrow 0} V_n^{[1]}(x) = V_n^{[1]}(0+)$ とする.

(a) $n=0$ のとき, $K > 0$ だから, $V_0^{[1]}(0+) = (K-0+)^+ = K$.

(b) $n-1$ のとき $V_{n-1}^{[1]}(0+) = K$ と仮定する. 最適方程式より,

$$\begin{aligned} V_n^{[1]}(x) &= \max\{(K-0+)^+, \alpha (p V_{n-1}^{[1]}(0+) + q V_{n-1}^{[1]}(0+))\} \\ &= \max\{K, \alpha(p+q)K\} = \max\{K, \alpha K\} = K. \end{aligned} \quad (14)$$

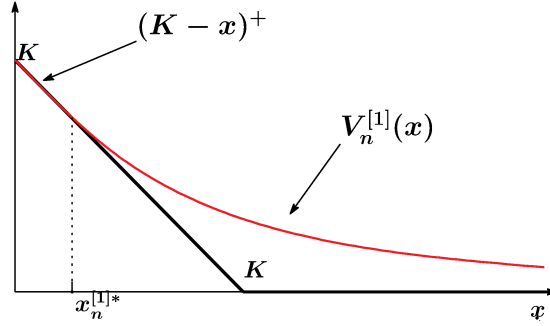
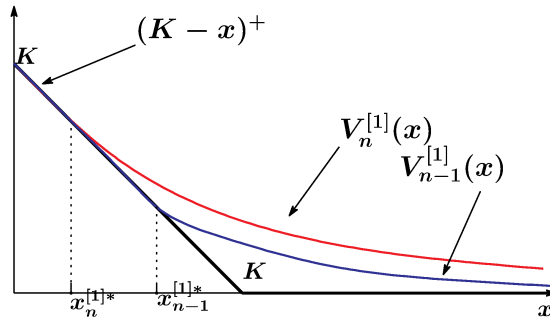
(a), (b) より $V_n^{[1]}(0+) = K$. □

以上の補題を用いて, 定理 1.1 を証明する.

(定理 1.1 の証明) まず, $n \geq 0$ を固定する. 最適方程式より, $V_n^{[1]}(x) \geq (K-x)^+$. 更に, 補題 1.1(i), 補題 1.2 より $x_n^{[1]*}$ が存在し (図 2 参照), τ^* は最適停止時刻となる. また, 補題 1.1(ii) より, $V_n^{[1]}(x) > V_{n-1}^{[1]}(x)$ なので, $x_n^* \geq x_{n-1}^*$ となる (図 3 参照). □

2. 幾何ランダム・ウォーク上の 2 回権利行使可能なアメリカン・プット・オプション

原資産価格が幾何ランダムウォークに従い, 満期までに 2 回権利行使が可能なアメリカン・プット・オプションの最適停止問題を考える. $V_n^{[2]}(x)$ を満期 N までの残り期間が n で, 原資産価格が x , 残り

図 2: 閾値 $x_n^{[1]*}$ 図 3: 閾値 $x_n^{[1]*}, x_{n-1}^{[1]*}$

権利行使回数が2回であるときの最大期待利得とする。すなわち,

$$V_n^{[2]}(x) = \sup_{0 \leq \tau_1 < \tau_2 \leq n} \tilde{\mathbb{E}}_x [\alpha^{\tau_1} (K - S_{\tau_1})^+ + \alpha^{\tau_2} (K - S_{\tau_2})^+], n = N, N-1, \dots, 0. \quad (15)$$

ただし, $0 < \alpha < 1, K > 0$ で, 一度目の権利行使時刻を τ_1 , 二度目の権利行使時刻を τ_2 とする。このとき, 最適方程式は, $V_0^{[2]}(x) = (K - x)^+$ であり, $n = N, \dots, 1$ に対しては以下である。

$$V_n^{[2]}(x) = \max\{(K - x)^+ + \alpha p V_{n-1}^{[1]}(\lambda x) + \alpha q V_{n-1}^{[1]}(\lambda^{-1} x), \alpha p V_{n-1}^{[2]}(\lambda x) + \alpha q V_{n-1}^{[2]}(\lambda^{-1} x)\}. \quad (16)$$

次を定義する。

$$\Delta V_n^{[2]}(x) := V_n^{[2]}(x) - V_n^{[1]}(x), \quad f_n^{[2]}(x) := \alpha \tilde{\mathbb{E}}_x [\Delta V_{n-1}^{[2]}(S_{n-1})]. \quad (17)$$

定理 2.1 残り2回権利行使可能なときの最適停止時刻 $\tau^{[2]*}$ は,

$$\tau^{[2]*} := \inf\{n \in \{0, 1, \dots, N\} : S_n \leq x_n^{[2]*}\}. \quad (18)$$

ここで, $x_n^{[2]*} := \inf\{x \in E : V_n^{[2]}(x) = (K - x)^+\}$ であり, $K =: x_0^{[2]*} \geq x_1^{[2]*} \geq \dots \geq x_N^{[2]*} \geq 0$.

インデックスを入れ替えて, $y_n^{[2]*} = x_{N-n}^{[2]*}$ とする。このとき,

$$0 \leq y_0^{[2]*} \leq \dots \leq y_N^{[2]*} = K. \quad (19)$$

残り 2 回権利行使可能なときの最適停止領域 $D^{[2]}$ は,

$$D^{[2]} = \{(n, y) \in \{0, 1, \dots, N\} \times E : y \leq y_n^{[2]*}\}, \quad (20)$$

である (図 4 参照). すなわち, 原資産価格が最適停止領域 $D^{[2]}$ 内に初めて到達した時刻が 1 回目の最適停止時刻となる.

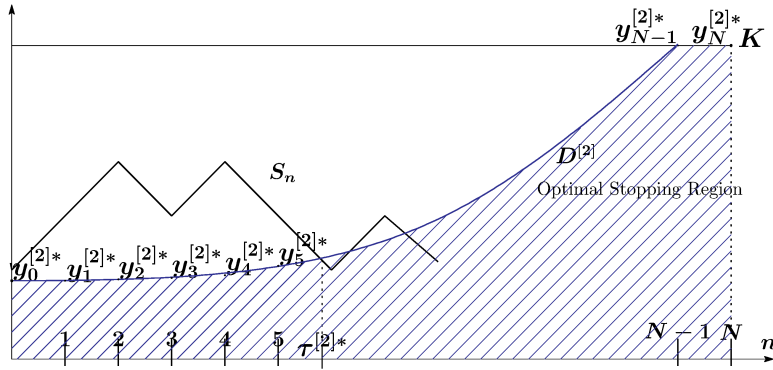


図 4: 最適停止領域 $D^{[2]}$

最適停止問題を解くため, 最適値関数 $V_n^{[2]}(x)$ とその差分 $\Delta V_n^{[2]}(x)$ の性質を調べる.

補題 2.1

- (i) $x \mapsto \Delta V_n^{[2]}(x)$ は連続, 非増加, convex.
- (ii) $\Delta V_n^{[2]}(x) \geq 0$.

(証明) (i) n についての帰納法によって示す.

(a) $n = 0$ のとき,

$$\Delta V_0^{[2]}(x) = V_0^{[2]}(x) - V_0^{[1]}(x) = (K - x)^+ - (K - x)^+ = 0. \quad (21)$$

定数 0 は連続で非増加, convex な関数といえる.

(b) $n - 1$ のとき, $\Delta V_{n-1}^{[2]}(x)$ は, x について連続, 非増加, convex と仮定する.

このとき,

$$\begin{aligned} \Delta V_n^{[2]}(x) &= V_n^{[1]}(x) - V_n^{[1]}(x) \\ &= \max\{(K - x)^+ + \alpha p V_{n-1}^{[1]}(\lambda x) + \alpha q V_{n-1}^{[1]}(\lambda^{-1}x), \alpha p V_{n-1}^{[2]}(\lambda x) + \alpha q V_{n-1}^{[2]}(\lambda^{-1}x)\} \\ &\quad - \max\{(K - x)^+, \alpha p V_{n-1}^{[1]}(\lambda x) + \alpha q V_{n-1}^{[1]}(\lambda^{-1}x)\}. \end{aligned} \quad (22)$$

ここで, 便宜上,

$$A := (K - x)^+, \quad B := \alpha p V_{n-1}^{[1]}(\lambda x) + \alpha q V_{n-1}^{[1]}(\lambda^{-1}x), \quad C := \alpha p V_{n-1}^{[2]}(\lambda x) + \alpha q V_{n-1}^{[2]}(\lambda^{-1}x), \quad (23)$$

とすると, (22) 式は,

$$\Delta V_n^{[2]}(x) = \max\{A + B, C\} - \max\{A, B\} \quad (24)$$

$$= \begin{cases} (\text{ア}) & A + B - A = B = \alpha p V_{n-1}^{[1]}(\lambda x) + \alpha q V_{n-1}^{[1]}(\lambda^{-1}x), \\ (\text{イ}) & A + B - B = A = (K - x)^+, \\ (\text{ウ}) & C - A, \\ (\text{エ}) & C - B = \alpha p (V_{n-1}^{[2]}(\lambda x) - V_{n-1}^{[1]}(\lambda x)) + \alpha q (V_{n-1}^{[2]}(\lambda^{-1}x) - V_{n-1}^{[1]}(\lambda^{-1}x)) \\ & = \alpha p \Delta V_{n-1}^{[2]}(\lambda x) + \alpha q \Delta V_{n-1}^{[2]}(\lambda^{-1}x), \end{cases} \quad (25)$$

となる. (ア), (イ) は補題 1.1(i) より連続, 非増加, convex であり, (エ) は仮定より連続, 非増加, convex である. ここで, (ウ) となる場合は存在しないことを示す.

$A \geq B$ とする. このとき,

$$A + B = (K - x)^+ + \alpha p V_{n-1}^{[1]}(\lambda x) + \alpha q V_{n-1}^{[1]}(\lambda^{-1}x) \geq 2 \left(\alpha p V_{n-1}^{[1]}(\lambda x) + \alpha q V_{n-1}^{[1]}(\lambda^{-1}x) \right) \quad (26)$$

となる. ところで, $\forall x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\begin{aligned} 2V_{n-1}^{[1]}(x) &= 2 \sup_{0 \leq \tau \leq n-1} \mathbb{E}_x [\alpha^\tau (K - S_\tau)^+] \\ &= \sup_{0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq n-1} \mathbb{E}_x [\alpha^{\tau_1} (K - S_{\tau_1})^+ + \alpha^{\tau_2} (K - S_{\tau_2})^+] \\ &\geq \sup_{0 \leq \tau_1 < \tau_2 \leq n-1} \mathbb{E}_x [\alpha^{\tau_1} (K - S_{\tau_1})^+ + \alpha^{\tau_2} (K - S_{\tau_2})^+] = V_{n-1}^{[2]}(x) \end{aligned} \quad (27)$$

であるため, (26) 式は,

$$A + B \geq 2 \left(\alpha p V_{n-1}^{[1]}(\lambda x) + \alpha q V_{n-1}^{[1]}(\lambda^{-1}x) \right) \geq \alpha p V_{n-1}^{[2]}(\lambda x) + \alpha q V_{n-1}^{[2]}(\lambda^{-1}x) = C \quad (28)$$

となる. よって, $A \geq B$ のとき $A + B \geq C$ となるため, (ウ) となる場合は存在しない.

(a), (b) より $\Delta V_n^{[2]}(x)$ は連続, 非増加, convex.

(ii) $n = 0$ のとき, (21) 式より $\Delta V_0^{[2]}(x) = 0$. また, $n > 0$ のとき, (25) 式 (ア), (イ), (エ) 全ての場合において $\Delta V_n^{[2]}(x) \geq 0$. $\square$

補題 2.2

$$\lim_{x \downarrow 0} V_0^{[2]}(x) = K, \quad (29)$$

$$\lim_{x \downarrow 0} V_n^{[2]}(x) = (1 + \alpha)K, \quad n = N, N - 1, \dots, 1. \quad (30)$$

(証明) n についての帰納法によって示す.

(a) $n = 0$ のとき, $V_0^{[2]}(0+) = (K - 0+)^+ = K$.

(b) $n = 1$ のとき, (a) および補題 1.2 より,

$$\begin{aligned}
 V_1^{[2]}(0+) &= \max\{(K - 0+)^+ + \alpha p V_0^{[1]}(0+) + \alpha q V_0^{[1]}(0+), \alpha p V_0^{[2]} + \alpha q V_0^{[2]}\} \\
 &= \max\{(K - 0+)^+ + \alpha p K + \alpha q K, \alpha p K + \alpha q K\} \\
 &= \max\{(1 + \alpha K), \alpha K\} \\
 &= (1 + \alpha)K.
 \end{aligned} \tag{31}$$

(c) $n - 1$ のとき $\lim_{x \downarrow 0} V_{n-1}^{[2]}(x) = (1 + \alpha)K$ と仮定する. このとき, (b) および補題 1.2 より,

$$\begin{aligned}
 V_n^{[2]}(0+) &= \max\{(K - 0+)^+ + \alpha p V_{n-1}^{[1]}(0+) + \alpha q V_{n-1}^{[1]}(0+), \alpha p V_{n-1}^{[2]}(0+) + \alpha q V_{n-1}^{[2]}(0+)\} \\
 &= \max\{(K - 0+)^+ + \alpha p K + \alpha q K, \alpha p (1 + \alpha)K + \alpha q (1 + \alpha)K\} \\
 &= \max\{(1 + \alpha)K, \alpha (1 + \alpha)K\} \\
 &= (1 + \alpha)K.
 \end{aligned} \tag{32}$$

(a), (b), (c) より示された. $\square$

補題 2.3 $n \mapsto \Delta V_n^{[2]}(x)$ は増加.

(証明) $\Delta V_n^{[2]}(x)$ に対する割引現在価値過程が優マルチンゲールとなることから成立する. $\square$

以上の補題を用いて, 定理 2.1 を証明する.

(定理 2.1 の証明) まず, n を固定する. 定義より, $f_n^{[2]}(x)$ は,

$$f_n^{[2]}(x) := \alpha \tilde{\mathbb{E}}_x [\Delta V_{n-1}^{[2]}(S_{n-1})] = \alpha \{p(V_{n-1}^{[2]}(\lambda x) - V_{n-1}^{[1]}(\lambda x)) + q(V_{n-1}^{[2]}(\lambda^{-1}x) - V_{n-1}^{[1]}(\lambda^{-1}x))\}.$$

このとき, 補題 2.2 より,

$$\lim_{x \downarrow 0} f_n^{[2]}(x) = \alpha \{p((1 + \alpha)K - K) + q((1 + \alpha)K - K)\} = \alpha^2 K. \tag{33}$$

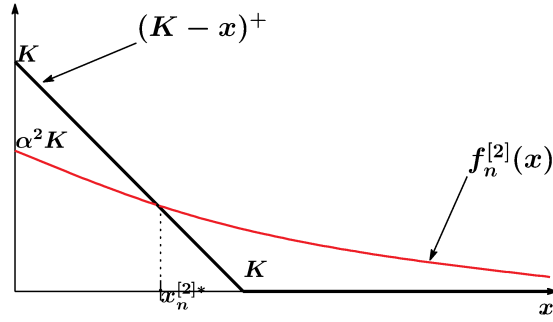
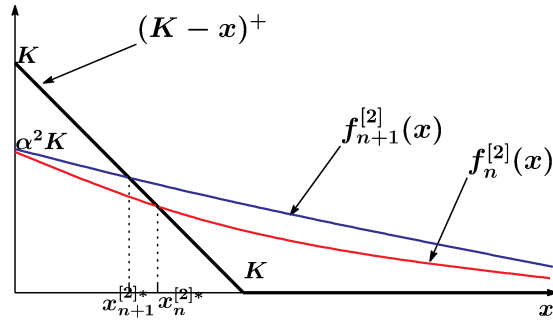
補題 2.1(i), (33) 式より $x_n^{[2]*}$ が存在し (図 5 参照), $\tau^{[2]*}$ は最適停止時刻となる. 更に, 補題 2.3 より, 全ての n について $x_{n+1}^{[2]*} \leq x_n^{[2]*}$ (図 6 参照). $\square$

前節の 1 回権利行使可能なアメリカン・プット・オプションの最適停止領域 $D^{[1]}$ と $D^{[2]}$ について, 次が成り立つ.

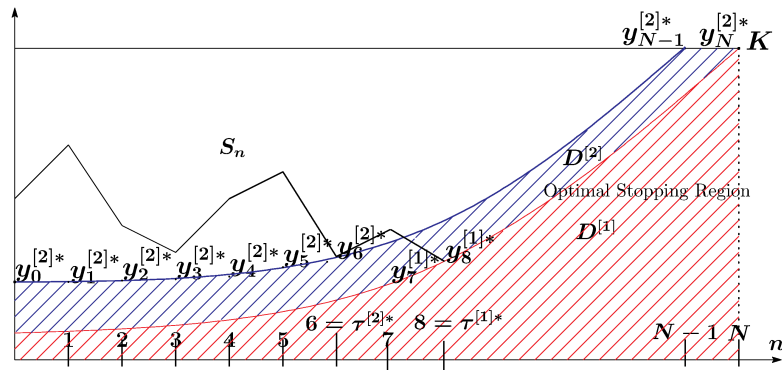
定理 2.2 最適停止領域 $D^{[1]}, D^{[2]}$ は以下を満たす.

$$D^{[1]} \subseteq D^{[2]}. \tag{34}$$

すなわち, 1 回目の最適停止時刻は原資産価格が最適停止領域 $D^{[2]}$ 内に初めて到達した時刻であり, 2

図 5: 閾値 $x_n^{[2]}$ 図 6: 閾値 $x_n^{[2]}$ と $x_{n+1}^{[2]}$ の順序

回目の最適停止時刻はその後 $D^{[1]}$ 内に初めて到達した時刻となる (図 7 参照).

図 7: 最適停止領域 $D^{[1]}$, $D^{[2]}$

(証明) $n = 1, \dots, N$ について

$$f_n^{[2]}(x) = \alpha \tilde{\mathbb{E}}_x [\Delta V_{n-1}^{[2]}(S_{n-1})] = \alpha \tilde{\mathbb{E}}_x [V_{n-1}^{[2]}(S_{n-1}) - V_{n-1}^{[1]}(S_{n-1})]. \quad (35)$$

(27) 式より,

$$\begin{aligned}
 f_n^{[2]}(x) &\leq \alpha \tilde{\mathbb{E}}_x \left[2V_{n-1}^{[1]}(S_{n-1}) - V_{n-1}^{[1]}(S_{n-1}) \right] \\
 &= \alpha \tilde{\mathbb{E}}_x \left[V_{n-1}^{[1]}(S_{n-1}) \right] \\
 &\leq \max\{(K-x)^+, \alpha \tilde{\mathbb{E}}_x \left[V_{n-1}^{[1]}(S_{n-1}) \right]\} = V_n^{[1]}(x).
 \end{aligned} \tag{36}$$

更に, $x_n^{[1]*} \leq x_n^{[2]*}$ より $D^{[1]} \subseteq D^{[2]}$ である (図8参照).

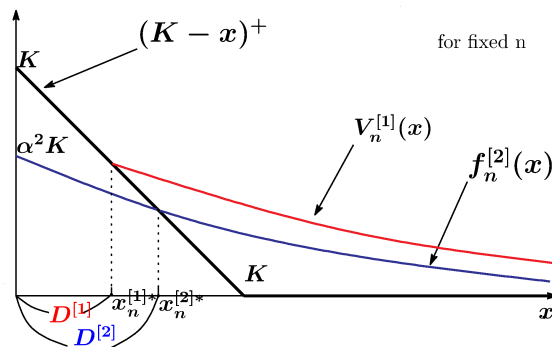


図 8: 最適停止領域 $D^{[1]}$, $D^{[2]}$

3. おわりに

多数回権利行使可能なオプションの最適停止問題も同様のアプローチで解くことができると思われる.

参考文献

- [1] 穴太克則, (2000), "タイミングの数理解—最適停止問題", 朝倉書店.
- [2] 穴太克則, (2014), "講義ノート: 数理ファイナンス", 芝浦工業大学大学院理工学研究科 システム理工学専攻 数理科学部門.
- [3] N. Meinshausen and B. M. Hambly, (2004), "Monte Carlo Methods for the Valuation of Multiple-Exercise Options", *Mathematical Finance*, Vol. 14, No. 4, 557-583.
- [4] G. Peskir and A. N. Shiryaev, (2006), *Optimal Stopping and Free-Boundary Problems*, Birkhauser.
- [5] A. N. Shiryaev, (1978), *Optimal Stopping Rules*, Springer.
- [6] A. N. Shiryaev, (1999), *Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory*, World Scientific Publishing.