

Symplectic 表現と保型関数^{*)}

東大 理 弥 永 健 一

§ 1 序

Hermitian vector space から alternating vector space へのある自然な対応づけがあり、それを使って (I)-型の有界対称領域上の保型関数と、Siegel space 上のそれとの間の関係を得ることができる。

今 K を総実代数体, $K = k(\sqrt{d})$ を総虚な k の二次拡大体とし, σ を K/k 上の Galois 群の生成元, V を K 上のベクトル空間, H を V 上の non-degenerate, indefinite な Hermite 形式とする。(i.e. H は $H(x, y) = H(y, x)^\sigma$ なる sesqui-linear form on V で条件を満たすもの。)

外積 $\wedge^r$ は Hermitian vector space (V, H) から $(\wedge^r V, \wedge^r H)$ への Hermitian vector space への対応を与える。ただし,

$$\begin{aligned} \wedge^r H(x_1 \wedge \cdots \wedge x_r, y_1 \wedge \cdots \wedge y_r) &= \det(H(x_i, y_j)), \\ x_i, y_j &\in V. \end{aligned}$$

^{*)} 本文の内容は、引用論文 [1] の一部に若干手を加えたものである。

今 (V, H) から alternating vector space (V', A') への次のような対応づけ $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{K/\mathbb{R}}$ を定める:

1) V' は K 上 vector space V を $\mathbb{R}$ 上 vector space とみなしたものである。

$$2) \quad A'(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x}} (H(x, y) - H(y, x)), \quad x, y \in V.$$

(A' の x への depend については, 今は本質的でない。)

さて, ここで functor $\mathcal{R} \circ \Lambda^r$ を考えると, これは

$$\rho: SU(V, H) \rightarrow Sp(V', A'), \quad (V' = \Lambda^r V)$$

なる symplectic 表現 ρ を定める。 ($\rho = \mathcal{R} \circ \Lambda^r$ と書く。)

$\mathcal{D}$ は (I)-型の domain $(\mathcal{R}_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}}(G))_{\mathbb{R}}/K$, $\mathcal{D}'$ は Siegel space $(\mathcal{R}_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}}(G'))_{\mathbb{R}}/K'$ とすると ρ は $\mathcal{D}$ から $\mathcal{D}'$ への holomorphic imbedding を induce する。(ただし, $G = SU(V, H)$, $G' = Sp(V', A')$, K は Lie 群 $(\mathcal{R}_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}}(G))_{\mathbb{R}}$ の maximal compact 部分群, K' は $\rho(K)$ を含むような $(\mathcal{R}_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}}(G'))_{\mathbb{R}}$ の maximal compact 部分群である。今 $(\mathcal{R}_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}}(G))_{\mathbb{R}} \cong \prod_{i=1}^d SU(p_i, q_i)$, それに依りて $\mathcal{R}_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}}(G') \cong \prod_{i=1}^d G'_i$ とかけるが, 上の $\rho = \mathcal{R} \circ \Lambda^r$ で, $r=1$ if $\min(p_i, q_i) > 1$ for an i とする。) (cf. 佐武 [2]).

ここで, L を, K の整数環 $\mathcal{O}_K$ 上の V の中の lattice とし, $L' = \mathcal{R} \circ \Lambda^r(L)$ を, V' と $\Lambda^r V$ の identification によって V' の中の, $\mathbb{R}$ の整数環 $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ 上への lattice とする。

今 $G_L = \{g \in G \mid gL = L\}$, G'_L も同様に定義すると, 上の表

写像 ρ によって G_L は G'_L の中にうつされる。従って D' 上の G'_L に属する保型関数を $\rho(D)$ に制限すれば、 D 上の G_L に属する保型関数が得られるが、このようにして得られるものは後者の体 $F(D, G_L)$ の中の部分体 F' をなす。この二つの体の間の関係を求めることが目的である。

例。 $k = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$, $\rho = \mathbb{R}$ とおく。

$G_R = SU(p, q)$, $G'_R = Sp(n, \mathbb{R})$ ($n = p + q$) だが、 K, K' を普通のようにとれば、 $D = \{X \in M_{p,q}(\mathbb{C}) \mid I^{-t} \bar{X} X \gg 0\}$, $D' = \{Z \in M(n, \mathbb{C}) \mid {}^t Z = Z, 1 - \bar{Z} Z \gg 0\}$ と表わせる。このとき、

$$\rho: D \ni X \longrightarrow \left(\begin{array}{c|c} \overset{p}{\text{---}} & \overset{q}{\text{---}} \\ \hline 0 & X \\ \hline {}^t \bar{X} & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \in D', \quad \text{となり, 後に述べるように, もしも } n \text{ が奇数ならば, 上の二つの体は一致する。}$$

即ちこのとき D 上の G_L に属する保型関数は、いつも $\text{imbedding } \rho$ によって、 D' 上の G'_L に属する保型関数に延長できるのである。

§ 2. 一般の D, D' について。

問題を解くための鍵となるいくつかの一般的命題がある。

Prop. 1. k を有限次代数体, V, W を k 上の有限次元ベクトル空間。

ル空間, L, M はそれぞれ V, W の $\mathcal{O}_K$ -lattice とする。 G を $GL(V)_K$ の 右-上 定義された algebraic subgroup, p を $G \rightarrow GL(W)_K$ への 右-上 定義された rational homo. とし, 次の三つの仮定をする:

- i) G_L は G_K の maximal arithmetic subgroup.
- ii) $p(G_L) \subset GL(W)_M$
- iii) $\text{Ker } p \subset G_L$.

このとき, $p(G_L) = p(G)_M$ が成り立つ。 [1]

証明は $p(G_L)$ が $p(G)_K$ の arithmetic subgroup であることを使えば容易である。特に §1 のように $G = SU(V, H)$ の場合には, $\Lambda^r(G_L) = \Lambda^r G_K \cap \Lambda^r SL(V)_L$ 及び $SL(V)_L$ の極大性に注意すれば上の命題によって $\Lambda^r(G_L) = (\Lambda^r G)_{\Lambda^r L}$ が成り立つ。

Prop. 2. G, G' を real algebraic groups, $p: G \rightarrow G'$ を rational homo., G, G' は リー群として半単純で, K, K' をそれぞれ G, G' の maximal compact subgroup とし, $p(K) \subset K'$, 従って, $p: D = G/K \rightarrow D' = G'/K'$ が考えられる。そこで, 今 G を連結, compact factor を持たないものとするとき次のことが成り立つ。

もしも, G' の元 g' が,

$$g'(p(z)) = p(z), \quad \forall z \in D$$

と充せば, 実は

$$g' \cdot p(g) = p(g) \cdot g', \quad \forall g \in G.$$

証明は省略するが, compact リー群の半単純部分群は再び compact になるというこゝを便之は容易である。

定義: Prop. 2 の状況の時, (ただし, G の連結性, non-compact factor は仮定しない。) 次の定義とする。

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \mathcal{Z}(p(D)) = \{g' \in G' \mid g'p(z) = p(z), \forall z \in D\}, \\ \mathcal{N} &= \mathcal{N}(p(D)) = \{g' \in G' \mid g'(p(D)) = p(D)\}. \end{aligned}$$

定理 (I. Satake) K を有限次代数体, G を K 上定義された連結, 絶対単純代数群, Γ を G_K の arithmetic subgroup とし, K を $(\mathcal{R}_{K/\mathbb{Q}} G)_\mathbb{R}$ の極大 compact 部分群で, $D = (\mathcal{R}_{K/\mathbb{Q}} G)_\mathbb{R} / K$ は有界対称領域の構造を持つと仮定する。 G', Γ', K' etc. を同上とし, $p: G \rightarrow G'$ を K 上定義された rational homo. で, $p(\Gamma) \subset \Gamma'$, しかも $p: D \rightarrow D'$ なる holom. imbedding を induce しているものとする。

今 $F =$ the field of autom. func. on D w.r.t. Γ ,

F' = the subfield of F consisting of those elements which can be extended to autom. func. on D' w.r.t. Γ' .

とすると, もしも $\dim G > 3$ のときには, F は F' の有限次拡大であり,

$$[F:F'] = [\Gamma' \cap \mathcal{N} : \rho(\Gamma) \cdot (\Gamma' \cap \mathcal{Z})],$$

しかも, もし $\Gamma' \cap \mathcal{N} \supset \rho(\Gamma) \cdot (\Gamma' \cap \mathcal{Z})$ ならば, F/F' はガロア拡大, そのガロア群は $\Gamma' \cap \mathcal{N} / \rho(\Gamma) \cdot (\Gamma' \cap \mathcal{Z})$ と同型になる. [3].

§3. 結果.

Notations は §1 と同様. ただし, $n = \dim V \geq 3$ とし,

$(\mathcal{O}_{\mathbb{C}/\mathbb{Q}}(G))_{\mathbb{R}}$ は compact factor を含まないものとする.

今 D の holom. automorphisms を作る群 $\text{Aut}(D)$ をとると, $[\text{Aut}(D) : \text{Aut}(D)^{\circ}] \leq 2$ が知られてゐるが,

$\mathcal{N}^{\circ} = \mathcal{N} \cap \text{Aut}(D)^{\circ}$ と書くことにする. (§1, 例) において, $\rho \neq \rho^{\circ}$ ならば $\text{Aut } D = \text{Aut } D^{\circ}$ である.)

$K^{\sigma_1}, \dots, K^{\sigma_d}$ を K の共役体, $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$ とすると, 次の結果が得られる.

定理. $\mathcal{N}_{L'}^{\circ} = \mathcal{N}^{\circ} \cap G_{L'}$ によって一意的に定まる, $K^{\sigma_i}(\zeta_n)$ の Kummer 拡大体 K_i' があって, ($i=1, \dots, d$) 次のような

exact sequence が得られる:

$$1 \rightarrow \rho(G_L) \cdot \mathcal{Z}_L \rightarrow \mathcal{N}_L^0 \rightarrow \prod_{i=1}^d H^1(g(K'_i/K^{\sigma_i}), (\zeta_n)).$$

ただし $g(K'_i/K^{\sigma_i})$ は K'_i/K^{σ_i} のガロア群で, ζ_n の生成する群 (ζ_n) に自然に作用している。

もしも $K = \mathbb{Q}$, $(r, n) = 1$ のときには, 更に

$$1 \rightarrow \rho(G_L) \cdot \mathcal{Z}_L \rightarrow \mathcal{N}_L^0 \rightarrow H^1(g, (\zeta_m))$$

という exact sequence が得られる。ここで

$$g = g(K(\zeta_{\varepsilon(n)})/K), \quad \varepsilon = K \text{ の単数 } n \text{ 数},$$

$$(\zeta_m) = (\zeta_n) \cap K(\zeta_{\varepsilon(n)}).$$

ここで, 更に, $(n, \varepsilon) = 1$, K の discriminant が -4 ま

たは $-p$ (p は奇素数) のときには, $\mathcal{N}_L^0 = \mathcal{N}_L$,

$$H^1(g, (\zeta_m)) = \{1\}$$

が成り立つ。[1].

系. もしも $\mathcal{N}_L^0 = \mathcal{N}_L$ ならば, §2 で定義された体 F は部分体 F' の有限次アーベル拡大であり, そのガロア群は $\prod_{i=1}^d H^1(g(K'_i/K^{\sigma_i}), (\zeta_n))$ の部分群に同型である。

特に $K = \mathbb{Q}$, K の discriminant が -4 または $-p$ で, かつ $(n, \varepsilon) = (r, n) = 1$ のときには $F = F'$.

K'_i をどう定めるかについて説明しよう。簡単のため, $\alpha = 1$, 即ち $K = \mathbb{Q}$ とする。今, commutative diagram

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{\tilde{p}=\Lambda^r} & \tilde{G}=U(\Lambda^r V, \Lambda^r H) \\
 \searrow p & & \swarrow p'=\pi \\
 & G' &
 \end{array}$$

を考える。 §2, Prop. 2 より

$$\mathcal{Z} = \{ p'(\alpha 1) \mid \alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| = 1 \}.$$

$$\text{今, } \mathcal{N}^0 = \mathcal{Z} \cdot p(G_{\mathbb{R}}) = \{ p'(\alpha \tilde{p}(g)) \mid g \in G_{\mathbb{R}} \}$$

となる。 V の K 上の basis を一つめいたときには $g \in GL(V)$
 $= GL(n, K)$ として $g = (g_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ とあらわし, K' として,

$$K' = K(\zeta_n, g_{ij} \text{ s.t. } \exists \alpha \in \mathbb{C}, p'(\alpha \tilde{p}(g)) \in \mathcal{N}_{L'}^0)$$

とすると, K' が $K(\zeta_n)$ の Kummer 拡大になることを証明することができる。 [1].

(注意) 上に引用した [1] の Theorem 2.10 の中の '条件 C' は,
 §2, Prop. 2 によって不要となる。

§4. $H^1(g, (\zeta_n))$ について。

上のように, $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$, (ζ_n) は ζ_n によって生成される群とする。 さらに K をかつてな代数体とすると,
 $K^{(n)} = K(\zeta_n)$ と書き, $g(K'/K)$ をガロア拡大 K'/K のガ

ロブ群とする。 $d(K)$ = discriminant of K , U_K^1 = the roots of 1 in K とする。このとき, K を二次体とすると,

$$\mathbb{Q}^{(n)} \supset K \iff d(K) \mid n.$$

を使うと, もしも $d(K) = -4$ or $-p$ ならば,

$$U_{K^{(n)}}' = U_K' \cdot U_{\mathbb{Q}^{(n)}}'$$

が成り立つ。問題のコホモロジ一群の決定のために, これが重要なポイントになる。 K を $d(K) = -4$ or $-p$ のような虚二次体とし, $\varepsilon = K$ の単数群とするとときに次のことが成り立つ。[1].

Prop. A を 1 の根から成る有限群で, その上に $g(K^{(n)}/K)$ が作用してゐるものとする。もしも, $(|A|, \varepsilon) = 1$ なら

$$H^1(g(K^{(n)}/K), A) = \{1\}.$$

(注意) 上で, $(|A|, \varepsilon)$ が 1 でないときにはコホモロジ一群は一般に trivial ではない。しかもその構造は, K の単数群と密接な関係を持っている。また, $d(K)$ が一般のときには, 上記のような $U_{K^{(n)}}'$ の分解は得られないので問題はより困難になる。

References

1. K. Iyanaga, Arithmetic of special unitary groups and their symplectic representations, dissertation for Ph. D. in the University of Chicago, 1967
2. I. Satake, Holomorphic imbeddings of symmetric domains into a Siegel space, Amer. J. Math., 87(1964), 425-461.
3. ———, Introduction to automorphic forms, mimeographed notes of the lectures at University of Chicago, 1967.