

ドレスト光子理論の共形不変性と ζ -函数*

小嶋 泉

ドレスト光子研究起点顧問

ドレスト光子現象は、大津元一・東大名誉教授（現ドレスト光子研究起点代表理事）が新しい工学領域において夙に発見し開拓して来られた極めて動的な量子電磁現象で、その際立った特徴はエネルギー・運動量スペクトルの off-shell support にある。

このドレスト光子現象を理論的・整合的に理解しようとする試みの中で、佐久間弘文氏（ドレスト光子研究起点理事）が流体力学的視点から導入された Clebsch 変数 (Clebsch parametrization) とそれによって実現される Clebsch 双対性という記述法・概念の重要な意義が、次の論文及びそれに続く解説論文で明らかにされた：

H. Sakuma, I. Ojima, and M. Ohtsu, “Gauge symmetry breaking and emergence of Clebsch-dual electromagnetic field as a model of dressed photons”, Appl. Phys.A (2017) 123:750.

H. Sakuma, I. Ojima and M. Ohtsu, “Dressed photons in a new paradigm of off-shell quantum fields”, Progress in Quantum Electronics Vol.55, September 2017, pp.74-87.

Clebsch 双対性を基軸に据えたこの佐久間氏のアプローチは、更にドレスト光子の共形不変性に着目し、Clebsch 双対性と共形不変性の両者を骨格に据えることによって大きく発展し、ごく最近下記の共著論文にまとめられた：

H. Sakuma and I. Ojima, “Dressed photon constant as a key parameter for conformal cyclic cosmology of twin universes” (to appear in Symmetry).

この理論の詳細な内容については、上記論文を参照して頂くのが最適であることは言を俟たないが、ここでは、共形不変性によってもたらされる理論の著しい特徴として、4次元時空での理論において実現される modular 双対性に focus したい。この双対構造によって無限自由度系の熱平衡状態において明示化される数学的構造がドレスト光子理論においても実現され、ドレスト光子が惹き起こす現象の熱的散逸の性格と同時に、それに付随する群論的動力的特徴が明示化されるのである。

まず最初に、Minkowski 時空を統制する Lorentz 群が電磁場の零質量性を介して共形群へと拡張される結果、Clebsch 双対性の概念がドレスト光子描像の数学的構造を深く規定づけることを見たい。このため、4次元時空に

*2120.3.8 『量子場の数理とその周辺』

おける空間回転群 $SO(3)$, Lorentz 群 $SO(1, 3)$, 共形群 $SO(2, 4)$ を表わす実直交諸群の間の包含・拡張の関係並びにそのそれぞれと局所同型に対応する複素 Lie 群 $SU(2)$, $SL(2, \mathbb{C})$, $SU(2, 2)$ 相互の間の次のような関係が重要となる:

$$\begin{array}{ccccc} SO(3) & \hookrightarrow & SO(1, 3) & \hookrightarrow & SO(2, 4) = SO(1+1, 1+3), \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ SU(2) & \hookrightarrow & SL(2, \mathbb{C}) & \hookrightarrow & SU(2, 2) \end{array}$$

1 行目末尾に現れる等式 $SO(2, 4) = SO(1+1, 1+3)$ は, Lorentz 群 $SO(1, d)$ の共形拡大を通じて時間空間それぞれに 1 次元を付加した特殊直交群 $SO(1+1, 1+d)$ が現れることを一般的に記述する一方, 我々にとって馴染みの空間次元 $d=3$ という特殊状況での共形群は $SU(2, 2)$, 即ち, 互いに逆符号の複素内積を持つ 2 つの複素 2 次元空間 $\mathbb{C}^2$ の直和として与えられた複素 4 次元空間 $\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2$ に働く特殊ユニタリー群 $SU(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2) = SU(2, 2)$ と局所同型になるということを表わす。

ただし, この第 1 行目と第 3 行目の間の局所同型性は, 落合啓之先生から佐久間氏に御教示頂いたドレスト光子対称性に関する“accidental symmetry”の概念で示唆されるように, 4 次元時空の周りでのみ成立つ特殊事情に由来するもの! これは, 実直交群に関わる共形拡大系列と富田竹崎双対性に由来する統計力学的文脈とが「たまたま」交叉するところに吾が 4 次元時空が位置するという偶然に他ならない。ここで重要な本質は,

共形拡大と Clebsch 双対性を介して現れる 1 次分数変換に由来する「量子ウォーク」とそこでの ζ -関数に関わる動力的側面が前者の文脈につながり,

後者の文脈は $SU(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2) = SU(2, 2)$ という構造的特徴を持った modular 自己同型群で支配される物理量代数と状態空間とを備えた富田・竹崎双対性理論の関与に導く

という内容である。この後者は, 量子場としてのドレスト光子のような無限自由度量子系を真空状況の制約に縛られることなく統計力学的に扱う上で不可欠となる概念装置であり, 動力学の共形不変性に由来する Clebsch 双対性と物理量・状態空間を支配する富田・竹崎双対性という 2 種類の双対性構造が, 時空次元が 4 であるという例外状況では一致するという非常に意味深長な「偶然の一致」を表わすものに他ならない。

References

- 1) 小嶋 泉, 量子場とミクロ-マクロ双対性, 丸善出版, 2014;
小嶋 泉, 岡村和弥, 無限量子系の物理と数理, SGC98, サイエンス社, 2014.
- 2) Sakuma, H., Ojima, I. and Ohtsu, M., Dressed photons from the viewpoint of photon localization: the entrance to the off-shell science, Appl. Phys. A123, 724 (2017);

Gauge symmetry breaking and emergence of Clebsch-dual electromagnetic field as a model of dressed photons, Appl. Phys. A123, 750 (2017) (<https://doi.org/10.1007/s00339-017-1364-9>);

Dressed photons in a new paradigm of off-shell quantum fields, Progress in Quantum Electronics 55, 74-87 (2017).

3) Haag, R., Hugenholtz, N.M. & Winnink, M., On the equilibrium states in quantum statistical mechanics, Comm. Math. Phys. **5**, 215-236 (1967).

Bratteli, O. & Robinson, D.W., *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*, Vols.1 & 2, Springer-Verlag (1979, 1981).

4) Takahashi, Y. and Umezawa, H., Thermo field dynamics, Collect. Phenom. **2**, 55-80 (1975).

5) Buchholz, D., Ojima, I. and Roos, H., Thermodynamic properties of non-equilibrium states in quantum field theory, Ann. Phys. (N.Y.) **297**, 219 - 242 (2002).

Ojima, I., Temperature as order parameter of broken scale invariance, Publ. RIMS (Kyoto Univ.) **40**, 731-756 (2004) (math-ph/0311025).

6) Ojima, I., Control over inclusion relations via Induction & Imprimitivity, pp.107—115 in Prog. In Nanophotonics 5, T. Yatsui (ed.), 2018, Springer.

7) Ojima, I., A unified scheme for generalized sectors based on selection criteria –Order parameters of symmetries and of thermal situations and physical meanings of classifying categorical adjunctions–, Open Sys. Info. Dyn. **10**, 235-279 (2003);

8) Ojima, I., Micro-macro duality in quantum physics, 143-161, Proc. Intern. Conf. “Stochastic Analysis: Classical and Quantum –Perspectives of White Noise Theory” ed. by T. Hida, World Scientific (2005), arXiv:math-ph/0502038.