

Complete intersections with intermediate Picard number 1 defined over a number field.

東大. 理 寺松 友希

§0. Introduction.

$\bar{k}$ を代数閉体, X を $\bar{k}$ の projective smooth な多様体 X を $\bar{k}$ の標数とは異なる素数とする。 n の時, X の codimension i の Chow group から, $2i$ 次の étale cohomology への cycle map が定義される。
(SGA 4½ P143. Milne [4] P275)

$$cl: CH^i(\bar{X}) \otimes \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow H_{\text{ét}}^{2i}(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell)$$

これは homomorphism の image を algebraic cycle の空間と呼び, $C_\ell^i(\bar{X})$ と書く。 $\dim_{\mathbb{Q}_\ell}(C_\ell^i(\bar{X}))$ は, ℓ に independent である事が一般に期待されているが, $\bar{k}$ の標数が 0 の時には classical cohomology との comparison theorem によって ℓ に依らない事がわかる。以下標数が 0 の時には, n の次元を $P^i(\bar{X})$ と書く。

さて, X が P^{n+d} の中 d 個の hypersurface の non-singular な complete intersection (以下単に X を complete intersection と呼ぶ。)の時ならば,

n が odd の時 1 は,

$$p^i(X) = 1 \quad (0 \leq i \leq n)$$

n が even の時 1 は,

$$p^i(X) \begin{cases} = 1 & (0 \leq i \leq n, i \neq \frac{n}{2}) \\ \geq 1 & (i = \frac{n}{2}) \end{cases}$$

となる事だ. Weak Lefschetz Theorem から示される. 今から問題にする事は,

偶数次元 $2n$ の complete intersection $\bar{X}$ であって,

$$p^n(\bar{X}) = 1 \quad \text{となるものが存在するか.}$$

という事である.

定義 $d \geq 1$, $\underline{a} = (a_1, \dots, a_d)$ ($a_i \geq 2$, $i=1, \dots, d$) なる時 $\mathbb{P}^{n+d}$ の smooth closed subvariety $\bar{X}$ が type $(n; \underline{a})$ の complete intersection であるとは, $\bar{X}$ が a_1 次 $\dots$ a_d 次の hypersurface の complete intersection となることである.

元来あげた問題に関して, 次の Deligne の定理がある.

Theorem 1 (SGA 7_{II} XIX).

$n, d \geq 1$, $\underline{a} = (a_1, \dots, a_d)$ が与えらる.

(*) $\dots (2n; a_1, \dots, a_d) \neq (2; 3), (2n; 2), (2n; 2, 2)$

とする。この時、 $\text{type } (2n; a_1, \dots, a_d)$ の complete intersection で generic なる $\bar{X}$ (すなわち、定義方程式の係数が素体上に互いに代数的に独立なるもの) は、 $\dim_{\mathbb{Q}_\ell}(C_\ell^i(\bar{X})) = 1$ を満たす。

ここを出発点として、次の様な問題を考える事ができる。

問題：上の定理の結論が成り立つ X として、

(X を体 K 上の代数多様体とした時に、 $\bar{X} = X \times_{\mathbb{Q}_\ell} \bar{K}$ と書く事にする。) $\mathbb{Q}$ 上定義されたものが存在するか。

ここでは上の問題が肯定的に解決できた事を報告する。

Theorem 2.

$(2n; \mathbb{Q})$ に関する仮定は Theorem 1 の (*) と同じであるとする。この時、 $\mathbb{Q}$ 上定義された、

$\text{type } (2n; \mathbb{Q})$ の complete intersection X が存在して、 $P^i(\bar{X}) = 1$ を満たす。

上の問いは、塩田先生によつて問題にされたものである。また、加藤、織田の両氏、塩田先生から、貴重な助言を頂いた事をここに明記します。(これについては、§1と、最後の Remark を見て下さい。)

§1. Hilbert の 既約性定理と 近似定理

ここでは Hilbert の既約性定理を使つて、基本群を Galois 群によつて近似する事を考える。(この section は、加藤和也氏の idea によるものです。)

Theorem 3 (Hilbert の 既約性定理)

$\mathbb{Q}[t, x] \ni f(t, x)$ が、 x に関して $\mathbb{Q}(t)$ 上の既約多項式とする。この時、 $\{t_i\}_{i=1,2,\dots}$, $t_i \in \mathbb{Q}$ が存在して、 $f(t_i, x)$ は、 $f(t, x)$ の x に関する次数と同じ次数の $\mathbb{Q}$ 上の既約多項式となる。(cf. Lang [3] p48 Cor 3)

この定理を基礎にして次の定理を証明する。

Theorem 4

G を $GL(n, \mathbb{Q}_\ell)$ の部分連続 Lie group, $\mathbb{Q}(t) \supset A$ を $\mathbb{Q}$ 上有限生成な環で, $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{Q}(t)$ と仮定する。 $\text{Spec } A$ の generic geometric point $\bar{\eta}$ を fix する。
 以下に Γ の連続全射準同型 φ が与えられるといえる。

$$\varphi: \pi_1(\text{Spec } A, \bar{\eta}) \longrightarrow G$$

この時, $\text{Spec } A$ の $\mathbb{Q}$ rational point の無限列 $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ が存在して, Γ の diagram において φ_i は全射となる。(これは $\bar{\eta}$ と t_i の geometric point $\bar{t}_i$ を結ぶ path, i.e. $\bar{t}_i$ における A の strictly henselization の $\bar{\eta}$ の関数体への埋め込み.)

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\text{Spec } A, \bar{\eta}) & \xrightarrow{\varphi} & G \\ \uparrow \gamma & & \nearrow \varphi_i \\ \pi_1(\text{Spec } A, \bar{t}_i) & & \\ \uparrow & & \\ \pi_1(t_i, \bar{t}_i) = \text{Gal}(\kappa(\bar{t}_i)/\kappa(t_i)) & & \end{array}$$

(注意) φ_i が全射か否かは, path γ のとり方に依らない。

Proof. G は連続 Lie group であるから, Γ のような性質を持つ G の filtration が存在する。

$$G \supset G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_n \supset \cdots$$

$\cap G_n = 0$, G_i ($i \geq 0$) は G の compact open subgroup.
 I は $\mathbb{Z}$ の十分大きな i に対して $\langle x^i \mid x \in G_i \rangle \subset G_{i+1}$
で $\overline{[G_i, G_i]} \subset G_{i+1}$, $G_{i+1} \triangleleft G_i$ が成り立つ. G_i の
元 x に対して F の準同型を induce して同型にな
る.

$$\begin{aligned} G_i / G_{i+1} &\longrightarrow G_{i+1} / G_{i+2} \\ [x] &\longmapsto [x^2] \end{aligned}$$

定理の仮定のもとで G は compact T_0 から
 G/G_i ($i \gg 0$) は有限群で $(i$ は十分大きなものを
fix.) への代表系を G 内にとれば、それは
 G を生成する。ここで $\varphi^{-1}(G_i)$ は $\pi_1(\text{Spec } A, \bar{\eta})$ の
open subgroup でこれは $\text{Spec } A$ の finite étale Galois
covering $\text{Spec } B$ に対応する。 $\mathbb{Q}(B)$ の $\mathbb{Q}(t)$ 上の生
成元 y を A 上の整元かつ $\mathbb{Q}[t]$ 上でも整元にな
る様にとる。 y の定義方程式は Y に関す
る $\mathbb{Q}[t]$ 係数 monic で $\mathbb{Q}(t)$ 上既約である。これを

$$Y^m + a_1(t)Y^{m-1} + \dots + a_m(t) = 0 \dots\dots (**)$$

とおく。

今 $t_0 \in \mathbb{Q}$ を $(t-t_0) \in \text{Spec } A$ なる様にと、 T 時
 $(t-t_0)$ の B での分解 P を定めることに、下の
自然な写像が考えられる。

$$\mathrm{Aut}(B/A) \cong \pi_1(\mathrm{Spec} A, \bar{\eta}) / \pi_1(\mathrm{Spec} B, \bar{\eta})$$

$$\uparrow \gamma|_B$$

$$\mathrm{Aut}((B/p)/(A/(t-t_0))) \cong \pi_1(\mathrm{Spec}(A/(t-t_0)), \bar{\tau}_0) / \pi_1(\mathrm{Spec}(B/p), \bar{\tau}_0)$$

しかも $\gamma|_B$ は、ある $\bar{\tau}_0$ から $\bar{\eta}$ への path から induce したものである。

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gal}((B/p)/(A/(t-t_0))) & \xrightarrow{\gamma|_B} & \mathrm{Aut}(B/A) \\ \cong \tilde{G}_i & \searrow & \downarrow \\ & & G/G_i \end{array}$$

だから定理を示すのには、 $\tilde{G}_i$ の surjectivity が
 言えれば良いが、それは $\gamma|_B$ が surjective である
 ことが十分である。故に無限個の $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ($t_i \in \mathbb{Q}$)
 (*) が既約、かつ $A/A(t-t_i) = \mathbb{Q}$
 とおけばよい。しか $\mathrm{Spec} A$ は $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$ から有限個
 の closed point を除いたものに他ならないから、
 二つの族 $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ は、Hilbert の既約性定理から
 存在する。 QED.

§ 2. Vanishing Cycle についての Deligne の結果.

$Y \subset \mathbb{P}^N$ を代数閉体 k 上の smooth projective variety,
 k は標数 p と素数 l とを素数とする。上の embedding

に $\mathcal{F}$, $\mathcal{Z}$, projective linear system $\text{Proj}(H^0(Y, \mathcal{O}(1)))$ を
 考えよ。その各点 p は、 $\mathbb{P}^N$ の hyperplane H_p に
 対応する。 $\text{Proj}(H^0(Y, \mathcal{O}(1)))$ の line D を Lefschetz pencil
 $\{Y \cap H_t\}_{t \in D}$ を定めよ。

(1) $H_0 \cap H_\infty$ は Y と transversal に交わる

$$(2) \tilde{Y} = \{(y, t) \in Y \times D \mid H_t \ni y\} \xrightarrow{\text{pr}_2} D$$

は、 D の closed pt の有限集合 S 以外で、

smooth で、 $s \in S$ に対し、 $Y_s = Y \cap H_s$ は、高々 1

つの孤立特異点のみを持ち、 $\tilde{Y} - \{y_s\}_{s \in S} \xrightarrow{\text{pr}_2} D$
 は smooth。

(3) $\tilde{Y} \ni (y_s, s)$ において、 pr_2 は、quadratic ordinary
 singularity のみを持つ

が成り立つ事である。この様な Lefschetz pencil は
 標数 p が 0 の時には Grassmann variety の中で dense に
 存在する事が知られている。(SGA7II XVII)

$D - S$ の上にある geometric point $\bar{t}$ に対し、

$Y_{\bar{t}} = Y \cap H_{\bar{t}}$ と書く。これは $\kappa(\bar{t})$ 上の variety である。

ここで、 $\dim Y = n+1$ とし、vanishing cycle の空間
 を $E_v(Y_{\bar{t}}) = \text{Coker}(H_{\text{ét}}^n(Y, \mathbb{Q}_\ell) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(Y_{\bar{t}}, \mathbb{Q}_\ell))$
 と定義する。

$\mathbb{I}$ 2 vanishing cycle を $H_{\text{ét}}^n(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)$ の中に定義しよう。(cf. SGA 7_{III}, XV). まず, local な場合に定義する。 S は hensel 環の spectrum, s は closed point, η は generic point とする。 X を S の上の generically smooth な, proper scheme, $X_s = X \times_S s$ には唯一つの孤立な特異点 x を持ち, $\pi = \mathbb{I}$ structure morphism は quadratic ordinary singularity を持つとする。左の diagram とそこから得られる右の diagram を考える。

$$\begin{array}{ccccc} \bar{s} & \longrightarrow & \bar{S} & \longleftarrow & \bar{\eta} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ s & \longrightarrow & S & \longleftarrow & \eta \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} X_{\bar{s}} & \xrightarrow{\bar{\iota}} & X_{\bar{S}} & \xleftarrow{\bar{j}} & X_{\bar{\eta}} \\ \downarrow & & \downarrow \varphi & & \downarrow \\ X_s & \xrightarrow{\iota} & X & \xleftarrow{j} & X_{\eta} \end{array} \quad \left(\begin{array}{l} \bar{S} \text{ は } \bar{\eta} \text{ の } S/\mathbb{I} \text{ 上の normalization.} \end{array} \right)$$

Λ を residual characteristic と素な torsion ring, X 上の Λ module の étale sheaf F に対して, Category $K(X_{\bar{S}}, \Lambda)$ における $\bar{\iota}^* \varphi^* F \longrightarrow \bar{\iota}^* R\bar{j}_* \bar{j}^* \varphi^* F$ の mapping cone とし $R\phi(F)$ を定義する (cf. SGA 7_{III} p97) と $F = \Lambda$ とし $i = \tau$ 時,

$$\cdots \longrightarrow H^i(X_{\bar{s}}, \Lambda) \longrightarrow H^i(X_{\bar{\eta}}, \Lambda) \longrightarrow H^i(X_s, R\phi_{\eta}(\Lambda)) \longrightarrow \cdots$$

なる長完全列が得られ, $i = n$ の時の morphism

$$H^n(X_{\bar{\eta}}, \Lambda) \longrightarrow H^n(X_s, R\phi_{\eta}(\Lambda)) \cong (R^n \phi_{\eta}(\Lambda))_x$$

において, 矢印の右側が rank 1 の Λ module であることから, Poincaré duality によって得られる $H_{\text{ét}}^n(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)$ の 1 次元 $\mathbb{Q}$ space の基底 δ で, $(\delta, \delta) = (-1)^n$ となるものを vanishing cycle という。

$\mathcal{I}$ は Vanishing Cycle の集合 $\mathcal{I}$ (cf. SGA7II XV)
 $R = \{ \delta' \mid \exists \gamma: \tau \rightarrow \sigma \text{ の } \sigma \text{ への henselization の}$
 $\text{geometric point } \bar{\eta} \text{ と } \bar{\tau} \text{ を結ぶ } \sigma \text{ への path } \gamma \text{ により } \tau \text{ を } \bar{\tau} \text{ へ } \tau \text{ morphism, } \gamma_*: H^n(Y_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{\cong}$
 $H^n(Y_{\bar{\tau}}, \mathbb{Q}_\ell) \text{ に入る } H^n(Y_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell) \text{ の vanishing cycle } \delta$
 $\text{の image } \delta' = \gamma_* \delta \}$.

と定義すると、 R は $\tau \rightarrow \mathbb{Q}_\ell \pm \mathbb{Z} \frac{1}{k}$ による vector
 space $E_\tau(Y_{\bar{\tau}})$ の splitting を与える。(La conjecture de
 Weil II Proposition 4.3.3) $H_{\text{ét}}^n(Y_{\bar{\tau}}, \mathbb{Q}_\ell)$ は monodromy
 群として $\pi_1(D-S, \bar{\tau})$ が作用するが、 $E_\tau(Y_{\bar{\tau}})$ は、
 $\pi_1(D-S, \bar{\tau})$ stable τ subspace である。 $\tau: H_{\text{ét}}^n(Y_{\bar{\tau}}, \mathbb{Q}_\ell)$
 の cup product により $E_\tau(Y_{\bar{\tau}})$ は non-degenerate τ 内積
 ψ が定まる。そして、 $\pi_1(D-S, \bar{\tau})$ はこの内積を
 不変にするから $M: \pi_1(D-S, \bar{\tau}) \rightarrow \text{Aut}(E_\tau(Y_{\bar{\tau}}), \psi)$
 が定まる。

$\pi_1(D-S, \bar{\tau})$ は $\text{ch } k = 0$ ならば、Free group の profinite
 completion でありこの topological τ 生成元の M による
 image は、Picard-Lefschetz の公式から n が
 even の時は、 R の元に関する鏡影に等しい。
 $\mathcal{I}$ は Deligne は次の定理を示した。

Theorem 5 (La conjecture de Weil II. (4.4.1))

$\text{Ch } k \neq 2$, $n = \text{even}$ とする。この時次のことが起る。

- (i) $\text{Im } M$ は $\text{Aut}(\text{Eu}(Y_{\overline{k}}), \chi)$ の ladic open subgroup である。
- (ii) $\text{Im } M$ は finite group である。

§3. Theorem 2 の証明

今、complete intersection の type $(2n; a_1, \dots, a_d)$ が与えられた時、任意の $\mathbb{Q}$ 上の type $(2n+1, a_1, \dots, a_{d-1})$ なる smooth complete intersection Y を考える。実際 smooth な complete intersection が存在することは parameter space が $\mathbb{Q}$ 上の rational variety である事から明らか。

この状況から出発して、 Y のある $\mathbb{Q}$ 上の smooth hyperplane section で定理を満たすものがあることをいくつかの Step に分けて示す。

Step 1 $\mathbb{Q}$ 上の Lefschetz pencil (閉体で考えた時、

Lefschetz pencil の fibration に $\bar{\Gamma}$ であるもの)

で smooth な fiber が type $(2n; a_1, \dots, a_d)$ となるものがある。

Proof. $Y \subset \mathbb{P}^{2n+d}$ を Segre embedding に $\neq$, $\mathbb{P}^N$ に embedd
 する ことにより, Y の $\mathbb{P}^N$ の hyperplane に $\neq$ 3
 hyperplane section が $\forall$ type $(2n; a_1, \dots, a_d)$ と
 なる 様 に $\exists$ する. $\mathbb{P}^N$ の $\mathbb{P}^1$ の $\mathbb{P}^1$ を
 parametrize する Grassmann 多様体は $\mathbb{Q}$ 上の
 rational variety $\mathbb{P}^1 \rightarrow D$ の Lefschetz pencil の
 fibration に なる 様 に $\mathbb{P}^1$ は $\mathbb{Q}$ の Grassmann の $\mathbb{P}^1$ の
 open dense に 存在 する こと から Grassmann の
 $\mathbb{Q}$ rational point $\mathbb{P}^1$ の Lefschetz pencil と なる もの が
 存在 する.

Step 2. $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}$, $\tilde{Y} \otimes \mathbb{Q} \rightarrow D \otimes \mathbb{Q}$ について, §2 の 事 を
 考える. $\mathbb{Q}$ には 今 から, $(2n; a_1, \dots, a_d)$ は,

Theorem 1 の (x) の 条件 を 満たし ている と,

仮定 する. $\mathbb{Q}$ の 時 M は 有限群 に なる 得

ない 事 を 示す. $\mathbb{Q} \ni t$ について, $\overline{\kappa(t)} \hookrightarrow \mathbb{C}$

なる embedding を 1 つ fix する. $\mathbb{Q}$ の 時 comparison

Theorem から 得 られる 自然 写射

$$H_{\text{et}}^i(Y_t \otimes_{\overline{\kappa(t)}} \overline{\kappa(t)}, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H_{\text{et}}^i(Y_t(\mathbb{C}), \mathbb{Q}_\ell)$$

は 同型 に なる. $\mathbb{Q}$ の 同型 を 通し て 次 は 可

換 $\mathbb{Q}$, im は, dense. と なる.

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1(\overline{D-S}, \bar{\tau}) & \longrightarrow & \text{Aut}(H_{\text{ét}}^{2n}(Y_{\tau} \otimes_{k(\tau)} \overline{k(\tau)}, \mathbb{Q}_\ell)) \\
 \uparrow \wr & & \uparrow \\
 \pi_{1,\text{an}}((D-S)(\mathbb{C}), \bar{\tau}) & \longrightarrow & \text{Aut}(H_{\text{cl}}^{2n}(Y_{\tau}(\mathbb{C}), \mathbb{Q}_\ell)) \\
 & \searrow & \nearrow \\
 & \text{Aut}(H_{\text{cl}}^{2n}(Y_{\tau}(\mathbb{C}), \mathbb{Q})) &
 \end{array}$$

$$\text{今, } E_v(Y_{\bar{\tau}})_{\mathbb{Q}} = \text{Coker}(H_{\text{cl}}^{2n}(Y_{\tau}(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \longrightarrow H_{\text{cl}}^{2n}(Y(\mathbb{C}), \mathbb{Q}))$$

とおくとき、 $\text{Im } M$ が有限群ならば下の同様の自然な準同型の M' の像も有限群となる。

$$M' : \pi_{1,\text{an}}((D-S)(\mathbb{C}), \bar{\tau}) \longrightarrow \text{Aut}(E_v(Y_{\bar{\tau}})_{\mathbb{Q}})$$

$\text{Im } M'$ も indecomposable な鏡影群で、鏡影面の法線ベクトルが $E_v(Y_{\bar{\tau}})_{\mathbb{Q}}$ を生成するから、もし、

$\text{Im } M'$ が有限群ならば $E_v(Y_{\bar{\tau}})_{\mathbb{Q}}$ の内積は、 n が even ならば positive definite, n が odd ならば negative definite である。

しかし、 $H_{\text{cl}}^{2n}(Y_{\tau}(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ の Hodge 分解を考えると

と、 $E_v(Y_{\tau})_{\mathbb{Q}}$ には正の cup product が definite $\Leftrightarrow$

$H_{\text{cl}}^{2n}(Y_{\tau}(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ は pure Hodge type (n, n) $\Leftrightarrow$

$$(2n; \underline{a}) = (2; 3), (2n; 2) \text{ 又は } (2n; 2, 2)$$

これは最初の仮定に矛盾する。

Step 3. $D(\mathbb{Q})$ の点を選ぶ。

§2 の Theorem 5 より $\text{Im } M$ は open である。

故に、自然同型

$$\pi_1(D-S, \eta) \longrightarrow \text{Aut}(E_\eta(Y_\eta))$$

の image は $\text{Aut}(E_\eta(Y_\eta), \psi)$ の open subgroup を含む。

§1 の近似定理 Theorem 4 から $D-S$ の $\mathbb{Q}$ -rational point の無限列 $t_1, t_2, t_3, \dots$ が存在して、下の図における β の image は、 $\text{Aut}(E_\eta(Y_{\bar{t}_i}), \psi)$ の open subgroup を含む。

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(D-S, \eta) & \longrightarrow & \text{Aut}(E_\eta(Y_\eta)) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \pi_1(D-S, \bar{t}_i) & \longrightarrow & \text{Aut}(E_\eta(Y_{\bar{t}_i})) \\ \uparrow & \nearrow \beta & \\ \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) & & \end{array}$$

故に、 β から得らる下の準同型

$$M'' : \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \text{Aut}(E_\eta(Y_{\bar{t}_i}) \otimes \mathbb{Q}(n))$$

もやはり、 $\text{Aut}(E_\eta(Y_{\bar{t}_i} \otimes \mathbb{Q}(n)), \psi)$ の open set を含む。

最後に、Step 3 での t_i の fiber $Y_{t_i} = Y \cap H_{t_i}$ かつ、

$$P^b(Y_{\bar{t}_i}) = 1 \text{ を満たす } t_i \text{ であることを示そう。}$$

$\mathbb{Q}$ の拡大体 K 上の定義より t_i の codimension の cycle 3 17, $cl(\zeta) \in H^{2i}(Y_{\bar{t}_i}, \mathbb{Q}_\ell(i))^{\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/K)}$ に含まれていゝ事、及び、 $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/K)$ の $\text{Aut}(E_\eta(Y_{\bar{t}_i}))$ に

与える image が, $\text{Aut}(E_{\tau_i}(Y_{\tau_i}), \varphi)$ の open subgroup を含
 ることからわかる。これで, $\mathbb{Q}$ 上定義され
 た Y_{τ_i} で $P^n(\overline{Y_{\tau_i}}) = 1$ なるものの存在が示された。

Remark 1.

同様に下の様な問題も考えることができる。

問題: 代数体 K 上に定義された abel 多様体 A で,

$$\text{End}(A \otimes_K \overline{K}) = \mathbb{Z}$$

なるものが存在するか。

これに関しては, $K = \mathbb{Q}$ の時に肯定的な解決
 が森 [] によって与えられているが, この問題
 の延長線上に次の問題が考えられる。

問題 $\mathbb{Q}$ 上の abel 多様体 A に対して, これと
 同型の Endomorphism ring を持つ abel 多様体で,
 代数体 K 上に定義されたものがあるか。

これについても, Complete intersection の時の
 議論と同様の議論をすることにより, 次の
 事がわかる。

$\mathbb{C}$ 上の abel 多様体 A に対して, $H^1(A, \mathbb{R})$ の complex structure $S^i = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z|=1\} \xrightarrow{p} \text{Aut}(H^1(A, \mathbb{R}))$ の image を含む最小の $\mathbb{Q}$ -algebraic group を $H_g(A)$ と書く. Hodge group と言う. (これは, 自然に $\mathbb{Z}$ -structure が与えられる.)

$\text{Im } p \subset H_g(A)(\mathbb{R})$ の centralizer を $Z_{\mathbb{R}}$ と書く. 更に, 下の universal $\mathbb{R}$ Hodge family を考える. (Deligne [2] Mumford [5])

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\pi} H_g(A)(\mathbb{Z}) \setminus H_g(A)(\mathbb{R}) / Z_{\mathbb{R}}.$$

下の仮定 (*), (**) を考える.

(*) $H_g(A)(\mathbb{Z}) \setminus H_g(A)(\mathbb{R}) / Z_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ は複素多様体として,

$\mathbb{C}$ 上の quasi projective variety $\mathcal{V}$, $\mathcal{A} \rightarrow H_g(A)(\mathbb{Z}) \setminus H_g(A)(\mathbb{R}) / Z_{\mathbb{R}}$ は, 代数体 K 上の variety の K -homomorphism から得られる.

(**) $H_g(A)(\mathbb{Z})$ は, $H_g(A)$ の中で $\mathcal{V}$ zariski dense.

上の仮定 (*), (**) のもとで, ある代数体 K' 上に定義した abel 多様体 B で,

$\text{End}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \text{End}(B \otimes_{K'} \overline{K'}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ となるものが存在する.

Remark 2. また下の事も同様の議論をする事により、示すことが出来る。

X を代数体 K 上の projective smooth algebraic variety とする。この時、 X に関して下の意味で、Tate予想が成り立っているとする。

$$P^i(\bar{X}) = \dim_{\mathbb{Q}_\ell} \left(\bigcup_{H \subset \text{Gal}(\bar{K}/K)} H^{2i}(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell(i))^H \right)$$

この時、 X の ^{open} hyperplane section X_t で K 上定義して、

$$P^i(\bar{X}_t) = \dim_{\mathbb{Q}_\ell} \left(\bigcup_{H \subset \text{Gal}(\bar{K}/K)} H^{2i}(\bar{X}_t, \mathbb{Q}_\ell(i))^H \right)$$

が成り立つものが存在する。(cf Lang [] P151 Prop 3).

参考文献 [1] Deligne, P., La Conjecture de Weil II., Publ. Math. IHES

[2] Deligne, P., Travaux de Shimura, Sémin. Bourbaki 1970/1971 Exposé 389. Lecture Note in Math 224. Springer.

[3] Lang, S., Diophantine Geometry, Interscience (1962)

[4] Milne, S., Etale cohomology, Princeton U.P. (1980)

[5] Mumford, D., A Note on Shimura's paper "Discontinuous group and abelian varieties" Math. Ann. 181 (1969)