

分離正則性について

福岡教育大学

濃野聖晴

§1. 序.

D, G をそれぞれ複素空間 $\mathbb{C}^p, \mathbb{C}^q$ の領域とし, $E \subset D, F \subset G$, $X = (D \times F) \cup (E \times G)$ とする. $f(z, w)$ を X で定義された関数とし, $\{f_n(z, w)\}$, $\mathcal{F}$ をそれぞれ $D \times G$ で正則な関数列, 関数族とする. $H(D \times G)$ を $D \times G$ で正則な関数全体, $UC(D \times G)$ を $D \times G$ で広義一様収束する関数列全体, $N(D \times G)$ を $D \times G$ で正規族である関数族全体とする.

定義 1. 各 $w \in F$ ($z \in E$) に対し, $f(z, w)$ が $D(G)$ で正則であるとき, f は X で分離正則であるといひ, $f \in SH(X)$ と書く.

定義 2. 各 $w \in F$ ($z \in E$) に対し, $\{f_n(z, w)\}$ が $D(G)$ で広義一様収束するとき, $\{f_n\}$ は X で分離広義一様収束するといひ, $\{f_n\} \in SUC(X)$ と書く.

定義 3. 各 $w \in F$ ($z \in E$) に対し, $\mathcal{F}$ が $D(G)$ で正規族であるとき, $\mathcal{F}$ は X で分離正規であるといひ, $\mathcal{F} \in SN(X)$ と書く.

定義 1 に $E = D, F = G$ の場合,

$$“ f \in SH(X) \Rightarrow f \in H(D \times G) ”$$

が成立する。これは Hartogs の正則性定理として良く知られている。

1) 3. 定義 2, 3 にて, $p=q=1$, $E=D$, $F=G$ の場合,

$$\{f_n\} \in \text{SUC}(X) \Rightarrow \{f_n\} \in \text{UC}(D \times G)$$

$$f \in \text{SN}(X) \Rightarrow f \in \mathcal{N}(D \times G)$$

が成立する。これは T. Nishino [2] の結果である。次の問題は

M. Hukuhara [1] による、と差し出された問題である。

問題 H1: 定義 1 にて, $F=G$ の場合,

$$f \in \text{SH}(X) \Rightarrow f \in \mathcal{H}(D \times G)$$

なる $E \subset D$ を特徴付けよ。

この問題は T. Terada [5], [6] による、と解決された。次の問題は

J. Siciak [3] による、と差し出され、解決された。

問題 H2: 定義 1 にて,

$$f \in \text{SH}(X) \Rightarrow f \text{ は } X \text{ の近傍 } \Omega \text{ に接続出来る。}$$

なる $E \subset D$, $F \subset G$ を特徴付けよ。

定義 2, 3 に対しては問題 H1, H2 と類似の問題が考えられる。

問題 C1: 定義 2 にて, $F=G$ の場合,

$$\{f_n\} \in \text{SUC}(X) \Rightarrow \{f_n\} \in \text{UC}(D \times G)$$

なる $E \subset D$ を特徴付けよ。

問題 C2: 定義 2 において,

$$\{f_n\} \in \text{SUC}(X) \Rightarrow \exists \Omega : X \text{ の近傍 } ; \{f_n\} \in \text{UC}(\Omega)$$

なる $E \subset D$, $F \subset G$ を特徴付けよ。

問題 N1: 定義 3 の $F = G$ の場合

$$f \in SN(X) \Rightarrow f \in N(D, G)$$

なる $E \subset D$ を特徴付けよ。

問題 N2: 定義 3 において,

$$f \in SN(X) \Rightarrow \exists \Omega: X \text{ の近傍}, f \in N(\Omega).$$

なる $E \subset D$, $F \subset G$ を特徴付けよ。

問題 C1, N1 は T. Terada [6] によつて既に解決された。ここでは問題 C2, N2 について言及します。

§2. 定義.

$E \subset \mathbb{C}^2$, $a \in \mathbb{C}^2$ とする。各 $z \in E$ に対して $\sup_{P \in \mathcal{F}} |P(z)| < +\infty$

なる任意の多項式の族 $\mathcal{F}$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して,

$$|P(z)| \leq M e^{\varepsilon \deg P}, \quad |z - a| < \delta, \quad P \in \mathcal{F},$$

を満す定数 $M = M(a, \varepsilon) > 0$, $\delta = \delta(a, \varepsilon) > 0$ が存在するとき E は a で条件 (L) を満すという。任意の正数 r に対して, $E_r \equiv \{z \in E : |z - a| \leq r\}$ が a で (L) をみたすとき, E は a で条件 (L) をみたすという。 E が E の各点で条件 (L) をみたすとき $E \in (L)$ と書く。

G を $\mathbb{C}^2$ の領域とし, F を G のコンパクト集合とする。

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(G, F) \equiv \{u(w) : u(w) \text{ は } G \text{ で多項式調和関数, } F \text{ 上で } u(w) \leq 0, \\ G \text{ 上で } u(w) \leq 1 \}.$$

$$h_G(w, F) \equiv \lim_{w' \rightarrow w} \sup \{u(w') ; u \in \mathcal{M}\}, \quad w \in G.$$

とする。任意の α , $0 < \alpha < 1$ に対して, $G_\alpha \equiv \{w \in G ; h_G(w, F) < \alpha\}$ が $F \subset G_\alpha \subset G$ をみたすとき, (G, F) は条件 (A_0) を満たすといひ, $(G, F) \in (A_0)$ と書く。 $G_s \subset G$, $F \subset G_s \subset G_{s+1}$, $G = \bigcup_{s=1}^{\infty} G_s$, $(G_s, F) \in (A_0)$ を満たす領域の列 $\{G_s\}$ が存在するとき, (G, F) は条件 (A) を満たすといひ, $(G, F) \in (A)$ と書く。また $H_G(w, F) \equiv \lim_{s \rightarrow \infty} h_{G_s}(w, F)$, $\hat{F} = \hat{F}_G \equiv \{0 ; 0 \text{ は } G-F \text{ の連結成分, } 0 \subset G\}$ とする。

§3. Siciak の結果.

問題 H2 に関する Siciak の結果を紹介する。

定理 S.1. D を複素平面の領域とし, $E \subset D$ をコンパクト G を $\mathbb{C}^1$ の領域と, $F \subset G$ をコンパクト, $(G, F) \in (A)$ とする。

このとき, $f \in SH(X)$, $X \equiv (D \times F) \cup (E \times G)$ ならば,

$$(1) \quad \exists \hat{f} \in H(\Omega) ; \quad \hat{f}|_X = f, \quad \Omega \equiv \{(z, w) \in D \times G, H_D(z, E) + H_G(w, F) < 1\}.$$

(2) Ω は X の正則包である。

定理 S.2. D_k を複素平面の領域 ($k=1, \dots, n$) とし, $E_k \subset D_k$ を

$\partial E_k \in (\mathcal{L})$ なるコンパクト集合, $X = (D_1 \times E_2 \times \dots \times E_n) \cup \dots \cup (E_1 \times$

$\dots \times E_{n-1} \times D_n)$ とする。 $f \in SH(X)$ (すなわち, $(z_1, \dots, z_{k-1}, z_{k+1}, \dots, z_n)$

$\in E_1 \times \dots \times E_{k-1} \times E_{k+1} \times \dots \times E_n$ に対して f は D_k が正則, $k=1, \dots, n$)

ならば

1°) $\exists \tilde{f} \in H(\Omega); \tilde{f}|_X = f$, ただし

$$\Omega \equiv \{(z_1, \dots, z_n) \in D_1 \times \dots \times D_n; h_{D_1}(z_1, E_1) + \dots + h_{D_n}(z_n, E_n) < 1\}$$

2°) Ω は X の正則包である。

(注) この講演後に判明した事があるが, 定理 S.1. において D が複素空間 $\mathbb{C}^p$ ($p \geq 1$) の場合に Siciak [4] により, 2 問題 H2 は解決されている。

§4. 問題 C2, N2 について.

定理 1. D を複素平面の領域とし, $E \subset D$ をコンパクト, G を複素空間 $\mathbb{C}^2$ の領域, $F \subset G$ をコンパクトで $(G, F) \in (A)$ をみたすものとする。このとき $\{f_n(z, w)\} \in SUC(X)$, $X = (D \times F) \cup (E \times G)$ ならば

1°) $\{f_n\} \in UC(\Omega)$, $\Omega \equiv \{(z, w) \in D \times G; H_D(z, E) + H_G(w, F) < 1\}$.

2°) Ω は X の正則包である。

定理 2. D_k を複素平面の領域 ($k=1, \dots, m$) とし, $E_k \subset D_k$ を $\partial \hat{E}_k \in (A)$ なるコンパクト集合, $X = (D_1 \times E_2 \times \dots \times E_m) \cup \dots \cup (E_1 \times \dots \times E_{m-1} \times D_m)$ とする。 $\{f_n(z)\} = \{f_n(z_1, \dots, z_m)\} \in SUC(X)$ (すなわち, $(z_1, \dots, z_{k-1}, z_{k+1}, \dots, z_m) \in E_1 \times \dots \times E_{k-1} \times E_{k+1} \times \dots \times E_m$

に對して, $\{f_m(z)\}$ は D で広義一様収束する。 ($k=1, \dots, m$) ならば

1°) $\{f_m\} \in UC(\Omega)$. 且 $\Omega \equiv \{z \in D_1 \times \dots \times D_m; h_{D_1}(z_1, E_1) + \dots + h_{D_m}(z_m, E_m) < 1\}$.

2°) Ω は X の正則包である。

定理3. D, E, G, F, X は定理1のものとする。 $\mathcal{F} \in SN(X)$ ならば次が成り立つ。

1°) $\mathcal{F} \in N(\Omega)$, $\Omega \equiv \{(z, w) \in D \times G; H_D(z, E) + H_G(w, F) < 1\}$

2°) Ω は X の正則包である。

定理4. D_b, E_b ($b=1, \dots, m$) X は定理2のものとする。
 $\mathcal{F} \in SN(X)$ ならば、次が成り立つ。

1°) $\mathcal{F} \in N(\Omega)$, $\Omega \equiv \{z \in D_1 \times \dots \times D_m; h_{D_1}(z_1, E_1) + \dots + h_{D_m}(z_m, E_m) < 1\}$.

2°) Ω は X の正則包である。

定理1 ~ 4 の証明の概略.

補題1. D を複素空間 $\mathbb{C}^m$ の領域とし, $E \subset D$ を $E \in (L)$ なるコンパクト集合, $\{f_m(z)\}$ を D で正則な関数列を局所一様有界で, E 上で収束するものとする。このとき, $\{f_m\}$ は D で広義一様収束する。

この補題は次の一致の定理を使うことによつて、普通の Vitali の定理と同様に示される。

補題2. D, E は補題1のものとする。 $f \in H(D)$ のとき、

$$f \equiv 0 \quad (z \in E) \implies f \equiv 0 \quad (z \in D).$$

定理1は定理5.1を用いられた正則関数の補間多項式近似とバーユの定理を使い、補題1の形にも、さうして証明される。

補題3. D, E, G, F, X は定理1のものとする。 $f \in SN(X)$ ならば、 f の中の任意の関数列 $\{f_n\}$ に対し、その部分列 $\{f_{n_k}\}$ で $\{f_{n_k}\} \in SUC(X)$ なるものが存在する。

この補題は補題1と対角線論法を使うことによつて示される。そこで、定理3は補題3と定理1を使うことによつて示される。また、定理2.4は数学的帰納法より示される。

文 献

- [1] M. Hukuhara, L'extensions du theoreme d'Osgood et de Hartogs, Kansu-hotetsiki oyobi Oyo-kaiseki (1930) P. 48.
- [2] T. Nishino, Sur une propriete des familles de fonctions analytiques de deux variables complexes, J. Math. Kyoto Univ. 4 (1965) 255-282.
- [3] J. Siciak, Separately analytic functions and envelopes of holomorphy of some lower dimensional subsets of $\mathbb{C}^n$. Ann. Pol. Mat. 22 (1959) 145-171.

- [4] J. Siciak, *Extremal plurisubharmonic functions in $\mathbb{C}^N$* , *Ann Pol. Mat.* 39. (1981) 175-211.
- [5] T. Terada, *Sur une certaine condition sous laquelle une fonction de plusieurs variables complexes est holomorphe*. *Publ. of Reser. Inst. for Math. Sci.* Vol. 2 (3) (1967) 383-395.
- [6] T. Terada, *Analyticité relatives à chaque variable*, *J. Math. Kyoto Univ.* 12 (2) (1972) 263-296.
- [7] K. Nôno, *Normality of Separately Normal Families*, *Bull. Fukuoka Univ. of Edu.* 31 (3) 13-17 (1981).