

Hilbert space の unbounded vector について

九大 理 富 田 総

§ 1. 超関数論と作用素環

数学では超関数を Hilbert space 上の generalized vector として取扱っているが、それにも拘らず Hilbert 空間の unbounded vector の一般論を構成しようとする試みは余り見られないようである。しかしこの分野は将来の解析学的发展に重要な役割を果たすと思われるいろいろな問題を含んでいる。そのいくつかを下に述べよう。

(a). 超関数論で良く知られている基本的な問題の一つとして、二つの超関数の間に generalized inner product を定義する問題がある。また、このような generalized inner product が二種類以上導入されたとき、その間の compatibility が問題になる。一般に超関数はある Hilbert 空間の semiclosed vector にまで拡張されるので Hilbert 空間の問題としては如何にして semiclosed vector の間に generalized

inner product を導入するかという問題を研究しなければならない。

(b). (a)の問題と密接に関係しているがより困難な問題の一つとして二つの超関数の積を定義する問題, あるいは例えば $R^n \times R^n$ の超関数 A, B を *generalized integral operator* であると考えた積 AB を定義する問題がある。これは Hilbert 空間で *sesquilinear form* を *generalized operator* であると考えたその間に積を定義する問題であると考えることが出来る。

(c). 超関数を *generalized vector* として取扱うには Hilbert 空間の作用素に対して位相的にどのような行動をとるかを調べなければならない。その一つとして次の問題を考える。いま $L^2(R^n)$ 上の連続作用素 A で, A および A^* がともに $L^2(R^n)$ を *Schwartz space* $\mathcal{S}(R^n)$ の中にうつしているものとする。このときには A, A^* はともに超関数の空間 $\mathcal{S}'(R^n)$ を $L^2(R^n)$ の中にうつしている。このような作用素 A 全体は *nuclear *-algebra* $\mathcal{N}$ を作る。 $\mathcal{N}$ をある超関数とし, $\mathcal{N}$ を $\mathcal{N}$ の **-subalgebra* とする。このとき $\mathcal{N}$ から $L^2(R^n)$ への写像 $A \longrightarrow A\mathcal{N}$ が定義されるがこの写像が $\mathcal{N}$ の *operator norm* に関して *closable* であるとき $\mathcal{N}$ は $\mathcal{N}$ 上で *closable* であるという。もし $\mathcal{N}$ が可換ならば $\mathcal{N}$ は

$\mathcal{L}$ 上で closable であるが $\mathcal{L} = \mathcal{N}$ であれば f は closable ではない。 $\mathcal{L}$ を含む最小の von Neumann algebra を $M(\mathcal{L})$ とする。 f が closable になるための必要十分条件は

$$P(A^*A) = (Af | Af)$$

を満たす $M(\mathcal{L})$ の weight P が存在することである。 この理由によって unbounded vector の generalized inner product を研究するのに weight の研究が役に立つ。

(d). Hilbert 空間上の closed operator の積和として出来る operator は semiclosed operator になる。 Semiclosed operator に対してその closability, 可換性, その他を研究することによって V. Neumann 以来殆んど行われていない closed operator の基本的な性質の研究を精密化出来る可能性もある。

その他, Hilbert 空間の unbounded vector については基本的なものが多いところがあると思われるが, それは今後の研究の中から取上げられるだろう。 この note では特に (a) の問題を中心として取上げたい。

§2. Hilbert space の unbounded vector.

Hilbert space の入門書ではその初めの段階で必ず有

界でない linear operator の定義や性質を述べている。

その考え方の延長として Hilbert space $\mathcal{H}$ の上には必ずしも有界でない vector f を次のように定義するのは自然であろう。

$\mathcal{H}$ の linear subspace を domain とする conjugate linear functional f を $\mathcal{H}$ の vector という。 f の domain を $\mathcal{D}(f)$ であらわす。 $x \in \mathcal{D}(f)$ に対して $(f|x)$ は f が x にとる値を、 $\overline{(x|f)}$ は $(f|x)$ の complex conjugate をあらわす。 α を scalar, A を $\mathcal{H}$ の linear operator, f, g を $\mathcal{H}$ の vector とする。 $\alpha f, f+g$ は通常の数値の scalar 積, 和として定義され, $\mathcal{H}$ の vector をあらわす。

α を $\mathcal{H}$ の vector $A^{\#}f$ を次式で定義する。

$$(A^{\#}f | x) = (f | Ax)$$

但し, $\mathcal{D}(A^{\#}f) = A^{-1}\mathcal{D}(f)$ である。

$\mathcal{H}$ の linear subspace $\mathcal{M}$ に $\mathcal{H}$ の位相より強い locally convex topology が導入されているとき, $\mathcal{M}$ を $\mathcal{H}$ の topological linear subspace という。 そのうちで特に良く取扱われているのは Frechet subspace と L^2 subspace である。 但し, L^2 space の定義としては弱い意味のものを採用するにとらる。

Lemma 2.1. Hilbert space $\mathcal{H}$ の L^2 subspace に対して, その subspace を L^2 subspace にするよう位

相は唯一通りしかない。もし $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ が $\mathcal{E}$ の $\mathcal{LF}$ subspace で $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{N}$ ならば $\mathcal{N}$ の位相は $\mathcal{M}$ から induce される位相より強い。

Lemma 2.2. $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots$ を $\mathcal{E}$ の subspace とする。もしこれらが $\mathcal{E}$ の Frechet subspace ならば $\mathcal{M} + \mathcal{N}, \bigcap_n \mathcal{M}_n$ は Frechet subspace である。もしこれらが $\mathcal{E}$ の $\mathcal{LF}$ -subspace ならば $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}, \sum_n \mathcal{M}_n$ は $\mathcal{LF}$ -subspace である。

以上の Lemma の証明は非常に良く知られている。 $\mathcal{E}$ の linear operator A に対して、もし $\mathcal{D}(A)$ が $\mathcal{E}$ の Topological linear subspace で、 A が $\mathcal{D}(A)$ 上で連続であれば $\mathcal{D}(A)$ を A の Topological domain という。同様に $\mathcal{E}$ の vector f に対して、もし $\mathcal{D}(f)$ が $\mathcal{E}$ の Topological linear subspace で f が $\mathcal{D}(f)$ 上で連続であれば $\mathcal{D}(f)$ を f の Topological domain という。Frechet domain をもつ vector を Frechet vector, $\mathcal{LF}$ domain をもつ vector を $\mathcal{LF}$ -vector という。 $\mathcal{E}$ の Topological linear subspace $\mathcal{M}$ に対して、 $\mathcal{M}$ を Topological domain とする $\mathcal{E}$ の vector 全体を $\mathcal{M}^*$ であらわす。

Euclidean space R^n では R^n 上の超関数は nuclear $\mathcal{LF}$ domain $\mathcal{D}(R^n)$ をもつ $L^2(R^n)$ の vector である。

slowly increasing 正超関数は nuclear Frechet domain $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ をもつ $L^2(\mathbb{R}^n)$ の vector である。 f が $\mathcal{E}$ を Topological domain としてもつ vector ならば f は $\mathcal{E}$ の要素であると考ええる。従って $\mathcal{E}^* = \mathcal{E}$ である。

A を Hilbert space $\mathcal{H}$ 上の bounded linear operator とし、 A の range の閉包 $[R(A)]$ への $\mathcal{H}$ の射影を E_A であらわす。 A^* を $[R(A)]$ 上に制限したものは injective であるからその inverse を A° であらわし A の Polar operator という。

A, B を $\mathcal{H}$ の Hermitean operator ≥ 0 として新しい operator $A \vee B, A \wedge B$ を次のように導入する。

$$A \vee B = (A^2 + B^2)^{\frac{1}{2}}.$$

$A \wedge B$ を定義するには次の条件で定まる。

Hermitean operator $K, L \geq 0$ を考える。

$$A^2 = (A \vee B) K^2 (A \vee B).$$

$$B^2 = (A \vee B) L^2 (A \vee B).$$

$$K^2 + L^2 = E_{A \vee B}.$$

このとき、 $A \vee B$ は次のような operator ≥ 0 である。

$$A \wedge B = ((A \vee B) K^2 L^2 (A \vee B))^{\frac{1}{2}}.$$

定理 2.1. A を Hilbert space $\mathcal{H}$ の bounded linear operator とすれば $R(A)$ は $\mathcal{H}$ の Hilbert subspace で次の条件を満たす norm $\|x\|_A$ をもつ。

$$\|Ax\|_A = \|E_{A^*}x\|.$$

逆に $\mathcal{H}$ が $\mathcal{H}$ の Hilbert subspace $\mathcal{L}$ $\|\cdot\|_1$ が $\mathcal{H}$ の Hilbert norm であれば $\|x\|_1 = \|x\|_A$ を満たす Positive Hermitian operator A が唯一に定まる。

定理 2.2. $\mathcal{H}$ の Hilbert subspace $\mathcal{M}, \mathcal{N}$, それらの Hilbert norm を定める Positive Hermitian operator A, B とする。 $\mathcal{M} + \mathcal{N}$, $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ は Hilbert subspace である。 $A \vee B$ は $\mathcal{M} + \mathcal{N}$ の Hilbert norm $A \wedge B$ は $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ の Hilbert norm を定め、更に次の式を満たす。

$$\|x\|_{A \vee B} = \inf_{x=y+z} (\|y\|_A^2 + \|z\|_B^2)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\|x\|_{A \wedge B} = (\|x\|_A^2 + \|x\|_B^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Hilbert domain をもつ $\mathcal{H}$ の linear operator A を semiclosed operator, また Hilbert domain をもつ $\mathcal{H}$ の vector x を semiclosed vector という。

定理 2.3. Hilbert space $\mathcal{H}$ の linear operator A に対して次の 4 条件は同等である。

(a). A は Hilbert domain をもつ。

(b). A は $\mathcal{H}$ のある Hilbert subspace $\mathcal{D}(A)$ から他の Hilbert subspace $\mathcal{R}(A)$ への homomorphism である。

(c). A の graph $G(A)$ は $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ の Hilbert subspace である。

(d). A はいくつかの closed operator の積である。

定理 2.4. Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の semiclosed operator を A, B とすれば $A+B, AB$ は semiclosed である。さらに A が injective ならば A^{-1} も semiclosed である。

定理 2.5. $\mathcal{H}$ の semiclosed operator A の domain が $\mathcal{H}$ であれば A は $\mathcal{H}$ の bounded linear operator である。

定理 2.6. Hilbert space $\mathcal{H}$ の semiclosed operator を A , $\mathcal{H}$ の domain の一つの norm を定義する positive Hermitean operator を B とすれば A は次のようにあらわすことができる。

$$A = CB^{\circ}.$$

C は $C = CE_A$ をみたす bounded linear operator として唯一通りに定まる。

定理 2.7. f, g を semiclosed vector, α を scalar, A を semiclosed operator とすれば $\alpha f, f+g, A^{\#}f$ は semiclosed vector である。

定理 2.8. $\mathcal{H}$ の semiclosed vector f の domain が $\mathcal{H}$ であれば, f は $\mathcal{H}$ に属する。

定理 2.9. f を $\mathcal{H}$ の semiclosed vector, B を f の domain のある Hilbert norm を定義する positive Hermitean operator とすれば, f は次のようにあらわさ

れず。

$$f = B^\# x.$$

x は $x = E_A x$ をみたす x の要素として唯一通りに定まる。

§3. Hilbert subspace の同値関係。

$\mathcal{H}$ の Hilbert subspace 全体を $H(\mathcal{H})$ とすれば $H(\mathcal{H})$ は modular lattice である。 $H(\mathcal{H})$ の要素 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ に対して、もし、 $\mathcal{M} \wedge \mathcal{N}$ が $\mathcal{M}$ で稠密であれば $\mathcal{M} \leq \mathcal{N}$ 、あるいは $\mathcal{N} \leq \mathcal{M}$ であるという。 $\mathcal{M} \leq \mathcal{N}$ かつ $\mathcal{N} \leq \mathcal{M}$ であるとき $\mathcal{M}$ と $\mathcal{N}$ は同値であるといい $\mathcal{M} \sim \mathcal{N}$ であらわす。 残念ながら上の定義による同値は $H(\mathcal{H})$ の中では通常の意味の同値関係とはならないので $H(\mathcal{H})$ の適当な sublattice をとってその中での同値関係を議論することが必要となって来る。

Lemma 3.1. $\mathcal{H}$ の Hilbert subspace を $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{L}, \mathcal{M}_i, \mathcal{N}_i$ ($i=1, 2$) などとする。

(a). $\mathcal{M} \leq \mathcal{N}$ である為の必要十分条件は $\mathcal{M}$ が $\mathcal{M} + \mathcal{N}$ で稠密になることである。

(b). $\mathcal{M} \geq \mathcal{N} \geq \mathcal{L}$ で $\mathcal{M} \sim \mathcal{L}$ ならば $\mathcal{M} \sim \mathcal{N}$ 。 しかし、 $\mathcal{N} \sim \mathcal{L}$ は一般には成立しない。

(c). $\mathcal{M} \geq \mathcal{N} \geq \mathcal{L}$ で $\mathcal{M} \sim \mathcal{N}$ かつ $\mathcal{N} \sim \mathcal{L}$ ならば $\mathcal{M} \sim \mathcal{L}$ 。

(d). $m_1 \geq m_2, n_1 \geq n_2$ ならば

$$m_1 + n_1 \geq m_2 + n_2.$$

しかし $m_1 \wedge n_1 \geq m_2 \wedge n_2$ は必ずしも成立しない。

$\mathcal{O}$ を Hilbert space $\mathcal{H}$ の von Neumann algebra とする。

$H(\mathcal{O})$ で $\mathcal{O}$ の要素の値域全体の system をあらわすことにする。

定理 3.1. Hilbert 空間の von Neumann algebra $\mathcal{O}$ に対して, $H(\mathcal{O})$ は $H(\mathcal{H})$ の sublattice である。実際, いま, A を $\mathcal{O}$ の要素とすれば

$$R(A) = R((AA^*)^{\frac{1}{2}}).$$

従って, $H(\mathcal{O})$ は $\mathcal{O}$ に属する positive Hermitian operator の値域全体の集合となり, 定理 2.2 から直ちに定理 4.1 が出る。

定理 3.2. $\mathcal{O}$ が上の finite type von Neumann algebra であれば $H(\mathcal{O})$ の中で次の implication が成立する。

$$m \geq n, n \geq l \Rightarrow m \geq l.$$

$$m_1 \geq n_1, m_2 \geq n_2 \Rightarrow m_1 \wedge m_2 \geq n_1 \wedge n_2.$$

$$m \sim n, n \sim l \Rightarrow m \sim l.$$

定理 3.2 によって $\sim$ は $H(\mathcal{O})$ の同値関係になっている。

次に $\mathcal{H}$ の semiclosed operator の間の equivalence 及び

$\mathcal{H}$ の semiclosed vector 間の equivalence を次のように定義する。

$\mathcal{H}$ の semiclosed operator A, B は $\mathcal{L}(A) \supseteq \mathcal{L}(B)$ で A と B が $\mathcal{L}(A) \cap \mathcal{L}(B)$ 上で一致するとき $A \geq B$ であるという。また $A \geq B$ かつ $A \leq B$ であるとき $A \sim B$ であらわし、 A と B は同値であるという。同様にして、semiclosed vector f, g は $\mathcal{L}(f) \supseteq \mathcal{L}(g)$ で $\mathcal{L}(f) \cap \mathcal{L}(g)$ 上で f と g が一致するとき $f \geq g$ であるという。また $f \geq g$ かつ $g \geq f$ であるとき $f \sim g$ であらわし、 f と g は同値であるという。 f が g の拡張であれば $f \geq g$ であらわす。

$\mathcal{O}$ を Hilbert space $\mathcal{H}$ 上の von Neumann algebra とする。semiclosed vector f はその domain が $H(\mathcal{O})$ に属するとき $\mathcal{O}$ を base とするという。 $\mathcal{O}$ を base とする semiclosed vector 全体を $V(\mathcal{O})$ であらわす。

定理 3.3. $\mathcal{O}$ を finite type の von Neumann algebra とする。 f を densely defined $\pi \in V(\mathcal{O})$ の要素とあれば、 f に対して次の条件を満たす $\mathcal{H}$ の vector $f_{\mathcal{O}}$ が唯一に定まる。

- (a). $\mathcal{L}(f_{\mathcal{O}})$ は $H(\mathcal{O})$ の要素の union である。
- (b). $f \geq g \in V(\mathcal{O})$ ならば $f_{\mathcal{O}} \geq g$ 。
- (c). $\mathcal{L}(f_{\mathcal{O}}) \ni \pi \in H(\mathcal{O})$ ならば f の π への restriction

f は $V_{\mathcal{A}}$ に属し $f \geq g$ である。

定理 3.3 により, f と g が densely defined ならば $V(\mathcal{A})$ の要素であれば $f \sim g$ は $f_{\mathcal{A}} = g_{\mathcal{A}}$ に同等であることがわかる。

$\mathcal{A}$ を finite type von Neumann algebra とするとき, $\mathcal{A}$ を用いて densely defined ならば $V(\mathcal{A})$ の要素の間の generalized innerproduct を次のように定義することが出来る。 f , g を densely defined ならば $V(\mathcal{A})$ の要素とし, $\mathcal{A}(f) = R(A)$ とするある Hermitian operator $A \geq 0$ をとる。このとき,

$$(f|g)_{\mathcal{A}} = (A^{\#}f | (A^{-\#}g)_{\mathcal{A}}).$$

$(f|g)_{\mathcal{A}}$ は $A^{\#}f$ が $(A^{-\#}g)_{\mathcal{A}}$ の domain に含まれるとき, そのときに限って定義される。

定理 3.4. $\mathcal{A}$ を finite type von Neumann algebra とすれば generalized innerproduct $(f|g)_{\mathcal{A}}$ は次の性質をもつ。

(a). $(f|g)_{\mathcal{A}} = \overline{(g|f)_{\mathcal{A}}}$

(b). $(\alpha f|g)_{\mathcal{A}} = \alpha (f|g)_{\mathcal{A}},$

(c). $(f+g|h)_{\mathcal{A}} = (f|h)_{\mathcal{A}} + (g|h)_{\mathcal{A}}.$

d. $f_1 \sim f_2, g_1 \sim g_2$ ならば

$$(f_1|g_1)_{\mathcal{A}} = (f_2|g_2)_{\mathcal{A}}.$$

e. 任意の $\mathcal{A}$ に属する $\mathcal{A}'$ と可換な densely defined closed operator X に対して,

$$(f|g)_\alpha = (X^{*\#}f | X^{1\#}g)_\alpha.$$

定理 3.3 を可分 Hilbert space 上の可換 von Neumann algebra の場合に適用するために、直線 $\mathbb{R}$ 上のある有限測度 μ を用いて α に対する α の直積分表現 $\alpha = \int_{\oplus} \alpha(\lambda)$ を考える。 α は $\mathbb{R}$ 上の有界 μ -可測関数全体の algebra に表現される。

定理 3.4. $V(\alpha)$ の要素 f は $f(\lambda) \in \alpha(\lambda)$ となる $\mathbb{R}$ 上の可測関数全体に一致する。 $V(\alpha)$ の要素 f, g に対して $(f|g)_\alpha$ が定義されるのは $(f(\lambda)|g(\lambda))$ が $\mathbb{R}$ 上で積分可能な時に限る。 このとき、

$$(f|g)_\alpha = \int (f(\lambda)|g(\lambda)) d\mu(\lambda).$$

定理 3.4 によって定理 3.3 で導入した α の generalized inner product $(f|g)_\alpha$ は極めて自然な inner product の概念の拡張であることが分る。 しかし、この inner product が finite von Neumann algebra にだけしか適用されないことに問題がある。 この議論をより一般的な von Neumann algebra の場合に拡張するには、Section 1 の (c) において提起した問題を取扱う必要がある。 しかし、この方向から問題を取扱うには von Neumann algebra の weight に対する Radon Nikodym theorem を議論しなければならず、かなりの準備を必要とするので省略することに

にある。

§4. 超関数の間の *generalized innerproduct*.

$\mathscr{D}(R^n)$ 及び $\mathcal{E}(R^n)$ は Hilbert space $L^2(R^n)$ の *Topological linear subspace* であり, 良く知られているように $\mathcal{E}(R^n)$ はある可算個の $L^2(R^n)$ の Hilbert subspace の system Λ の *intersection* としてあらわされる。同様に $\mathscr{D}(R^n)$ も非可算個の Hilbert space の system Λ_0 の *intersection* としてあらわされる。これ等の空間の位相は Λ 及び Λ_0 によって定まる Hilbert norm の system によって導入される局所凸位相に一致している。従って, $L^2(R^n)$ の超関数は常に適当な *semiclosed vector* に拡張される。 $\mathcal{E}(R^n)$ の位相を定める Λ に属する Hilbert subspace としては有限階の閉微分作用素の値域に属しているもの, また, $\mathscr{D}(R^n)$ に対する Λ_0 に属する Hilbert subspace としては局所的に有限階であるような閉微分作用素をとる二とが出来る。そこでいま, Λ を $L^2(R^n)$ の稠密な定義域をもつ閉作用素の system とし, Λ から generate される von Neumann algebra を $\mathcal{H}(\mathcal{O}\mathcal{B})$ とする。 $\mathcal{H}(\mathcal{O}\mathcal{B})$ 元にも拡張出来るような超関数全体を $\mathscr{D}'(R^n, \Lambda)$ とすれば, もし $\mathcal{O}\mathcal{B}$ が有限 von Neumann

algebra であれば $\mathcal{A}'(R^n, \mathcal{L})$ の間に対しては矛盾のない generalized innerproduct を導入することが出来る。

例えば, $L^2(R^n)$ において R^n の運動, 平行移動と回転の組合せ) によって定義される unitary operator の群を G とすれば G から生成される von Neumann algebra は有限型であり, 従って $\mathcal{A}'(R^n, G)$ には G によって不変な generalized innerproduct が導入されることになる。他方, $L^2(R^n)$ 上の unitary group G_1 として $f(x) \rightarrow f(x+a)$, 及び $f(x) \rightarrow e^{iax} f(x)$ の両者から generate するものとすれば G_1 から generate される von Neumann algebra $\mathcal{A}$ は $L^2(R^n)$ 上の total operator algebra と一致し, $\mathcal{A}(R^n) = \mathcal{A}(R^n, G_1)$ である。この場合は $H(\mathcal{A}) = H(\frac{1}{2})$, $V(\mathcal{A}) = V(\frac{1}{2})$ となる。しかし, $V(\frac{1}{2})$ では equivalence $\sim$ を用いる semiclosed vector の拡張は一意的にならないので $\mathcal{A}(R^n)$ に対して G_1 により不変な generalized innerproduct を入れるのは無理であると考えられる。但し, 前節で考えた generalized innerproduct は equivalence だけを用いて定義したものであるから, その位相的な意味づけには別の研究が必要であろう。最後に, $\mathcal{E}(R^n)$ に対して次の定理を述べておこう。

定理 4.1. $\mathcal{E}(R^n)$ に対しては適当な可換な $L^2(R^n)$ 上

の non Neumann algebra $\mathcal{A}$ があって, 任意の $\varepsilon(R^n)$ の要素 ϕ は $V(\mathcal{A})$ の要素に拡大される. 従って定理 3.4 の適用によって $\mathcal{A}$ を base とする generalized inner product を $\varepsilon(R^n)$ の中に導入する事が出来る.

定理 4.1 の証明は Δ を R^n の Laplacian, $\|x\|$ で R^n の norm をあらわすものとし, 微分作用素

$$K = (\|x\|^2 + 1)(\Delta + 1)(\|x\|^2 + 1)$$

を考える. $\{K^{-n}\}$ は $\varepsilon(R^n)$ の Topology を定義する $L^2(R^n)$ の Positive Hermitian operator の列である. K によって generate される $L^2(R^n)$ の non Neumann algebra $\mathcal{A}$ は可換であり, 任意の $\varepsilon(R^n)'$ の要素は $V(\mathcal{A})$ の要素によって拡大される.