

W^* -algebra の中心の値をとる相対次元関数 の構成と, 不変測度

九大 教養 池 地 敏 弘

§ 0. 序

確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ に作用する non-singular transformation T に対して, その不変測度の存在の為の必要条件がエルゴード理論の方で研究されてきた。

と: 3 $^{\circ}$ non-singular transformation T (invertible) は, 可換 W^* -algebra $L^{\infty}(\Omega, \mathcal{B}, P)$ に作用する自己同型写像群 $\mathcal{O}_T$ をひきおこし, 従がってそれと $L^{\infty}(\Omega, \mathcal{B}, P)$ とによる cross product W^* -algebra $\mathcal{A}_T$ が作られる (尚, $\therefore$ T は, non-singular transformation T は ergodic 性も free action も仮定していいことを注意しておく). あると

(1) Ω -set が E. Hopf [3] の意味で bounded (§ 2. Def.)

$\Rightarrow$ cross product W^* -algebra $\mathcal{A}_T$ の基礎 Hilbert 空間 $\mathcal{H}_T$ が,

F. J. Murray-J. von Neumann の意味で finite space

(§ 2. Theorem II)

(2) 可測集合 A, B に対して A と B が non-singular transformation T のもとで同値 (§2. Def.) (或いは $L^\infty(\Omega, \mathcal{B}, P)$ の projections L_{χ_A}, L_{χ_B} が自己同形写像群の下で同値であるといってもよい) $\Leftrightarrow$ cross product W^* -algebra $\mathcal{O}_T$ の projections $\hat{L}_{\chi_A}, \hat{L}_{\chi_B}$ が Murray-Neumann の意味で同値。

ここで $\hat{L}_{\chi_A}$ は L^∞ の projection L_{χ_A} を cross product に自然に埋めこんだ projection。

(§2. Theorem III)

が成り立つことが分かる。この証明は不変測度が与えられているときは容易である。けれども我々は不変測度を介せずに (1), (2) を証明し、次に述べるようにこの対応関係から, E. Hopf の条件 (Ω -set が bounded) のもとで不変測度を構成したい。(この研究会での斎藤氏の紹介にあった Størmer の結果はまさに (1)(2) のことをそれは不変測度を用いての証明であって, Størmer 自身も述べているように不変測度を介せずして証明を与えることが問題である)。

我々は同値有限不変測度を構成しかつそれらすべての形も決定する為に, W^* -algebra (必ずしも factor ではない) の 中心の値をとる有限相対次元関数を導入する (§1. Def.)。

factor のときはそれは Murray-Neumann の有限相対次元関数と与えられる。ところで Murray-Neumann は factor に

対して、もしその基礎 Hilbert 空間が finite ならば有限相対次元関数が存在することを示した[4]。我々は Murray-Neumann の方法を non-factor の場合に拡張することによって基礎 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ が finite ならば中心の値をとる有限相対次元関数が得られることを示そう (§1, Theorem I)。ところで J. Dixmier [1] は同じ条件の下で natural mapping を構成したがその定義域を projections の全体に制限すれば中心の値をとる有限相対次元関数である。けれども我々の構成は J. Dixmier のそれとは全く異なる。

いわば natural mapping は確率論における条件付確率に対応し、我々の関数は条件付確率に対応する。

E. Hopf [3] は Ω -set が bounded ならば同値有限不変測度が存在することを示したが、§3 で Hopf の条件の下で同値有限不変測度の存在とそのすべての形を、cross product W^* -algebra $\mathcal{O}_T$ の中心の値をとる有限相対次元関数を用いて示す (§3, Theorem IV, V)

§ 1. 中心の値をとる有限相対次元関数の構成

1.1. 準備

$\mathcal{O}$ を基礎 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の上の W^* -algebra としそれを $\mathcal{O}(\mathcal{H})$ で表わす。 $\mathcal{O}$ の中心を $\mathcal{C}$ で、 $\mathcal{O}(\mathcal{S})$ の projections の全体を $\mathcal{O}^p(\mathcal{S}^p)$ で、 $\mathcal{O}(\mathcal{S})$ の positive operators の全体を $\mathcal{O}^+(\mathcal{S}^+)$ で表わす。

projection $\mathcal{A}$ 内の同値関係を $E \sim F$ (i.e. $E, F \in \mathcal{A}^P$ に對し $\exists V \in \mathcal{A}$ が存在し $V^*V = E, VV^* = F$) で表わす。順序関係を $E \leq F$ (i.e. $\exists F' \leq F$ $F' \in \mathcal{A}^P$ が存在し $E \sim F'$) で表わす。もし $E \sim F \leq E$ ならば $F = E$ であるとき E を finite projection, $E(\mathcal{H})$ を finite space といふ。そうでないとき infinite projection, infinite space といふ。

もしある n 個の互いに直交し同値な $\mathcal{A}^P$ projections $\{E_i\}_{i=0}^{n-1}$ が存在し $\sum_{i=0}^{n-1} E_i = I$ (identity operator) ならば reduced W^* -algebra $\mathcal{A}_{E_i} = \{E_i A E_i \mid A \in \mathcal{A}\}$ が可換ならば, W^* -algebra $(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ は type n homogeneous であるといふ。 $I \sim nE_0$ で表わす。 $E \in \mathcal{A}^P$ に對し $\bar{E}$ を a central support と表わす。この節では以後特に断わらない限り $\mathcal{H}$ は finite space である。

1.2. 比較定理とある positive operator $\Psi_E(\frac{F}{H})$

$E, F \in \mathcal{A}^P$ に對し $\exists G \in \mathcal{A}^P$ が存在し $EG \leq FG, F(I-G) \leq E(I-G)$ であることは良く知られている(比較定理)。すなわちもし基礎空間 $\mathcal{H}$ が finite ならばこのことから $\mathcal{A}$ の projections $\mathcal{A}$ 内の (E, F) に對し互いに直交する高々可算個の中心の projections $\{G_n\}_{n=0}^\infty$ が一意的に定まり

(1) $\sum_{n=0}^\infty G_n = \bar{E}$ (2) F に含まれる互いに直交する projections $\{F_i\}_{i=1}^\infty$ が存在し $F_i G_n \sim E G_n$ ($1 \leq i \leq n < \infty$), $F_n^* G_n \sim E G_n$ ($0 \leq n < \infty$)
 $\Rightarrow F_n^* = F - \sum_{i=1}^n F_i$ ($n \geq 1$), $F_0^* = F$.

projection G_n を $p(n; E, F)$ で表わす。

Lemma 1.1. $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ is type n homogeneous W^* -algebra ($I \sim nE_0$, $1 \leq n < \infty$)

とある。若 $F \in \mathcal{A}^p$ に対して $\{P(i; E_0, F)\}_{i \geq 0}$ は次を満たす。

$$(1) P(0; E_0, F) \bar{F} = 0, \quad (2) P(k; E_0, F) = 0 \quad k > n.$$

(3) F は含まれる互いに直交する n 個の projections $\{F_i\}_{1 \leq i \leq n}$ が存在し、

$$P(k; E_0, F) \left(F - \sum_{i=1}^k F_i \right) = 0, \quad F_i P(k; E_0, F) \sim E_0 P(k; E_0, F) \quad 1 \leq i \leq k \leq n$$

証明略

Definition 1.1. $E \overset{\mathcal{A}}{\prec} H$, $F \overset{\mathcal{A}}{\prec} H$ とある $\mathcal{A}$ の projections の組 (E, F, H) に対して

正の operator $\Psi_E\left(\frac{F}{H}\right)$;

$$\Psi_E\left(\frac{F}{H}\right) = \sum_{1 \leq i \leq k < \infty} \frac{1}{k} P(i; E, F) P(k; E, H) \quad (\text{強収束})$$

を定義する。我々はこの級数の各項が非負有界であり、各

projection $P(i; E, F) P(k; E, H)$ が互いに直交する中心の元であること

に注意する。中心は強収束で閉じているから $\Psi_E\left(\frac{F}{H}\right) \in \mathcal{B}^+$ 。

Proposition 1.1. (1) $\Psi_E\left(\frac{E}{H}\right) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} P(k; E, H)$

$$(2) F \overset{\mathcal{A}}{\prec} E \iff \Psi_E\left(\frac{F}{H}\right) = 0$$

$$(3) F \sim F' \implies \Psi_E\left(\frac{F}{H}\right) = \Psi_E\left(\frac{F'}{H}\right)$$

$$(4) F' \in \mathcal{B}^p, \quad \Psi_E\left(\frac{FF'}{H}\right) = \Psi_E\left(\frac{F}{H}\right) F'$$

$$(5) E \overset{\mathcal{A}}{\prec} E' \implies \Psi_E\left(\frac{F}{H}\right) \leq \{\Psi_{E'}\left(\frac{F}{H}\right) + \Psi_{E'}\left(\frac{F'}{H}\right)\} \{I + \Psi_E\left(\frac{E'}{E}\right)\}$$

$$(6) E \overset{\mathcal{A}}{\prec} F \overset{\mathcal{A}}{\prec} E' \implies \Psi_E\left(\frac{E}{E'}\right) \leq \Psi_F\left(\frac{F}{E'}\right) \Psi_E\left(\frac{E}{F}\right)$$

$$(7) \Psi_F\left(\frac{F}{H}\right) \leq \{\Psi_E\left(\frac{F}{H}\right) + \Psi_E\left(\frac{E}{H}\right)\} \{I + \Psi_F\left(\frac{F}{H}\right)\}$$

$$(8) \quad F^1 F^2 = 0 \Rightarrow \Psi_E\left(\frac{F^1}{I}\right) + \Psi_E\left(\frac{F^2}{I}\right) \leq \Psi_E\left(\frac{F^1+F^2}{I}\right) \leq \Psi_E\left(\frac{F^1}{I}\right) + \Psi_E\left(\frac{F^2}{I}\right) + \Psi_E\left(\frac{F}{I}\right)$$

Proof. (1) ~ (4) の証明は明らか。 (5) の証明. 右辺を書き直す

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{1 \leq i' \leq k' < \infty} \left(\frac{1}{l} + 1\right) \frac{i'+1}{k'} P(i'; E, F) P(k'; E, H) P(l; E, E') \\ & + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k'=1}^{\infty} \left(\frac{1}{l} + 1\right) \frac{1}{k'} P(0; E, F) P(k'; E, H) P(l; E, E') \end{aligned}$$

$P(i'; E, F) P(k'; E, H) P(l; E, E') \neq 0$ をみたす i, k, i', k', l

と $P(i; E, F) P(k; E, H) P(0; E, F) P(k'; E, H) P(l; E, E') \neq 0$ をみたす i, k, k', l

に対して不等式 $\left(\frac{1}{l} + 1\right) \frac{i'+1}{k'} \geq \frac{i}{k}$, $\left(\frac{1}{l} + 1\right) \frac{1}{k'} \geq \frac{i}{k}$ が成り立つ

ことを示せばよい。容易に分かるように前者の場合 $k \geq lk'$

かつ $i < (i'+1)(l+1)$ 後者の場合 $k \geq lk'$, $i < l+1$ が言へる。

同様に (6) については $P(l; E, E') P(i; E, E') P(j; E, F) \neq 0$ ならば $l \geq ij$

$$(7) \text{ については右辺を書き直すと } \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{1 \leq i \leq k} \left(\frac{1}{l} + 1\right) \left\{ \frac{i}{k} P(i; E, F) + \frac{1}{k} I \right\} \underbrace{P(k; E, H)}_{P(l; F, H)}.$$

$P(l; F, H) P(k; E, H) \neq 0$ ならば $P(i; E, F) P(k; E, H) P(l; F, H) \neq 0$ をみたす

i ($1 \leq i \leq k$) に対して $(i+1)(l+1) > k$ 。もしすべての i ($1 \leq i \leq k$)

に対して $P(i; E, F) P(k; E, H) P(l; F, H) = 0$ ならば $k < l+1$ 。(8) につ

いては $P(i; E, F+F^2) P(i'; E, F') P(i''; E, F'') \neq 0$ ならば $i+i'' \leq i \leq i'+i''+1$ 。

Proposition 1.2. $\mathcal{E}(M, \mathcal{F})$ が type n homogeneous ($I \sim nE_0, 1 \leq n < \infty$)

ならば (1) $\Psi_{E_0}\left(\frac{F}{I}\right)$ の support = $\bar{F}$ (2) 互いに直交する可算個

の projections $\{F^{\ell}\}_{\ell \geq 1}$ に対して $\Psi_{E_0}\left(\frac{\sum F^{\ell}}{I}\right) = \sum_{\ell \geq 1} \Psi_{E_0}\left(\frac{F^{\ell}}{I}\right)$

Proof. Lemma 1.1 から出る。

1.3. 構成.

我々の目的は基礎 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ が finite な $\mathcal{H}$ 上で定義する中心の値をとる有限相対次元関数が一意に存在することを示しその構成法を与えることである。

Definition 1.2. $\mathcal{A}^p$ から $\mathcal{S}^+$ への写像 Ψ が次をみたすときそれを中心の値をとる有限相対次元関数と呼ぶ。

- (1) 互いに直交する可算個の projections $\{E_n\}_{n \geq 1}$ に対し $\Psi(\sum_{n \geq 1} E_n) = \sum_{n \geq 1} \Psi(E_n)$ (強収束)
- (2) $\Psi(E) = 0 \Leftrightarrow E = 0$ (3) $E \sim F \Rightarrow \Psi(E) = \Psi(F)$
- (4) $\Psi(EF) = \Psi(E)F$ $E \in \mathcal{A}^p, F \in \mathcal{S}^p$ (5) $\Psi(I) = I$

Theorem I. 基礎空間 $\mathcal{H}$ が finite な $\mathcal{H}$ 上で中心の値をとる有限相対次元関数が一意に存在する。

定理の証明は続くいくつかの Lemmas を経て証明される。

Lemma 1.2. もし W^* -algebra $\mathcal{A}$ が連続的 (continuous) であるならば次をみたす $\mathcal{A}$ の無限可算個の projections $\{E_n\}_{n \geq 0}$ が存在する。

- (1) $E_n > E_{n+1}$ (2) $\overline{E_n} = I$ (3) $p(0; E_{n+1}, E_n) = p(1; E_{n+1}, E_n) = 0$

Proof. 最初互いに直交する projection E', F' が存在し $E' \sim F', \overline{E'} = I$ をみたすことを言う。 $\mathcal{A}$ が非可換だから $\exists E \in \mathcal{A}^p, \exists \text{ unitary op. } U \in \mathcal{A}$ が存在し $UEU^* \neq E$ 。従って $\exists E'_0 \leq E, \exists F'_0 \leq I - E$ が存在し

$E_0 \sim F_0$. $\tau: \tau(E') \in \text{族}\{E \in \mathcal{O}^P \mid \exists F \in \mathcal{O}^P \text{ such that } EF=0, E \sim F\}$ の極大元とすれば $\overline{E'} = I$. 次 $E_0 = I, E_1 = E'$ とすれば $P(0; E_1, E_0) = 0$ $P(1; E_1, E_0) = 0$. 今 n 個の projections $\{E_i\}_{0 \leq i \leq n-1}$ が存在し (1) (2) (3) を満たしているとする。reduced W^* -algebra $\mathcal{O}_{E_{n-1}}$ が非可換だから E_{n-1} に含まれる $\mathcal{O}_{E_{n-1}}$ に直交する projection E_n, F_n が存在し $\mathcal{O}_{E_{n-1}}$ の projections は $\mathcal{O}_{E_{n-1}}$ の下で同値 ($E_n \sim_{\mathcal{O}_{E_{n-1}}} F_n$) であり、 E_n の $\mathcal{O}_{E_{n-1}}$ の下での central support が E_{n-1} であるように選べる。reduced W^* -algebra $\mathcal{O}_{E_{n-1}}$ の下で同値ならば $\mathcal{O}$ の下でも同値であり、又 E_{n-1} の ($\mathcal{O}$ の下での) central support が I であることから E_n の ($\mathcal{O}$ の下での) central support は I である。このようにして帰納的に (1) (2) (3) を満たす projections $\{E_n\}_{0 \leq n < \infty}$ が選べる。

Remark $\forall 0 \leq n \leq m < \infty$ に対し

$$\Psi_{E_m}\left(\frac{E_m}{E_n}\right) \leq \frac{1}{2^{m-n}} \cdot I$$

⊙ Lemma 1.2 の (3) から $\forall k$ に対し $\Psi_{E_{k+1}}\left(\frac{E_{k+1}}{E_k}\right) \leq \frac{1}{2} \cdot I$.

もしある m と $0 \leq \forall n \leq m$ に対し $\Psi_{E_m}\left(\frac{E_m}{E_n}\right) \leq \frac{1}{2^{m-n}} \cdot I$ ならば、

$$\text{Proposition 1.1 の (6) から } \Psi_{E_{m+1}}\left(\frac{E_{m+1}}{E_n}\right) \leq \Psi_{E_m}\left(\frac{E_m}{E_n}\right) \Psi_{E_{m+1}}\left(\frac{E_{m+1}}{E_m}\right)$$

$$\text{右辺の各要素が可換だから } \leq \frac{1}{2^{m-n}} \cdot I \cdot \frac{1}{2} \cdot I = \frac{1}{2^{m+1-n}} \cdot I.$$

Lemma 1.3. $\mathcal{O}$ が continuous, $\mathcal{P}$ が finite ならば Lemma 1.2 の $\{E_n\}_{n \geq 1}$ に対して、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_{E_n}\left(\frac{F}{I}\right), F \in \mathcal{O}^P$ (33 42 束) が存在する。この極限を $\Psi(F)$ で表わせば $\Psi(F) \in \mathcal{S}^+, 0 \leq \Psi(F) \leq I$.

Proof. Proposition 1.1 の (5) から $n \leq m$ に對し

$$\Psi_{E_m}\left(\frac{F}{I}\right) \leq \left\{ \Psi_{E_n}\left(\frac{F}{I}\right) + \Psi_{E_n}\left(\frac{E_n}{I}\right) \right\} \left\{ I + \Psi_{E_n}\left(\frac{E_m}{E_n}\right) \right\}$$

右辺の positive operators は互に可換だから Lemma 1.2. の Remark から

$$\leq \left\{ \Psi_{E_n}\left(\frac{F}{I}\right) + \frac{1}{2^n} \cdot I \right\} \left\{ I + \frac{1}{2^{m-n}} \cdot I \right\}$$

$\forall x \in \mathcal{H}$, $n \leq m$ に對し

$$\left(\Psi_{E_m}\left(\frac{F}{I}\right)x, x \right) \leq \left(\left(1 + \frac{1}{2^{m-n}}\right) \left(\Psi_{E_n}\left(\frac{F}{I}\right)x, x \right) + \left(1 + \frac{1}{2^{m-n}}\right) \cdot \frac{1}{2^n} \cdot (x, x) \right)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\Psi_{E_m}\left(\frac{F}{I}\right)x, x \right) \leq \left(\Psi_{E_n}\left(\frac{F}{I}\right)x, x \right) + \frac{1}{2^n} (x, x)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\Psi_{E_m}\left(\frac{F}{I}\right)x, x \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\Psi_{E_n}\left(\frac{F}{I}\right)x, x \right)$$

故に弱収束し、その極限 $\Psi(F)$ は $0 \leq \Psi(F) \leq I$, 又中心は弱収束

に關して閉じているから $\Psi(F) \in \mathcal{S}^+$

Corollary. $\Psi(E_k) \leq \frac{1}{2^{k+1}} \cdot I$

Lemma 1.4. Lemma 1.3 の仮定の下に $\Psi(F)$ の support = $\bar{F}$ ($F \in \mathcal{A}'$)

Proof. Proposition 1.1 の (7) から

$$\left\{ \Psi_{E_n}\left(\frac{F}{I}\right) + \Psi_{E_n}\left(\frac{E_n}{I}\right) \right\} \left\{ I + \Psi_F\left(\frac{F}{I}\right) \right\} \geq \Psi_F\left(\frac{F}{I}\right) \quad n \geq 0$$

$P(k; F, I)$ は上の両辺の positive operators と可換だから

$$\left\{ \Psi_{E_n}\left(\frac{F}{I}\right) + \Psi_{E_n}\left(\frac{E_n}{I}\right) \right\} \left\{ I + \Psi_F\left(\frac{F}{I}\right) \right\} P(k; F, I) \geq \frac{1}{k} P(k; F, I)$$

$$\Psi_{E_n}\left(\frac{E_n}{I}\right) \leq \frac{1}{2^n} \cdot I \quad \text{だから} \quad n \text{ を十分大きくとると}$$

$$\Psi_{E_n}\left(\frac{F}{I}\right) P(k; F, I) \geq \frac{1}{2k} \cdot P(k; F, I)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_{E_n}\left(\frac{F}{I}\right) P(k; F, I) \geq \frac{1}{2k} \cdot P(k; F, I)$$

従が、 $\Psi(F)\bar{F}$ の support は $\bar{F}$ に含まれる。一方 $\Psi(F)$ の support は $\bar{F}$ に含まれるから $\Psi(F)$ の support = $\bar{F}$ 。

Lemma 1.5. Lemma 1.3 の仮定の下で Ψ は次を満たす。

$$(1) E \sim^{\mathcal{O}} F \Rightarrow \Psi(E) = \Psi(F) \quad (2) \Psi(EF) = \Psi(E)F \quad E \in \mathcal{O}^P, F \in \mathcal{S}^P$$

(3) Ψ は有限加法的 i.e. 直交する projections F_1, F_2 に対し $\Psi(F_1 + F_2) = \Psi(F_1) + \Psi(F_2)$

Proof. (1) (2) は明か。Proposition 1.1 の (8) から

$$\begin{aligned} \Psi_{E_n}\left(\frac{F_1}{I}\right) + \Psi_{E_n}\left(\frac{F_2}{I}\right) &\leq \Psi_{E_n}\left(\frac{F_1 + F_2}{I}\right) \leq \Psi_{E_n}\left(\frac{F_1}{I}\right) + \Psi_{E_n}\left(\frac{F_2}{I}\right) + \Psi_{E_n}\left(\frac{E_n}{I}\right) \\ n \rightarrow \infty \quad \Psi(F_1) + \Psi(F_2) &\leq \Psi(F_1 + F_2) \leq \Psi(F_1) + \Psi(F_2) \end{aligned}$$

Lemma 1.6 Lemma 1.3 の仮定の下で、 $\Psi(E) = \Psi(F) \Rightarrow E \sim^{\mathcal{O}} F$

Proof. $\epsilon < k > 1$ に対し $P(k; E, F) \neq 0$ ならば互いに直交する projections $\{F_i\}_{1 \leq i \leq k}$ が存在し、 $EP(k; E, F) \sim^{\mathcal{O}} F_i$ 、 $FP(k; E, F) > F_i$ $1 \leq i \leq k$ 。

$$\begin{aligned} \text{Lemma 1.5 から} \quad \Psi(FP(k; E, F)) &\geq \Psi\left(\sum_{i=1}^k F_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^k \Psi(F_i) \\ &= \sum_{i=1}^k \Psi(EP(k; E, F)) \\ &= k\Psi(EP(k; E, F)) \end{aligned}$$

一方 $\Psi(EP(k; E, F)) = \Psi(FP(k; E, F))$ しか $\Psi(EP(k; E, F)) = 0$ 。これは

Lemma 1.4 に矛盾する。故に $P(k; E, F) = 0$ $k > 1$ 。同様にして

$P(k; F, E) = 0$ $k > 1$ 。従が、 $E \sim^{\mathcal{O}} F$ 。

Lemma 1.7. Lemma 1.3 の仮定の下で Ψ は可算加法的、i.e. 互

いに直交する可算個の projections $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ に対し、 $\Psi(\sum_{i=1}^{\infty} F_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \Psi(F_i)$ (強収束)

Proof. $\Psi(F_i)$ は positive operator であり、 $\sum_{i=1}^n \Psi(F_i)$ は一様有界 (実際 $\sum_{i=1}^n \Psi(F_i) = \Psi(\sum_{i=1}^n F_i) \leq I$) であるから級数 $\sum_{i=1}^{\infty} \Psi(F_i)$ は強収束する。明らかに $\Psi(\sum_{i=1}^{\infty} F_i) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \Psi(F_i)$ であるから逆の不等式を証明しよう。 A を $\Psi(\sum_{i=1}^{\infty} F_i) - \sum_{i=1}^{\infty} \Psi(F_i)$ の support とする。 $\varepsilon > 0$ に対し $\Psi(E_k) \leq \varepsilon I$ をみたすように k を選ぶ。 D_n を $(\Psi(E_k) - \sum_{i=n+1}^{\infty} \Psi(F_i))^+ A$ の support とする。 $D_n \in \mathcal{S}^p$, $D_n \leq D_{n+1}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = A$ (強収束)。 各 $n \geq 1$ に対し

$$\begin{aligned} \Psi(F_{n+1} D_n) &= \Psi(F_{n+1}) D_n \\ &\leq \Psi(E_k) D_n \\ &= \Psi(E_k D_n) \end{aligned}$$

Lemma 4.6 から $\exists$ projection $F'_{n+1} \leq E_k$ が存在し $F_{n+1} D_n \sim F'_{n+1} D_n$ 。

更に D_n は $(\Psi(E_k - F'_{n+1}) - \sum_{i=n+2}^{\infty} \Psi(F_i))^+ A$ の support でもあるから同様に $\exists$ projection $F'_{n+2} \leq E_k - F'_{n+1}$ such that $F_{n+2} D_n \sim F'_{n+2} D_n$ となる。

このようにして帰納的に互いに直交する projection $\{F'_m\}_{m \geq n}$;

$$F'_m \leq E_k, \quad F_m D_n \sim F'_m D_n \quad m \geq n$$

を用いる。 $\{\Psi(\sum_{i=1}^{\infty} F_i) - \sum_{i=1}^{\infty} \Psi(F_i)\} D_n = \{\Psi(\sum_{i=n+1}^{\infty} F_i) - \sum_{i=n+1}^{\infty} \Psi(F_i)\} D_n$

$$\begin{aligned} &\leq \Psi(\sum_{i=n+1}^{\infty} F_i) D_n \\ &= \Psi(\sum_{i=n+1}^{\infty} F_i D_n) \\ &= \Psi(\sum_{i=n+1}^{\infty} F'_i D_n) \\ &= \Psi(\sum_{i=n+1}^{\infty} F'_i) D_n \end{aligned}$$

$$\leq \Psi(E_k) D_n$$

$$\leq \varepsilon D_n.$$

$$n \rightarrow \infty, \quad \Psi\left(\sum_{i=1}^{\infty} F_i\right) - \sum_{i=1}^{\infty} \Psi(F_i) \leq \varepsilon A.$$

$$\varepsilon \text{ は任意だから } \Psi\left(\sum_{i=1}^{\infty} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \Psi(F_i).$$

Proof of Theorem I. $\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_D$ をそれぞれ $\mathcal{O}$ の continuous, discrete reduced W^* -algebra; $C, D \in \mathcal{S}^P, CD=0, C+D=I$, とする。 $\mathcal{S}$ が finite だから C, D も finite。 discrete W^* -algebra の構造定理から互いに直交する中心の projections $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在し, $\sum_{n=1}^{\infty} G_n = D$, $\mathcal{O}_{G_n}$: type n homogeneous W^* -algebra ($G_n \sim nE_0^{(n)}$)。 τ は $\mathcal{O}^P$ から $\mathcal{S}^+$ への map Ψ ;

$$\Psi(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_{E_0^{(n)}}\left(\frac{EG_n}{G_n}\right) + \Psi(EC)$$

を定義する。 Ψ は右辺の Ψ は Lemma 1.3 の Ψ 。 Ψ が中心の値をとる有限相対次元関数であることが今迄の諸 Lemmas から分かる。 次に一意性を証明する。 Ψ も別の, 中心の値をとる有限相対次元関数とする。 $\mathcal{O}$ の projection $E \leq G_n$ に対し, E は含まれる有限個の projections $\{F_1, \dots, F_k\}$ ($k \leq n$) が存在し $E = \sum_{i=1}^k F_i$, $E_0^{(n)} E \sim F_i$;

$$\begin{aligned} \Phi(E) &= \sum_{i=1}^k \Phi(F_i) \\ &= \sum_{i=1}^k \Phi(E_0^{(n)} E) \\ &= k \Phi(E_0^{(n)}) E \end{aligned}$$

よって可換 W^* -algebra $\mathcal{O}_{E_0^{(n)}}$ 上では $\Phi = \Psi$ だから $\Phi = \Psi$ on G_n 。

次に $E \in C$ に含まれる $\mathcal{O}$ の projection とする。

$$i \leq k, n \geq 1, \quad \Phi(EP(i; E_n, E)P(k; E_n, C)) < (i+1)\Phi(E_n P(i; E_n, E)P(k; E_n, C))$$

$$k\Phi(E_n P(i; E_n, E)P(k; E_n, C)) < \Phi(P(i; E_n, E)P(k; E_n, C))$$

$$\begin{aligned} \Phi(E) - \Phi(EP(0; E_n, E)) &= \sum_{1 \leq i \leq k < \infty} \Phi(EP(i; E_n, E)P(k; E_n, C)) \\ &< \sum_{1 \leq i \leq k < \infty} \frac{i}{k} \Phi(P(i; E_n, E)P(k; E_n, C)) \\ &\quad + \sum_{1 \leq k < \infty} \Phi(E_n P(i; E_n, E)P(k; E_n, C)) \\ &\leq \sum_{1 \leq i \leq k < \infty} \frac{i}{k} P(i; E_n, E)P(k; E_n, C) \\ &\quad + \Phi(E_n) \end{aligned}$$

$$- \text{よ} \Phi(EP(0; E_n, E)) \leq \Phi(E_n), \quad \Phi(E_n) \leq \frac{1}{2^n} \cdot I \quad \text{"} \text{か} \text{"} \text{ } s, \quad n \rightarrow \infty$$

$$\Phi(E) \leq \Psi(E), \quad (E \in \mathcal{O}^P, E \leq C). \quad \Phi(C) = \Psi(C) = C \quad \text{"} \text{か} \text{"} \text{ } s \quad \Phi = \Psi \text{ on } C.$$

$$\text{よ} \quad \Phi = \Psi.$$

§ 2. Non-singular transformation T と cross product W^* -algebra $(\mathcal{O}_T, \mathcal{F}_T)$

2.1. 準備.

$(\Omega, \mathcal{B}, P)$ を抽象ルベーグ空間で $P(\Omega) = 1$ とする。 T を Ω 上の non-singular transformation (i.e. Ω から Ω への 1 対 1, onto の可測写像で逆も可測, かつ non-singular condition $P(A) = 0$ iff $P(T^{-1}A) = 0$ をみたす) とする。 invariant sub σ -field i.e. invariant set $(T^{-1}A = A)$ の全体から成る sub σ -field を $\mathcal{F}_T$ で表わす。 $\mathcal{B} \ni A$ に対し A を含む最小の invariant set $\bigcup_{n=0}^{\infty} T^n A$ を $\bar{A} \in \mathcal{F}_T$ で表わす。

可測集合の間の同値関係を次で定義する。 A と $B \in \mathcal{B}$ が T の下で同値であるとは、 A と B の可算分割 $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}, \{B_n\}_{n=0}^{\infty}$ が存在し

$T^n A_n = B_n$ をみたす n と n' に対し $A \sim B$ と表わす。順序関係 $A \prec B$ は, $\exists B' \subset B$ が存在し $A \sim B'$ をみたすことをいう。 $A \sim B \subset A$ ならば $B=A$ のとき A を bounded set, そうでないとき unbounded set という。同値関係 $\sim$ は同値律をみたす $A \prec B, B \prec A$ ならば $A \sim B$ 。

n を T から $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上の unitary operator U^n :

$$U^n f(\omega) = f(T^n \omega) (X_{-n}(\omega))^{1/2}, \quad X_{-n}(\omega) = \frac{dT^n P}{dP} \quad T^n P(A) = P(T^n A)$$

が定まる。unitary group $\{U^n\}_{-\infty < n < \infty}$ は可換 W^* -algebra $L^\infty(\Omega, \mathcal{B}, P)$ (i.e. bounded operator L_h の全体, h は bounded ft. $L_h f = h(\omega) f(\omega)$, $f \in L^2$) に作用する自己同型写像群 $\mathcal{U} = \{U^n, U^n\}_{-\infty < n < \infty}$, i.e. $L^\infty \ni L_h \rightarrow U^n L_h U^n \in L^\infty$ を定める。集合の間の同値関係とは自己同型写像群 $\mathcal{U}$ の下での L^∞ の projections の間の同値関係, $L_{\chi_A} = \sum_{-\infty < n < \infty} L_{\chi_{A_n}}$, $L_{\chi_B} = \sum_{-\infty < n < \infty} U^n L_{\chi_{A_n}} U^n$ のことである。

Lemma (M. Osikawa [6]) $A, B \in \mathcal{B}$ に対し, $\exists G \in \mathcal{F}$ が存在して

$$(1) A \cap G \prec B \cap G, \quad (2) B \cap G^c \prec A \cap G^c$$

2.2. Cross product W^* -algebra $(\mathcal{R}_T, \mathcal{F}_T)$.

Murray-Neumann [5] に従って, $\mathcal{U}$ 自己同型写像群 $\mathcal{U}$ と可換 W^* -algebra L^∞ の cross product W^* -algebra $(\mathcal{R}_T, \mathcal{F}_T)$ を構成する。[5] では non-singular transformation group が ergodic であり, free action と仮

定しているが、ここでは少し複雑にはるがそれらを仮定せずに構成する(但し変換群は1生成元ではあるけれど)。

各 $n (1 \leq n < \infty)$ に対し Ω_n を周期 n の集合 $\{T^k \omega = \omega, T^k \omega \neq \omega, 0 \leq k < n\}$, Ω_a を非周期的集合 $\{T^k \omega \neq \omega, \forall k \neq 0\}$ とする。確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ が

ルベーグ空間だからこれらは可測(非可測)集合にはる。確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ の $\Omega_n (n=1, 2, \dots, a)$ への制限を $(\Omega_n, \mathcal{B}_n, P_n)$ で表わす。

$0 \leq i < n < \infty$ に対し 2変数関数 $F(\omega, k)$; $0 \leq k \leq n-1, F(\cdot, k) \in L^2(\Omega_n, \mathcal{B}_n, P_n)$

$F(\omega, k) = 0$ a.s. $k \neq i$, の全体から成る Hilbert 空間を $\mathcal{H}_{n,i}$,

$-\infty < i < \infty$ に対し 2変数関数 $F(\omega, k)$; $-\infty < k < \infty, F(\cdot, k) \in L^2(\Omega_a, \mathcal{B}_a, P_a)$

$F(\omega, k) = 0$ a.s. $k \neq i$, の全体から成る Hilbert 空間を $\mathcal{H}_{a,i}$ とする。

Hilbert sum. $\mathcal{H}_n = \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{H}_{n,i}, \mathcal{H}_a = \sum_{-\infty < i < \infty} \mathcal{H}_{a,i}, \mathcal{H}_T = \sum_{n=1}^a \mathcal{H}_n \oplus \mathcal{H}_a$ とおく。

$J_{n,i} \in L^2(\Omega_n, \mathcal{B}_n, P_n)$ から $\mathcal{H}_{n,i}$ への自然な埋め込み(これは isometry)

とある $n=1, 2, \dots, a$. 各 $\mathcal{H}_n$ 上の bounded operator E は $L^2(\Omega_n, \mathcal{B}_n, P_n)$ 上

の bounded operator による行列表示 $E \sim \langle E_{k,l} \rangle, E_{k,l} = J_{n,k}^* E J_{n,l}$

で一意に表わされる。

各 $n=1, 2, \dots, a$ に対し $\mathcal{H}_n$ 上の bounded operators $\hat{L}_n$; $h \in L^\infty$

$$\hat{L}_n \sim \langle E_{k,l} \rangle \quad E_{k,l} = \begin{cases} L_n & \text{if } k=l \\ 0 & \text{if } k \neq l \end{cases}$$

と unitary operators $\hat{U}^n$;

$$\hat{U}^n \sim \langle E_{k,l} \rangle \quad E_{k,l} = \begin{cases} U^n & \text{if } k-l=n \\ 0 & \text{if } k-l \neq n \end{cases}$$

から生成される w^* -algebra $(\mathcal{O}_n, \mathcal{H}_n)$ で表わし, それは a product w^* -algebra $\prod_{n=1}^a \mathcal{O}_n \times \mathcal{O}_a \in \mathcal{O}_T$ で表わす。 $(\mathcal{O}_T, \mathcal{H}_T)$ は cross product.

w^* -algebra といふ。 Ω 上の bounded ft. h を Ω_n へ制限した関数 h_n ($n=1,2,\dots,a$) を表わす。 $\exists \mathcal{O}_T$ の bounded operator $(\hat{L}_{h_n})_{n=1,2,\dots,a} \in \hat{L}_h$ を表わす。

Lemma (Neumann [5]) (1) $E = (E^n)_{n=1,2,\dots,a} \in \mathcal{O}_T$ $E \sim \langle E_{k,l}^n \rangle$
 $\Rightarrow \exists \{ \varphi_k^n \}_{-\infty < k < \infty} \subset L^\infty(\Omega_n, \mathcal{B}_n, P_n)$ such that $E_{k,l}^n = L_{\varphi_{k-l}^n} U^{k-l}$ $n=1,2,\dots,a$
 (2) $\mathcal{O}_T$ の center $\mathcal{Z}_T = \{ \hat{L}_h \mid h \text{ は } \mathbb{R}\text{-可測有界可測関数} \}$

エルゴード性と free action は仮定してゐないが証明は [5] と同様。 (1) の場合簡単に $E \sim \langle L_{\varphi_{k-l}} U^{k-l} \rangle \in \mathcal{O}_T$ ($\varphi_{k-l}|_{\Omega_n} = \varphi_{k-l}^n$) を表わす。

2.3. Bounded set と finite projection

我々の目的は。

(1) Ω -set が bounded $\iff$ 基礎 Hilbert 空間 $\mathcal{H}_T$ が finite.

(2) $A \sim B \iff \hat{L}_{\chi_A} \overset{\mathcal{O}_T}{\sim} \hat{L}_{\chi_B}$

を示すことである。

Lemma 2.1. $E \sim \langle L_{\varphi_{k-l}} U^{k-l} \rangle \in \mathcal{O}_T$ に対し。

(1) E が Hermitian ならば $\varphi_k(w) = \overline{\varphi_k(T^{-k}w)}$ a.s. w .

(2) E が positive operator $\neq 0 \Rightarrow \varphi_0(w) \geq 0$ a.s., $P(\varphi_0(w) > 0) > 0$.

Proof. (1) は明か。 $\mathcal{O}_T$ に属す positive op. E の root を

$E^{\frac{1}{2}} \sim \langle L_{h_{k-l}} U^{k-l} \rangle$ とおくと $E^{\frac{1}{2}}$ は hermitian であり $h_{-k}(\omega) = h_k(T^k \omega)$ a.s.
 $E^{\frac{1}{2}} E^{\frac{1}{2}} = E$ より $\varphi_0(\omega) = \sum_{-\infty < k < \infty} h_{-k}(\omega) h_k(T^k \omega) = \sum_{-\infty < k < \infty} |h_{-k}(\omega)|^2 \geq 0$.
 $\notin 1$ $\varphi_0(\omega) = 0$ a.s. かつ $h_k(\omega) = 0$ a.s. ならば $E^{\frac{1}{2}} = 0$.

Lemma 2.2 $A \sim B \Rightarrow \widehat{L}_{\chi_A} \sim_{\mathcal{O}_T} \widehat{L}_{\chi_B}$

Proof. $\{A_n\}_{-\infty < n < \infty}, \{B_n\}_{-\infty < n < \infty} \in A, B$ の分割で $T^n A_n = B_n$ とおくと
 (i) 3 とする。 $V \sim \langle L_{\chi_{A_{k-l}}} U^{k-l} \rangle \in \mathcal{O}_T$ は partially isometry であり
 $V^* V = \widehat{L}_{\chi_A}, V V^* = \widehat{L}_{\chi_B}$ 。

Theorem II Ω : bounded $\iff \mathcal{B}_T$: finite.

Proof. 十分性は Lemma 2.2. からあるから必要性を証明する。
 $\notin 1$ 基礎空間 $\mathcal{B}_T$ が infinite ならば無限可算個の互いに直交する
 同値な projections $\{E_n\}_{n \geq 0}$ が存在する。 E_0 は initial set, E_n は final set
 とする $\mathcal{O}_T$ の partially isometry $V^{(n)}$ とする。 $V^{(n)} \sim \langle L_{\varphi_{k-l}^{(n)}} U^{k-l} \rangle$,
 $E_n \sim \langle L_{h_{k-l}^{(n)}} U^{k-l} \rangle$ とおく。

$$h_0^{(n)}(\omega) = \sum_{-\infty < k < \infty} |\varphi_k^{(n)}(\omega)|^2 \quad \text{a.s.} \quad \forall n.$$

$$h_0^{(n)}(\omega) = \sum_{-\infty < k < \infty} |\varphi_k^{(n)}(T^k \omega)|^2 \quad \text{a.s.} \quad \forall n.$$

Lemma 2.1 から $\delta > 0$ は可測集合 $A_\delta = \{h_0^{(n)}(\omega) > \delta\}$ に対し $P(A_\delta) > 0$
 とおけるように選べる。

$$g_N^{(n)}(\omega) = \sum_{-N \leq k \leq N} |\varphi_k^{(n)}(\omega)|^2, \quad f_N^{(n)}(\omega) = \sum_{-N \leq k \leq N} |\varphi_k^{(n)}(T^k \omega)|^2$$

とおく。 $\forall n$ と $0 < \forall \varepsilon < \frac{P(A_\delta)}{2}$ とおくと, $\exists N_n > 1$ such that

$$A_\delta^{(n)} = \left\{ \omega \in A_\delta \mid g_{N_n}^{(n)}(\omega) > h_0^{(n)}(\omega) - \frac{\delta}{2} \right\}$$

$$P(A_\delta^{(n)}) > P(A_\delta) - \frac{\varepsilon}{2^n}$$

$$g(\omega) = \inf_{-\infty < n < \infty} g_{N_n}^{(n)}(\omega) \quad \text{とすれば} \quad 0 \leq g(\omega) \leq h_0^{(n)}(\omega), \quad P(g(\omega) > 0) > 0.$$

τ : $L^\infty(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上の sub additive functional $\bar{\sigma}$ を次で定義す

$$\bar{\sigma}(h) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \int h(T^i \omega) dP(\omega) \quad h \in L^\infty$$

$\bar{\sigma}$ は次の性質を満たすことが容易に分かる。

$$(1) \bar{\sigma}(1) = 1 \quad (2) \bar{\sigma}(ah) = a\bar{\sigma}(h) \quad a: \text{定数} \quad (3) h_1 \leq h_2 \Rightarrow \bar{\sigma}(h_1) \leq \bar{\sigma}(h_2)$$

(4) 有限個の有界可測関数 $h_1, h_2, \dots, h_k$ と有限個の整数 $n_1, n_2, \dots, n_k$

$$\text{に対し} \quad \bar{\sigma}\left(\sum_{i=1}^k h_i(T^{n_i} \omega)\right) = \bar{\sigma}\left(\sum_{i=1}^k h_i(\omega)\right)$$

$$\text{と} \quad \sum_{n \geq 0} E_n \leq I \quad \text{だから Lemma 2.1 から} \quad \sum_{n \geq 0} h_0^{(n)}(\omega) \leq 1 \quad \text{a.s.}$$

従って $\bar{\sigma}$ の性質から $\forall k \geq 1$ に対して

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}\left(\sum_{i=0}^k f_{N_i}^{(i)}\right) &\leq \bar{\sigma}\left(\sum_{i=0}^k h_0^{(i)}\right) \\ &\leq \bar{\sigma}(1) = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}\left(\sum_{i=0}^k f_{N_i}^{(i)}\right) &= \bar{\sigma}\left(\sum_{i=0}^k g_{N_i}^{(i)}\right) \\ &\geq (k+1) \bar{\sigma}(g) \end{aligned}$$

故に $\bar{\sigma}(g) \leq \frac{1}{k+1}$ 。 k は任意だから $\bar{\sigma}(g) = 0$ 。 従って τ 。

$$\inf_{0 \leq n} \int g(T^n \omega) dP(\omega) = 0, \quad P(g(\omega) > 0) > 0, \quad g(\omega) \geq 0 \text{ a.s.} \quad \text{だから}$$

$$\equiv A \subset \{g(\omega) \neq 0\} \quad \text{such that} \quad P(A) > 0, \quad \inf_{n \geq 0} P(T^n A) = 0.$$

従って $\exists n_1 > 1$ such that, $P(T^{n_1} A) < \frac{\alpha}{2^2}$; $\alpha = P(A)$ 。

測度 $P(T^{n_1} \cdot)$ は P に同じで絶対連続だから $\exists n_2 > n_1$ such that

$$P(T^{-n_2} A) < \frac{\alpha}{2^3} \times 2, \quad P(T^{n_1 - n_2} A) < \frac{\alpha}{2^3} \times 2$$

以下帰納的に増大数列 $\{n_k\}_{k \geq 1}$ があって $P(T^{n_j - n_k} A) < \frac{\alpha}{2^{k+1}} \times k, j=0, 1, \dots, k-1, k \geq 1$
 $W = A - \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=0}^{k-1} T^{n_j - n_k} A$ とおけば, W は $P(W) > 0$, $T^{n_i} W \cap T^{n_j} W = \emptyset \ (i \neq j)$
 をみたす。(このように性質をもつ集合を weakly wandering set
 と, Hajian-Kakutani は示している)。従って, Ω は unbounded set.

全空間 Ω は次の3つの $\mathcal{F}$ -可測集合に一意的に分割される。

- $\Omega_b, \Omega_{\sigma-b}, \Omega_{\infty} \in \mathcal{F}$ (1) $\Omega = \Omega_b + \Omega_{\sigma-b} + \Omega_{\infty}$ (disjoint).
 (2) Ω_b ; bounded set (3) $\Omega_{\sigma-b}$; unbounded set かつ $\exists A$; bounded
 set such that $\bar{A} = \Omega_{\sigma-b}$ (4) Ω_{∞} の任意の可測部分集合 ($\neq \emptyset$)
 は unbounded.

Lemma 2.3. (1) $\Omega_{\infty} \supset \forall B, B \perp \bar{B}$ (2) $\Omega_{\sigma-b} \supset \forall C$ 1 =
 対 ($\exists G \in \mathcal{F}$ such that $C \cap G \perp \bar{C} \cap G, C \cap (\Omega - G)$; bounded.
 証明は略す。

Theorem III. $A \perp B \iff \hat{\chi}_A \overset{\mathcal{M}_T}{\sim} \hat{\chi}_B$

Proof. 必要性は Lemma 2.2 の証明より。十分性を4
 段階に分けて証明する。1段: $\Omega = \Omega_b$. $\exists G \in \mathcal{F}$ such that
 $A \cap G \perp B \cap G$ かつ B の直部分集合 B' に対して $A \cap G \perp B' \cap G$
 は $\hat{\chi}_{B \cap G} \overset{\mathcal{M}_T}{\sim} \hat{\chi}_{B' \cap G}$ 従って, $\hat{\chi}_{B \cap G}$ は infinite projection
 i.e. $\mathcal{H}_T$ は infinite space. Theorem II により Ω は unbounded set. = 2

は仮定に矛盾する。よって M. Osikawa の比較定理 ^{§2.2.1} から $A \overset{P}{\sim} B$ となる。同様に $A \overset{Q}{\sim} B$ だから $A \overset{I}{\sim} B$ 。

2段; $\Omega = \Omega_\infty$. $\hat{L}_{X_A} \overset{Q}{\sim} \hat{L}_{X_B}$ だから $\overline{\hat{L}_{X_A}} = \overline{\hat{L}_{X_B}}$. $k=3$ で $\overline{\hat{L}_{X_A}} = \hat{L}_{X_{\bar{A}}}$ だから $\bar{A} = \bar{B}$. Lemma 2.3 から $A \overset{I}{\sim} B$.

3段; $\Omega = \Omega_{\sigma-b}$. Lemma 2.3 から $\exists G \in \mathcal{F}_0$ such that.

$A \cap (\Omega - G), B \cap (\Omega - G)$; bounded, $A \cap G \overset{I}{\sim} \bar{A} \cap G = \bar{B} \cap G \overset{I}{\sim} B \cap G$

1段の場合と同様に $A \cap (\Omega - G) \overset{I}{\sim} B \cap (\Omega - G)$. 故に $A \overset{I}{\sim} B$.

4段; 一般. 各不変集合上で A, B が同値だから $A \overset{I}{\sim} B$.

§3. 不変密度関数と不変測度

3.1. 不変密度関数の存在

もし同値有限不変測度 μ ($\mu(A) = 0$ if and only if $p(A) = 0$ とした可測度 μ は p に関して同値であるという。 $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$ ならば μ も不変測度という) が存在すれば G.D. Birkhoff の「個別エルゴード定理」から

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi_A(T^i \omega) \longrightarrow \mu(A | \mathcal{F}_0) \text{ a.s.} \quad (\mu(\Omega) = 1 \text{ とする})$$

このことは、同値有限不変測度は必ずしも一意ではないけれども、それらの invariant sub σ -field $\mathcal{F}_0$ に関する条件付確率は一致することを示している。

$k=3$ で E. Hopf [3] は Ω -set が bounded ならば同値有限不変測度が存在することを示したけれども、我々は同じ条件の下に

先験的に不変測度を与えることはなく、上記の極限関数を, cross product W^* algebra $\mathcal{O}_T$ の中心の値をとる有限相対次元関数を用いて定め, このことから同値有限不変測度を構成し, かつそのすべての形を決めよう.

Definition 3.1. $\mathcal{B}$ から $L_+^\infty(\Omega, \mathcal{B}, P)$ へ a map $\psi(w, A)$ ($A \in \mathcal{B}$, $w \in \Omega$) が次を満たすとき不変密度関数という.

- (1) 可算加法性. i.e. $\psi(w, \sum_{n=1}^\infty A_n) = \sum_{n=1}^\infty \psi(w, A_n)$ a.s. $\{A_n\}_{n \geq 1}$: disjoint.
- (2) $\psi(w, A) = 0$ a.s. $\Leftrightarrow A = \emptyset$
- (3) $A \sim B \Rightarrow \psi(w, A) = \psi(w, B)$ a.s.
- (4) $\psi(w, A \cap B) = \psi(w, A) \chi_B(w)$ $B \in \mathcal{F}$.
- (5) $\psi(w, \Omega) = 1$ a.s.

Theorem IV Ω が bounded ならば一意に不変密度関数が存在する.

Proof. Ω が bounded ならば $\mathcal{H}_T$ が finite (Theorem II). 従って中心の値をとる有限相対次元関数 Ψ_T が存在する (Theorem III). Neumann の Lemma ^{§2.22} から各 $A \in \mathcal{B}$ に対し $\mathcal{F}$ -可測な有界関数 $\psi(w, A)$ が存在し $\Psi_T(\hat{L}_{\chi_A}) = \hat{L}_{\psi(w, A)}$ である. $\psi(w, A)$ は Def. 3.1 の (1)~(5) を満たす. もし別に不変密度関数 $\psi'(w, A)$ が存在すれば $E \sim \langle L_{g_{k-2}} \cup^{k-2} \rangle \in \mathcal{O}_T$ に対し $\Psi(E) = \hat{L}_{\int h_0(w) \psi'(w, dw)}$ となる.

$$F \sim \langle L_{f_{k-2}} U^{k-2} \rangle \in \mathcal{Q}_T$$

$$\begin{aligned} \Phi(F^*F) &= \widehat{L} \int \sum_k f_k(T^k w') \overline{f_k(T^k w')} \psi'(w, dw') \\ &= \widehat{L} \int \sum_k f_k(w') \overline{f_k(w')} \psi'(w, dw') \\ &= \Phi(FF^*) \end{aligned}$$

をみたすから Φ は中心の値をとる有限相対次元関数。それは一意性から $\Phi = \Psi$ 、従って $\psi' = \psi$ 。

3. Z. 同値有限不変測度の存在

Theorem V Ω -set が bounded ならば同値有限不変測度が存在し、それはすべて次の形で与えられる、

$$\int \psi(w, A) d\mu(w) \quad A \in \mathcal{B}$$

ここで $\psi(w, A)$ は不変密度関数、 μ は $\mathcal{F}$ 上の任意の有限測度、 $\mathcal{F}$ の上で P と同値 ($\mu(A)=0$ 当且 $P(A)=0$, $A \in \mathcal{F}$)。

Proof. Theorem IV から $\int \psi(w, A) d\mu(w)$ が同値有限不変測度であることが分かる。一方 ν を任意の同値有限不変測度とすれば、 ν の $\mathcal{F}$ に関する条件付確率 (但し ν は normalized してある) は Definition 3.1 の (1) ~ (5) をみたすから、一意性によりそれは不変密度関数に他ならない。 ν を ν の $\mathcal{F}$ への制限とすれば

$$\nu(A) = \int \psi(w, A) d\nu_{\mathcal{F}}(w) \quad A \in \mathcal{B}.$$

文献

- [1] J. Dixmier, Les algebres d'operateurs dans l'espace hilbertien, Gauthier - Villars (1957).
- [2] A. Hajian - Y. Ito, Cesaro sums and measurable transformations, J. Combinatorial Theory 7 (1969), 239-254.
- [3] E. Hopf, Theory of measures and invariant integrals, Trans. Amer. Math. Soc., 34 (1932), 373-393.
- [4] F. J. Murray - J. von Neumann, On rings of operators, Ann. Math., 37 (1936), 116-229.
- [5] J. von Neumann, On rings of operators III, Ann. Math., 41 (1940) 94-161.
- [6] M. Osikawa, Construction of invariant measures, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., 25 (1971), 182-189.
- [7] O. Takenouchi, 関数解析, 朝倉書店 (1968).

附記. Theorem II, III は次のことを示している。

$L^\infty(\Omega, \mathcal{B}, P)$ の 2 つの projection L_{X_A}, L_{X_B} が $L^\infty(\Omega, \mathcal{B}, P)$ の ある bounded operators $\{L_{g_n}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ に対し。

$$(*) \begin{cases} L_{X_A} = \sum_{-\infty < n < \infty} L_{g_n} L_{g_n}^* \\ L_{X_B} = \sum_{-\infty < n < \infty} U^n L_{g_n} L_{g_n}^* U^{-n} \end{cases}$$

をみたしていることは、実は bounded operators $\{L_{g_n}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ と $\{L_{X_n}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ と互いに直交する projections $\{L_{X_n}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ を選ぶことが出来る、つまり A のある可算分割 $\{A_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ が存在し、 $\{B_n = T^n A_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ が B の可算分割になるように出来ることを示している。従って (*) の関係が同値性をみたしていることも分かる。