

非可換 Hardy 空間の最近の結果

新潟大 理 齊藤 吉助

§1. 序. 今まで、関数環の理論を作用素環に導入する試みが数回なされ、作用素環の研究に寄与している。1967 年、Arveson [1] は w^* -Dirichlet 環の非可換化として、subdiagonal 環を定義したが、最近、河村-富山 [4], Loeb-Muhly [5], Zsido [3] によつて、von Neumann 環上の flow によつて定義される非負なスペクトラムをもつ集合が subdiagonal 環になることから、その構造やそれに関する不変部分空間の研究が、なされている。([6, 7, 8, 10, 12])。

このような研究において、関数環の概念、特に Beurling's Th. などの不変部分空間についての理論を作用素環に導入するとき、それがいかなる位置にあるのか、元来の作用素環の概念とどんなふうに結びつくのか、さらに、関数環の理論を作用素環の立場から、見直すことができるかというような点で、興味深い。

そこで、本講演では、特に、flow によつて与えられる非可

換 Hardy 空間についての今までの結果を紹介するのが目的である。 M は von Neumann 環, G は totally ordered dual P をもつ locally compact abelian group. $P_+ = \{r \in P : r \geq 0\}$. $\{\alpha_g\}_{g \in G}$ は M 上の σ -弱連続 1 径数同型群とすると, $x \in M$ の spectrum は $\text{Sp}_\alpha(x)$ とすると, $H^\alpha(x) = \{x \in M : \text{Sp}_\alpha(x) \subset P_+\}$ とし, 定義される。このとき, $G = \mathbb{T}$ (単位円) のときの $H^\alpha(x)$ の構造, $G = \mathbb{R}$ の場合の不変部分空間の形の決定、特に, M が faithful normal normalized trace τ をもつときについて示す。最後に接合積の中に定義される $H^\alpha(x)$ について Beurling's Theorem が成り立つための必要十分条件, σ -弱部分環としての $H^\alpha(x)$ の極大性などについて述べる。

§ 2. M は Hilbert 空間 H 上の von Neumann 環, G は 局所コンパクト可換群で $P = \widehat{G}$ (G の双対) で totally ordered とする。 $P_+ = \{r \in P : r \geq 0\}$ とおく。 $\{\alpha_g\}_{g \in G}$ は M 上の σ -弱連続 1 径数同型群とする。しかも $\{\alpha_g\}_{g \in G}$ は trivial でないとする。任意の $f \in L^1(G)$, $x \in M$ に対して

$$\alpha(f)x = \int_G \alpha_g(x) f(g) d\mu(g) \quad (\mu: G \text{ の Haar measure})$$

とし f と x の convolution を定義する。 $J(x) = \{f \in L^1(G) : \alpha(f)x = 0\}$ とすると, $J(x)$ は $L^1(G)$ の左イデアルになるので, x の support とし。

$$\text{Sp}_\alpha(x) = \text{Null of } J_\alpha(x) = \bigcap_{f \in J_\alpha(x)} \{r \in \mathbb{P} : \hat{f}(r) = 0\}$$

のように定義する。但し、 $\hat{f}(r) = \int_G \langle g, r \rangle f(g) d\mu(g)$ とする。今 E を $\mathbb{P}$ の部分集合とすると flow の spectral subspace を

$$M^\alpha(E) = \{x \in M : \text{Sp}_\alpha(x) \subset E\}$$

と定義する。このとき、 $M^\alpha(E)$ は M の部分空間になる。 E が $\mathbb{P}$ の閉集合ならば、 $M^\alpha(E)$ は M の σ -弱閉部分空間になる。そこで、特に、 $H^\alpha(\alpha) = M^\alpha(\mathbb{P})$ 、 $H_0^\alpha(\alpha)$ を $M^\alpha(\mathbb{P} \setminus \{0\})$ の σ -弱閉包とする。この $H^\alpha(\alpha)$ を我々は flow $\{\alpha_g\}_{g \in G}$ によって与えられる非可換 Hardy 空間という。

Proposition 1. 1) $H^\alpha(\alpha)$ は M の非共役な σ -弱閉部分環である。

2) $H_0^\alpha(\alpha)$ は $H^\alpha(\alpha)$ の 2-sided ideal である。

3) $H^\alpha(\alpha) + H^\alpha(\alpha)^*$ は M 中 σ -弱稠密である。

さらに $M(\alpha) \equiv H^\alpha(\alpha) \cap H^\alpha(\alpha)^*$ とおくと

$$M(\alpha) = \{x \in M : \alpha_g(x) = x (\forall g \in G)\} = M^\alpha(\{0\})$$

となる。そこで、この $H^\alpha(\alpha)$ の構造を調べるために次の定義を述べる。

定義 1. D を M の von Neumann ^{部分}環 とする。 Φ を M から D の上への σ -weakly continuous linear map とする。このとき、 Φ が normal expectation とは $\|\Phi\| = 1$ で $\Phi|_D$ が identity map であることをいう。 Φ が faithful とは $\Phi(x^*x) = 0$ をみたす $x \in M$ は 0 に限るとをいう。

定義 2. A は M の σ -弱部分環で $1 \in A$ とする。 ϕ は M から $A \cap A^*$ の上への faithful normal expectation とする。今 A が ϕ に属して subdiagonal 環とは次のことが成り立つときにいう。

(1). $A + A^*$ は M で σ -弱稠密

(2) ϕ は A 上乗法的, i.e. $\forall x, y \in A$ に對して $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ をみたす。

さらに A が maximal とは A を含む proper の ϕ に属して M の subdiagonal 環が存在しないときをいう。 A が finite とは, M に faithful normal finite trace τ が存在して, $\tau \circ \phi = \tau$ をみたすときにいう。

定理 1 ([4, 5, 13]) M から $M(G)$ の上への faithful normal expectation ϕ で, $\phi \circ \alpha_g = \phi$ ($\forall g \in G$) なるものが存在するとすれば, $H^\infty(\omega)$ は ϕ に属して maximal subdiagonal 環になる。しかも, このとき $H^\infty(\omega) = \{x \in H^\infty(\omega) : \phi(x) = 0\}$ が成り立つ。

この定理の条件は, α_g -invariant normal state が十分にたくさん (M_+ と 0 を分離する) あることと必要十分条件である。この条件は G -finite という条件でよく知られている。

今 G を compact とする。 $\forall x \in M, \forall r \in \mathbb{R}$ に對して,

$$\varepsilon_r(x) = \int_G \overline{\langle g, r \rangle} \alpha_g(x) d\mu(g)$$

と定義する。今 $M_r = \{x \in M : \alpha_g(x) = \langle g, r \rangle x\}$ とおくと

$$\varepsilon_r(M) = M_r = M^\alpha(\{r\})$$

が成り立つ。特に、 ε_0 は M から $M(\alpha)$ へ 1 の faithful normal expectation で $\varepsilon_0 \circ \alpha_g = \varepsilon_0$ をみたす。しかも $\forall x \in M$ に対して $\text{Sp}_\alpha(x) = \{r \in \mathbb{P} : \varepsilon_r(x) \neq 0\}$ より、

$$H^\infty(\alpha) = \{x \in M : \varepsilon_r(x) = 0 \ (\forall r < 0)\}$$

をみたす。このことから $\{\varepsilon_r(x)\}_{r \in \mathbb{P}}$ は x の Fourier 係数と考える
 511. 特に $M = L^\infty(\mathbb{T})$ ($\mathbb{T}$: 単位円) とする。 $\forall f \in L^\infty(\mathbb{T})$ に対して、
 $\alpha_{e^{it}} f(e^{is}) = f(e^{i(t+s)})$ とすると、 $\{\alpha_{e^{it}}\}_{t \in \mathbb{T}}$ は $L^\infty(\mathbb{T})$ 上の σ -弱連続一
 径数同型群で、periodic, ergodic である。しかも

$$H^\infty(\mathbb{T}) = \{f \in L^\infty(\mathbb{T}) : \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(e^{it}) dt = 0 \ (\forall n < 0)\}$$

とおくと、 $\varepsilon_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f dt$ で、 $H^\infty(\alpha) = H^\infty(\mathbb{T})$ が成り立つ。これが、
 $H^\infty(\alpha)$ が非可換 Hardy 空間と呼ばれる理由である。この注
 意するべきことは、 $H^\infty(\mathbb{T})$ は $L^\infty(\mathbb{T})$ の中で σ -weakly closed subalgebra
 として maximal になる。さらに、一般の $H^\infty(\alpha)$ に対して、Th. 1
 から、 $H^\infty(\alpha)$ は subdiagonal 環としての maximality がわかる。また、
 $H^\infty(\alpha)$ はどんなときにも M の σ -weakly closed subalgebra として maximal
 になるか、というところが一つの興味がある。また $H^\infty(\mathbb{T})$ の場合は
 $L^\infty(\mathbb{T})$ の不変部分空間のすべて π が決定されていることから、
 $H^\infty(\alpha)$ においても、不変部分空間の形はどうなるかという興味

がある。よってこのことを次節以下で研究結果を述べる。

§ 3. M を Hilbert 空間 H 上の von Neumann 環とする。 $G = \mathbb{R}$ したがって $P = \mathbb{R}$ とする。このとき $\{\alpha_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ を M 上で考える。今 H^{lo} に属して不変な H の閉部分空間について調べる。

定義 3. $\mathcal{M}$ は H の閉部分空間で $H^{\text{lo}} \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$ とする。

(1) $\mathcal{M}$ は reducing $\Leftrightarrow H^{\text{lo}} \mathcal{M}^* \subseteq \mathcal{M}$.

(2) $\mathcal{M}$: left-normalized $\Leftrightarrow \bigwedge_{t \geq 0} \{M^{\text{lo}}(t, \omega) \mathcal{M}\}^{\text{cl}} = \mathcal{M}$.

(3) $\mathcal{M}$: right-normalized $\Leftrightarrow \bigvee_{t \geq 0} \{M^{\text{lo}}(t, \omega) \mathcal{M}\}^{\text{cl}} = \mathcal{M}$.

Proposition 1 (3) により $H^{\text{lo}} + H^{\text{lo}}^*$ は M で σ -弱稠密であるから、 $\mathcal{M}$: reducing subspace $\Leftrightarrow M \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$.

$\Leftrightarrow \mathcal{M} = PH$ とおくと M の projection P がある。

$\mathcal{N} \neq \{0\}$ non-reducing subspace に対して考察する。今 P は M' の projection とする。 $\Pi_P(x) = x|_{PH}$ ($x \in M$) と定義する。このとき Loeb-Muhly [5] により、次の定理が得られた。

定理 2 ([5, Theorem 5.2]). $\mathcal{M}$ は H の non-reducing subspace とする。 $\mathcal{M}$ が left-normalized ならば M' の projection P_1, P_2 ($P_1 \leq P_2$)

と $\mathcal{P}H$ 上の σ -連続 unitary 群 $U = \{U_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ が存在して,

$$\pi_p(\alpha_t(x)) = U_t \pi_p(x) U_t^* \quad (*)$$

$$\mathcal{M} = \{F([0, \infty)) \mathcal{P}H\} \oplus \mathcal{P}H \quad (**)$$

をみたす。但し、 F は $\mathcal{P}H$ 上の U_t の spectral measure, $P = P_2 - P_1$ とする。 $\mathcal{M}$ が right-normalized なことは (*) と $\mathcal{M} = \{F([0, \infty)) \mathcal{P}H\} \oplus E_1 H$ をみたす $\{U_t\}$ と P_1, P_2 があつてある。

この定理を $\mathcal{M}$ の Wold decomposition とする。

定義4. $\mathcal{A}$ を $B(H)$ の部分環とする。 $\mathcal{A}$ が reductive といふのは $\mathcal{A}\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$ なる H の任意の closed subspace $\mathcal{M}$ は $\mathcal{A}^* \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$ をみたす。

このとき、weakly closed non-self-adjoint reductive algebra は存在するかという問題は Reductive algebra question といふ。知られてゐるが、ここでは、定理2より σ -weakly closed non-self-adjoint reductive algebra は存在することを示す。

定理3. M を Π_∞ -factor で M' は Π_1 -factor とする。 τ を M 上の faithful normal semi-finite trace で $\{\alpha_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ を $\tau \circ \alpha_t = e^{\lambda t} \tau$ ($\lambda > 0$) をみたす M 上の σ -弱連続な flow とする。このとき、

$H^{\infty}(\alpha)$ は non-self-adjoint σ -weakly closed reductive algebra $\mathcal{Z}$

$H^{\infty}(\alpha)$ は $M\mathcal{Z}$ weakly dense となる。

この定理3によつて、Reductive algebra question は解決しない。
 しかるに、non-self-adjoint subalgebra において、weak topology
 と σ -weak topology の違いを示しているように思われる。

§4. この節では finite trace が存在する von Neumann 環 $\mathcal{M}$ に対して、 $H^{\infty}(\alpha)$ を定義し、Wiener Theorem や Beurling theorem としと知られている定理の一般化を考えることによつて、不変部分空間の形を決定するのを目的とする。

M を Hilbert 空間 H 上の von Neumann 環 $\mathcal{M}$ で $\mathcal{Z}$ を M 上の faithful normal finite trace で $\mathcal{Z}(1) = 1$ とする。今 $\{\alpha_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ を $\mathcal{Z}$ 上の faithful normal finite trace $\mathcal{Z} \circ \alpha_t = \mathcal{Z}$ をみたす M 上の σ -weakly continuous flow とする。このとき、 $\mathcal{Z}$ の α_t -invariant となる M から $M(\alpha)$ の上への faithful normal expectation E で $\mathcal{Z} \circ \alpha_t = \mathcal{Z}$ をみたすものが存在する。このとき、 $H^{\infty}(\alpha)$ は $\mathcal{Z}$ に関する finite, maximal, subdiagonal 環となる。今 x を H の closed operator (必ずしも有界でない) とする。 x が可測 (measurable) とは A と x が可換 (任意の $x \in M'$ に対して) とする。 $1 \leq p < \infty$ に対して、

$$\mathcal{L}^p(M, \mathcal{Z}) = \{x : \text{measurable}, \tau(|x|^p) = \int_0^{\infty} \lambda^p d\tau(e_x) < \infty\}$$

但し, $|x| = (x^*x)^{\frac{1}{2}}$ で $|x| = \int_0^\infty \lambda \, d\epsilon_x$ とする。このとき, L_p -ノルム
 $\|x\|_p = \tau(|x|^p)^{\frac{1}{p}}$ とすると, $L^p(M, \tau)$ は Banach 空間になる。 $S \subset L^p(M, \tau)$ に対して, $[S]_p$ は $L^p(M, \tau)$ における S の L^p -ノルム閉包とする。また $p = \infty$ のときは $L^\infty(M, \tau) = M$ とする。 $1 \leq p < \infty$ に対して, $\{\alpha_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ は $L^p(M, \tau)$ 上の isometry かつある $\mathbb{R}$ の強連続表現に一意に拡張できる ([cf. [10, Proposition 2.2]]) ので, この S の $L^p(M, \tau)$ における flow の spectral subspace が定義できる。そこで
 $H^p(\alpha) = \{x \in L^p(M, \tau) : S_{\mathbb{R}}(x) \subset [0, \infty)\}$ とする。また $H_0^p(\omega) = L^p$ -norm closure of $\{x \in L^p(M, \tau) : S_{\mathbb{R}}(x) \subset (0, \omega)\}$ とする。このとき

Proposition 2. $1 \leq p \leq \infty$, $1/p + 1/q = 1$ で $x \in L^p(M, \tau)$ とする。このとき次のことは同値。

- (1) $x \in H^p(\alpha)$.
- (2) $\forall y \in L^q(M, \tau)$ に対して $t \mapsto \tau(x\alpha_t(y))$ は $H^q(\mathbb{R})$ に属する。
- (3) $\forall y \in H_0^q(\omega)$ に対して $\tau(xy) = 0$.
- (4) $\forall y \in H_0^\infty(\omega)$ に対して $\tau(xy) = 0$.

Proposition 3. $1 \leq p < \infty$ とする。

- (1) Φ は $L^p(M, \tau)$ から $[M(\omega)]_p$ への norm 1 の projection Φ_p に一意に拡張できる。
- (2) $H_0^p(\alpha) = \{x \in H^p(\alpha) : \Phi_p(x) = 0\}$.

$$(3) \quad H^p(\alpha) = [H^\infty(\alpha)]_p, \quad H^p_0(\alpha) = [H^\infty_0(\alpha)]_p.$$

定理4. $\mathcal{M}$ を $L^p(M, \tau)$ の closed subspace で $H^\infty(\alpha)\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$ とする。

(1) $(H^\infty(\alpha) + H^\infty(\alpha)^*)\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$ であることと $\mathcal{M} = L^p(M, \tau)e$ を満たす M の ~~non~~ projection e が存在することは同値。

(2) $\{\alpha_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ が ergodic. であるから, $M(\alpha) = \mathbb{C}$ であるから $[H^\infty_0(\alpha)\mathcal{M}]_p \subseteq \mathcal{M}$ であることと $\mathcal{M} = H^p(\alpha)u$ を満たす M の unitary operator u が存在することは同値。

しかしながら, すべてこの不変部分空間を決定するには, かなり一般的に思える。そこで, この特別の場合として, 接合値により, この定義における非可換 Hardy 空間を次の節で考察する。

§5. M を faithful normal finite trace τ をもつ von Neumann 環とする。 $\tau(1) = 1$ とする。 $L^2(M, \tau)$ を §4 における空間とする。 α を M 上の任意の $*$ -automorphism で $\tau \circ \alpha = \tau$ とする。このとき, $\alpha(x) = uxu^*$ を満たす $L^2(M, \tau)$ 上の unitary operator u がある。 §

$$L^2 = \left\{ f: \mathbb{Z} \rightarrow L^2(M, \tau) : \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|f(n)\|^2 < \infty \right\}$$

とおく。 $\forall x \in M, \forall f \in L^2$ に対し

$$(L_x f)(n) = x f(n).$$

$$(R_x f)(n) = f(n) \alpha^n(x).$$

$$(L_S f)(n) = u f(n-1).$$

$$(R_S f)(n) = f(n-1).$$

と定義すると. L_x, R_x, L_S, R_S は L^2 上の有界線形作用素になる. $\{L_x\}_{x \in M} \equiv L(M)$, $\{R_x\}_{x \in M} \equiv R(M)$ とおく. $\mathcal{L}$ を $L(M)$ と L_S により生成された von Neumann 環, $\mathcal{R}$ を $R(M)$ と R_S により生成された von Neumann 環とする. このとき, $\mathcal{L}' = \mathcal{R}$, $\mathcal{R}' = \mathcal{L}$ が成り立つ. さらに, $\mathcal{L}_+$ を $L(M)$ と L_S により生成された $\mathcal{L}$ の σ -弱部分環, $\mathcal{R}_+$ を $R(M)$ と R_S により生成された $\mathcal{R}$ の σ -弱部分環とする. $(W_t f)(n) = e^{int} f(n)$ とおくと $\{W_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ は L^2 上の unitary 群になるのぞ. $\forall x \in \mathcal{L}$ に対して, $\beta_t(x) = W_t x W_t^*$ により $\mathcal{L}$ 上の σ -weakly continuous flow を定義する. このとき $\{\beta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ は $\mathbb{R}$ Period 2π の flow になるのぞ. $\mathbb{T}$ (単位円) 上の flow と考えよう. しかも $\mathcal{L}_+ = H^\infty(\beta)$ が成り立つ.

定義 5. $\mathcal{M}$ を L^2 の closed subspace とする.

- (1) $\mathcal{M}$: left-invariant $\Leftrightarrow \mathcal{L}_+ \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$.
- (2) $\mathcal{M}$: right-invariant $\Leftrightarrow \mathcal{R}_+ \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$.
- (3) $\mathcal{M}$: 2-sided invariant $\Leftrightarrow (\mathcal{L}_+ + \mathcal{R}_+) \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$.
- (4) $\mathcal{M}$: pure $\Leftrightarrow \bigcap_{n \geq 0} L_S^n \mathcal{M} = \{0\}$.
- (5) $\mathcal{M}$: full $\Leftrightarrow [\bigcup_{n \geq 0} L_S^n \mathcal{M}]_2 = \mathcal{M}$.

今 $H^2 = \{f \in L^2 : f(n) = 0 \ (\forall n < 0)\}$ とおく。 $\Leftarrow$ と $\Rightarrow$ 。
 $H^2 = [L^+]_2 = [R^+]_2$ で H^2 は pure & full 2-sided invariant subspace である。 $\Leftarrow$ と $\Rightarrow$ 。 不変部分空間の研究として、次の条件を考える。 Beurling's Theorem が成立するとは、 L^2 上のこの pure left-invariant subspace は VH^2 (V は $\mathcal{R}$ の partial isometry) にかけることをいう。 $\Leftarrow$ と $\Rightarrow$ 。

定理5. α が M の center 上で trivial であることと Beurling's Theorem が成り立つことは同値である。

このために、次の Lemma が必要である。

Lemma. $\mathcal{M}_i$ を L^2 の pure left-invariant subspace とする。 ($i = 1, 2$). P_i を L^2 から $\mathcal{M}_i \ominus L_g \mathcal{M}_i$ の上への projection とする。
 $\Leftarrow$ と $\Rightarrow$ $P_i \in L(\mathcal{M})'$ 。 もしも $L(\mathcal{M})'$ において $P_2 \leq P_1$ ならば、
 $\mathcal{M}_2 = V\mathcal{M}_1$ をみたす $\mathcal{R}$ の partial isometry V がある。

定理5の証明. ($\Rightarrow$) α が M の center $\mathcal{Z}(M)$ 上で trivial であるとする。
 $\mathcal{M}$ を L^2 の pure left-invariant subspace とする。 P を L^2 から $\mathcal{M} \ominus L_g \mathcal{M}$ の上への projection。 P_0 を L^2 から $H^2 \ominus L_g H^2 = [M^+]_2$ の上への projection とする。 $P, P_0 \in L(\mathcal{M})'$ 故 Comparability theorem を用い

て, $L_Z P \geq L_Z P_0$ かつ $(1-L_Z)P \leq (1-L_Z)P_0$ を満たす projection

$Z \in \mathcal{Z}(M)$ が存在する。 α が $\mathcal{Z}(M)$ 上 trivial 故 $L_Z \in \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$ 。

$L_Z \mathcal{H}$, $L_Z H^2$ は pure left-invariant subspace 故。 Lemma により, $L_Z H^2$

$= V_1 L_Z \mathcal{H}$ を満たす $\mathcal{R}$ の partial isometry V_1 があつる。同様にして,

$(1-L_Z)\mathcal{H} = V_2(1-L_Z)H^2$ を満たす $\mathcal{R}$ の partial isometry V_2 があつる。

ここより H^2 が full であることが示される。 $V_1 V_1^* = L_Z$ がわかる。 M の

finiteness より, $V_1^* V_1 = L_Z$ 。 $Z = Z^*$ $L_Z \mathcal{H} = V_1^* L_Z H^2$ 。 従つて

$V = V_1^* L_Z + V_2(1-L_Z)$ とおくと V は $\mathcal{R}$ の partial isometry で $\mathcal{H} = V H^2$ 。

($\Leftarrow$) 今 α が $\mathcal{Z}(M)$ 上で trivial ではないとすると, $\alpha(e) = 0$ を満たす $\mathcal{Z}(M)$ の projection $e (\neq 0)$ があつる。今 $\mathcal{H} = \{f \in L^2: f(n) = 0 \ (\forall n \leq 0), e f(-1) = f(-1)\}$ とおくと $\mathcal{H}$ は pure full left-invariant subspace として $L_e L_f^* \mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}$ である。今 $\mathcal{H} = V H^2$ (V は $\mathcal{R}$ の partial isometry) のことに注意すると $\mathcal{H}$ は full 故 V は unitary operator。 $Z = Z^*$

$$L_e L_f^* H^2 = L_e L_f^* V^* \mathcal{H} = V^* L_e L_f^* \mathcal{H} \subset V^* \mathcal{H} = H^2.$$

これより $L_e L_f^* \in \mathcal{L}_+$ を示すことができる。これは矛盾。 //

次に M が factor と $\mathcal{L}_+$ の maximality, と不変部分空間の形についての関係を示す。

定理 6. 次のことは同値

- (1). M は factor である。
- (2). $\mathcal{L}_+$ は $\mathcal{L}$ の maximal σ -weakly closed subalgebra である。
- (3). L^2 の $\mathcal{L}$ の $\mathcal{L}M \not\subseteq M$ なる 2-sided invariant subspace は $VH^2 = WH^2$ (V は $\mathcal{R}$ の unitary operator, W は $\mathcal{L}$ の unitary operator) に等しい。
- (4). H^2 の $\mathcal{L}$ の 2-sided invariant subspace は full かつ pure。
- (5). Beurling's theorem が成り立ち $L(M) \cap (\mathcal{L} \cap \mathcal{L}') = \mathbb{C}$ である。

以上のことより不変部分空間の形は α が $\mathcal{R}(M)$ 上で trivial でないときが複雑であるが、また興味深い。定理 6 の証明は [6] にゆずることとする。

そこで次に $M = L^\infty(X)$ (X : standard Borel space) の場合を考える。 α も $X \rightarrow X$ の measure preserving transformation で、 $\{\alpha^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ は無限群とする。このとき、 $\hat{\alpha}$ は M 上の $*$ -automorphism α に induce される。今これを ergodic と仮定する。このとき $\{\alpha^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ は freely acting になるから、 $\mathcal{L}$ と $\mathcal{R}$ は factor になる。また、 L^2 と $L^2(\mathbb{Z} \times X)$ を同一視することによって、部分空間は $L^2(\mathbb{Z} \times X)$ で考えることにする。このとき、 L_δ と R_δ から、次のような $\mathbb{Z} \times X \rightarrow \mathbb{Z} \times X$ の変換が induce される。 $\lambda(n, x) = (n+1, \alpha(x))$, $\rho(x, x) = (n+1, x)$ 。により、 τ を定義される。このとき

定理 7. $\mathcal{H}$ が $L^2(\mathbb{Z} \times \mathbb{X})$ の 2-sided invariant subspace である ことと
 $\lambda(B) \subseteq B$, $P(B) \subseteq B$, $\mathcal{H} = L^2(B)$ をみたす $B \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{X}$ が存在す
 る。

この結果は McAsey [6] の中にある。さらに、多くの結果が
 [6] において、精力的に研究されている。

参考文献はこの講義録の“非可換 Hardy 空間における分解
 定理とその応用”を見ること。