

Kac-Moody Lie環と Macdonald type の 恒等式について

東大 理 小池 和彦

以下 この稿の目的は 最近 話題にな、ている
Kac-Moody Lie環の定義とその性質を紹介し、更に 形式的
巾級数環の中で 無限積と無限和とを結びつける恒等式
"Weyl-Macdonald-Kac formula" を Kac-Moody Lie環
の表現論を用いて証明する, Moody, Kac, Lepowsky 等の方法を
紹介することである。その為 に まず 有限次元半単純Lie
環の復習から始める。

§0 有限次元半単純Lie環の復習

$\mathfrak{g}$ を複素数体 $\mathbb{C}$ 上の有限次元半単純Lie環, $\mathfrak{h}$ をその Cartan
部分環, C をその Cartan 行列とすると $\mathfrak{g}$ は次の様な良い
性質を持、ていた。

1° (分類定理)

$\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ を 複素数体上の単純Lie環, C, C' を対応する

Cartan 行列とすると

$$\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}' \iff \text{置換行列 } P \text{ が存在して } P^{-1}CP = C'$$

2°) (Root space への分解)

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_{\alpha} \quad (\Delta \text{ は } \mathfrak{g} \text{ の } \mathfrak{g} \text{ に関するルート系})$$

今 $(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})^*$ に辞書式順序を導入し $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l\} \subset \Delta$ をこの順序に関する simple root system とすると

3°) (構造定理)

$\mathfrak{g}_{\alpha_i}$ の基底 $e_i, i=1, 2, \dots, l$, $\mathfrak{g}_{-\alpha_i}$ の基底 $f_i, i=1, 2, \dots, l$ $\mathfrak{g}$ の基底 $h_i, i=1, 2, \dots, l$ を適当にとれば, $e_1, e_2, \dots, e_l, h_1, \dots, h_l, f_1, \dots, f_l$ は $\mathfrak{g}$ の生成元で次の基本関係を持つ。

$$(0.1) \quad \begin{cases} [h_i, h_j] = 0 & [h_i, e_j] = C_{ij} e_j, & [h_i, f_j] = -C_{ij} f_j \\ [e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i, & (\text{ad } e_i)^{-C_{ij}+1}(e_j) = 0 \quad (i \neq j) \\ (\text{ad } f_i)^{-C_{ij}+1}(f_j) = 0 \quad (i \neq j) \end{cases}$$

但し $C = (C_{ij})$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 行列である。

さらに半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の表現論については次の様な綺麗な定理が成立していた。

P を dominant integral weight の集合, 即ち

$$P := \left\{ \lambda \in (\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})^* ; \frac{2(\alpha_i, \lambda)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \in \mathbb{Z}, \frac{2(\alpha_i, \lambda)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \geq 0 \quad \forall i=1, 2, \dots, l \right\}$$

とすると

4°) (Elie Cartan の定理)

$\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現の同値類は P の元と 1:1 onto に

対応する。

この対応は (ρ, V) を $\mathfrak{g}$ の既約表現とし $V = \bigoplus_{\lambda \in (\mathfrak{h})^*} V_\lambda$ を V の weight space 分解, 即ち $V_\lambda = \{v \in V; \rho(h)v = \lambda(h)v, \forall h \in \mathfrak{h}\}$ とすると (ρ, V) に対して その highest weight を対応させることにより与えられる。

5°) (Weyl の character formula)

(ρ, V) を dominant integral weight $\mu \in P$ に対応する $\mathfrak{g}$ の既約表現とし その formal character χ_μ を

$$\chi_\mu := \sum_{\lambda: V \text{ の weight}} m_\lambda e^\lambda \quad m_\lambda \text{ は weight } \lambda \text{ の 重複度}$$

と定義すると

$$(0.2) \quad e^{-\mu} \chi_\mu = \frac{N(\mu)}{D}$$

但し $D, N(\mu)$ は W を $\mathfrak{g}$ の Weyl 群, ρ を正ルートの和の半分, 即ち $\rho := \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha$ とすると

$$D := \sum_{w \in W} (\det w) e^{w\rho - \rho}$$

$$N(\mu) := \sum_{w \in W} (\det w) e^{w(\mu + \rho) - (\mu + \rho)}$$

で与えられる。

さらに 上の character formula の分母 D は 次の様な積表示を持つ, といった。

6°) (Weyl の分母公式)

$$(0.3) \quad D = \sum_{w \in W} (\det w) e^{w\rho - \rho} = \prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^{-\alpha})$$

この式で $\rho - w\rho$ は, $\Phi_w := \{\alpha \in \Delta^+; w^{-1}(\alpha) \in \Delta^-\} = \Delta^+ \cap w\Delta^-$ と定義し Φ_w の元の和を $\langle \Phi_w \rangle$ と書くと

$\rho - w\rho = \langle \Phi_w \rangle$ で与えられる。即ち,

$$(0.3)' \quad D = \sum_{w \in W} (\det w) e^{-\langle \Phi_w \rangle} = \prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^{-\alpha})$$

§1 Kac-Moody Lie環とそのルート系及び Weyl 群の定義
Kac-Moody Lie環の定義は §0 の構造定理が出発点になる。その前にまず Cartan 行列の持つ性質を幾つか抽出した一般型 Cartan 行列 (以下 G.C.M と略記) を定義しておく。

定義

l 次正方行列 $C = (C_{\bar{i}\bar{j}})_{1 \leq \bar{i}, \bar{j} \leq l}$ が G.C.M であるとは次の 4 条件を満たす時云う。

- 1) $C_{\bar{i}\bar{j}} \in \mathbb{Z} \quad \bar{i}, \bar{j} = 1, 2, \dots, l$ 2) $C_{\bar{i}\bar{i}} = 2 \quad \bar{i} = 1, 2, \dots, l$
- 3) $C_{\bar{i}\bar{j}} \leq 0 \quad \forall \bar{i} \neq \bar{j}$ 4) $C_{\bar{i}\bar{j}} = 0 \iff C_{\bar{j}\bar{i}} = 0 \quad \forall \bar{i} \neq \bar{j}$

§0 の構造定理に於て Cartan 行列の代りに G.C.M を用いて生成元と基本関係により Lie 環 L を定義した時、正確には L は少し変更する必要があるが、 L は最早 有限

次元ではないが、にもかかわらず うまい L -module を
 と、てくれば §0 の 4°), 5°), 6°) の定理が成立するとい
 うのが Kac の重要な発見であつた。(Kac [3])

特に G.C.M. の中でも Euclidean type (後で定義を与える。)
 と呼ばれるものについて Weyl の分母公式を書き下したも
 のが Dedekind η -関数の n 乗 (n は単純 Lie 環の次元) の
 展開を与える Macdonald の恒等式になるというのが 以下
 紹介する話の筋道である。(Macdonald の恒等式の mysterious
 term の意味を Kac-Moody Lie 環を用いて見事に解釈し
 たのは Moody [8] である。)

まず Kac-Moody Lie 環の正確な定義から与えよう。

G.C.M. $C = (C_{ij})_{i,j=1,2,\dots,l}$ が与えられた時、 $\mathbb{C}$ 上の Lie 環
 $L_1(C)$ を $3l$ 個の生成元 $e_1, e_2, \dots, e_l, h_1, \dots, h_l, f_1, \dots, f_l$ と
 基本関係 (0.1) により定義する。(但し (0.1) の基本関係で
 Cartan 行列の代りに G.C.M. C を用いる。)

今 $L_1(C)$ の元 $x_1, x_2, \dots, x_n$ に対して 記号 $(x_1, x_2, \dots, x_l)$
 を $(x_1, x_2, \dots, x_l) := \text{ad } x_1 \text{ ad } x_2 \dots \text{ad } x_{n-1} x_n = [x_1 [x_2 [\dots [x_{n-1} x_n] \dots]]$
 により 定義し $L_1(C)$ の部分空間 $l_1(n_1, n_2, \dots, n_l)$ を

i) $n_1 \geq 0, n_2 \geq 0, \dots, n_l \geq 0$ ($n_1, \dots, n_l \neq (0, 0, \dots, 0)$) の時

$$l_1(n_1, n_2, \dots, n_l) := \sum_{\substack{(e_{\lambda_1}, \dots, e_{\lambda_s}) \in \\ e_i \text{ が } n_i \text{ 個出現}}} \mathbb{C}(e_{\lambda_1}, \dots, e_{\lambda_s})$$

ii) $n_1 \leq 0, n_2 \leq 0, \dots, n_\ell \leq 0$ ($n_1, n_2, \dots, n_\ell \neq (0, 0, \dots, 0)$) の時

$$l_1(n_1, n_2, \dots, n_\ell) := \sum_{\substack{(f_{\lambda_1}, \dots, f_{\lambda_\ell}) \text{ 中} \\ f_{\lambda_i} \text{ が } -n_i \text{ 個出現}}} \mathbb{C}(f_{\lambda_1}, \dots, f_{\lambda_\ell})$$

iii) $n_1 = n_2 = \dots = n_\ell = 0$ の時

$$l_1(0, \dots, 0) = \sum_{\lambda=1}^l \mathbb{C} h_\lambda (= f \text{ とおく。})$$

iv) 上の ii) iii) 以外の場合

$$l_1(n_1, n_2, \dots, n_\ell) = 0$$

と定義すると $L_1(C)$ は

$$L_1(C) = f \oplus \sum_{(n_1, n_2, \dots, n_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell} l_1(n_1, n_2, \dots, n_\ell) \text{ という直和分解を許し}$$

$\mathbb{Z}^\ell$ graded ring になる。(この事実は有限次元の場合のルートの同符号性と対応している。)

さらに $L_1(C)$ 中の Ideal の集合 M を

$$M = \{a \subset L_1(C); a \text{ は } L_1(C) \text{ の homogeneous Ideal で } a \cap f \neq \{0\}\}$$

と定義すると M には 包含関係に関して最大元が一意的に存在する。それを R とすると

定義

$$L(C) := L_1(C) / R \text{ を Kac-Moody Lie 環と云う。}$$

注意 この R は $\{0\}$ ではないかという予想を Kac がしているが 未だ 証明も反例もない。

最初の G.C.M C が分解可能のとき, 即ち置換行列 P が存在して $P^{-1}CP = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ となるとき, A, B も G.C.M で

$L(C) \cong L(A) \times L(B)$ が成立する。よ、以下 既約な G.C.M についてのみ考えればよい。

$L=L(C)$ を G.C.M C から構成された Kac-Moody Lie 環とする。

R は homogeneous ideal より L も graded ring になる。

$L = \mathfrak{f} \oplus \sum_{(n_1, \dots, n_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell} l(n_1, \dots, n_\ell)$ と云う直和分解が成立する。

L 上に ルート系, 及び Weyl 群を 定義しよう。

まず ルート系 については 有限次元との類似を追えば

simple root $\alpha_i \in (\mathfrak{f}_R)^* \ i=1, 2, \dots, \ell$ を $\alpha_i(h_i) := C_{fi}, \forall f=1, 2, \dots, \ell$

により 定義し ルート系 Δ を $\Delta = \{\alpha \in \mathfrak{f}^* \mid \alpha = \sum_{i=1}^{\ell} n_i \alpha_i \text{ 但し}$

$l(n_1, \dots, n_\ell) \neq 0\}$ により 定義したいのだが G.C.M C が $\det C = 0$

の場合もあり得るので simple root の持つ重要な性質

" $\mathbb{C}$ 上 一次独立" が 崩れてしまう。そこで 次の様な

technique で ここを乗り切る。

L の微分全体のなす Lie 環を $\text{Der}(L)$ で示すとき $D_i, i=1, 2, \dots, \ell$ という L の微分を

$$D_i x = n_i x \quad \text{for } \forall x \in l(n_1, \dots, n_\ell)$$

により 定義し $D_1, \dots, D_\ell$ により 生成される $\text{Der}(L)$ の

部分 Lie 環を $\mathfrak{d}_0$ で表す。さらに Lie 環 $L^{e'}$ を

$$(L^e)' = \mathfrak{d}_0 \oplus L \quad (\text{Lie 環の半直積})$$

$$(\mathfrak{f}^e)' = \mathfrak{d}_0 \oplus \mathfrak{f}$$

により 定義し $\alpha'_i \in ((\mathfrak{f}^e)')^* \ i=1, 2, \dots, \ell$ を

$$\operatorname{ad} h \cdot e_i = \alpha_i'(h) e_i \quad \text{for } \forall h \in (\mathfrak{f}^e)$$

で定義すると $\operatorname{ad} D_j \cdot e_i = D_j \cdot e_i = \delta_{ij} e_i = \alpha_i'(D_j) e_i$
 より $\alpha_i'(D_j) = \delta_{ij}$ ($i, j = 1, 2, \dots, l$ とし) $\alpha_1', \dots, \alpha_l'$ は一次独立になる。そこで $\mathfrak{g}$ の部分空間 $\mathfrak{g}$ で $\alpha_1|_{\mathfrak{g}}, \dots, \alpha_l|_{\mathfrak{g}}$ が一次独立になる様な極小の部分空間 $\mathfrak{g}$ をとり固定する。

$$\mathcal{L}^e := \mathfrak{g} \oplus \mathcal{L} \quad \mathfrak{f}^e := \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{f}$$

と定義し $\alpha_i|_{\mathfrak{f}^e} = \alpha_i \in (\mathfrak{f}^e)^*$ とおけば $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ は定義から $\mathbb{C}$ 上一次独立になる。 $\alpha_1, \dots, \alpha_l \in (\mathfrak{f}^e)^*$ を $\mathcal{L}$ の simple root と定義し $\mathcal{L}$ のルート系 Δ を

$$\Delta := \{ \alpha \in (\mathfrak{f}^e)^* ; \alpha = \sum_{i=1}^l n_i \alpha_i \quad l(n_1, \dots, n_l) \neq 0 \}$$

により定義する。

この時 有限次元の場合と同様に ルート空間分解

$$\mathcal{L}^e = \mathfrak{f}^e \oplus \sum_{\alpha \in \Delta} \mathcal{L}^\alpha \quad \text{但し } \mathcal{L}^\alpha = \{ x \in \mathcal{L}^e ; \operatorname{ad} h x = \alpha(h)x \text{ for } \forall h \in \mathfrak{f} \}$$

が成立する。更に $n_1 \geq 0, \dots, n_l \geq 0$ ($n_1, \dots, n_l \neq 0, \dots, 0$) のとき $\sum n_i \alpha_i$ を 正ルート, $n_1 \leq 0, \dots, n_l \leq 0$ ($n_1, \dots, n_l \neq 0, \dots, 0$) のとき $\sum n_i \alpha_i$ を 負ルートと呼ぶと

$$\Delta = \Delta^+ \cup \Delta^-, \quad -\Delta^+ = \Delta^-$$

が成立する。(ここで Δ^+ は正ルートの集合, Δ^- は負ルートの集合)

ルートの定義が 終わったので Weyl 群の定義に入る。

$(\mathfrak{g}^e)^*$ の ℓ 次元部分空間 V を $V := \sum_{\bar{\lambda}=1}^{\ell} \mathbb{C} \alpha_{\bar{\lambda}}$ により定義する。そこで Weyl 群 $W \subset GL(V)$ を

$$W = \langle w_{\bar{\lambda}} \rangle_{\bar{\lambda}=1,2,\dots,\ell} \quad \text{但し } w_{\bar{\lambda}} \in GL(V) \text{ は}$$

$w_{\bar{\lambda}}(\alpha_{\bar{j}}) := \alpha_{\bar{j}} - \alpha_{\bar{j}}(h_{\bar{\lambda}}) \alpha_{\bar{\lambda}} = \alpha_{\bar{j}} - C_{\bar{\lambda}\bar{j}} \alpha_{\bar{\lambda}} \quad \forall \bar{j}=1,2,\dots,\ell$ で与えられる, によって定義する。

この時 $w_{\bar{\lambda}}^2 = \text{Id}$ 及び $W\Delta = \Delta$, $\dim L^{\alpha} = \dim L^{w(\alpha)}$ $\forall w \in W$, が成立することが $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の表現論からわかる。

さらに $\forall w \in W$ に対して

$$\Phi_w = \{\alpha \in \Delta^+; w^{-1}(\alpha) \in \Delta^-\} = \Delta^+ \cap w(\Delta^-)$$

と定義すると w の $w_1, \dots, w_{\ell}$ に関する長さ $\ell(w)$ について $\ell(w) = \#\Phi_w$ が成立し W が二元消去律を満し従って Coxeter 群になることが有限次元半単純 Lie 環の場合と同様に証明できる。その $w_1, \dots, w_{\ell}$ に関する基本関係を書いてやると

$$w_{\bar{\lambda}}^2 = 1 \quad \bar{\lambda}=1,2,\dots,\ell \quad (w_{\bar{\lambda}} w_{\bar{j}})^{m_{\bar{\lambda}\bar{j}}} = 1 \quad (m_{\bar{\lambda}\bar{j}} < \infty)$$

但し $m_{\bar{\lambda}\bar{j}}$ は i) $C_{\bar{\lambda}\bar{j}} C_{\bar{j}\bar{\lambda}} = 0$ の時 $m_{\bar{\lambda}\bar{j}} = 2$ ii) $C_{\bar{\lambda}\bar{j}} C_{\bar{j}\bar{\lambda}} = 1$ の時 $m_{\bar{\lambda}\bar{j}} = 3$ iii) $C_{\bar{\lambda}\bar{j}} C_{\bar{j}\bar{\lambda}} = 2$ の時 $m_{\bar{\lambda}\bar{j}} = 4$ iv) $C_{\bar{\lambda}\bar{j}} C_{\bar{j}\bar{\lambda}} = 3$ の時 $m_{\bar{\lambda}\bar{j}} = 6$ v) $C_{\bar{\lambda}\bar{j}} C_{\bar{j}\bar{\lambda}} \geq 4$ の時 $m_{\bar{\lambda}\bar{j}} = \infty$ で与えられる。

例えば $G.C.M \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ の Weyl 群の Coxeter 図形は

$\circ - \circ \overset{\infty}{-} \circ$ となり $SL(2, \mathbb{Z})$ を Index 2 で含む Coxeter

群になる。

最後に もう一つ定義として simple root の W -orbit
 $W\alpha_1 \cup W\alpha_2 \cup \dots \cup W\alpha_l =: \Delta_R$ とおき これを real root
 と云う。さらに $\Delta_I := \Delta - \Delta_R$ と定義し Δ_I の各元を
 imaginary root と云う。 $\dim L^\phi = \dim L^{w\phi}$ より
 $\Delta_R \ni \forall \phi$ に対して $\dim L^\phi = 1$ が 成立する。

§2 Euclidean Lie 環

以下 この節では Kac-Moody Lie 環の中でも重要な
 class である Euclidean Lie 環について述べる。

実際 今のところ Kac-Moody Lie 環の中でも root 系
 及び その multiplicity が計算されているのは この Euclidean
 Lie 環だけで この場合に Weyl の分母公式に相当する式が
 Macdonald の恒等式なのである。

この節では 考える Kac-Moody Lie 環は 全て既約な
 G.C.M から 構成したものとする。

定義

Kac-Moody Lie 環 L が 中心に含まれない non trivial
 Ideal を持つ時 L を Euclidean Lie 環と云い 元の G.C.M
 C も Euclidean type と云う。

Euclidean Lie 環については Moody が その精密な構

造を求めている。それを定理の形で述べると

定理 (Moody [6] [7])

既約な G.C.M C が与えられたとき

C が Euclidean type $\iff A := 2I - C$ とおくと

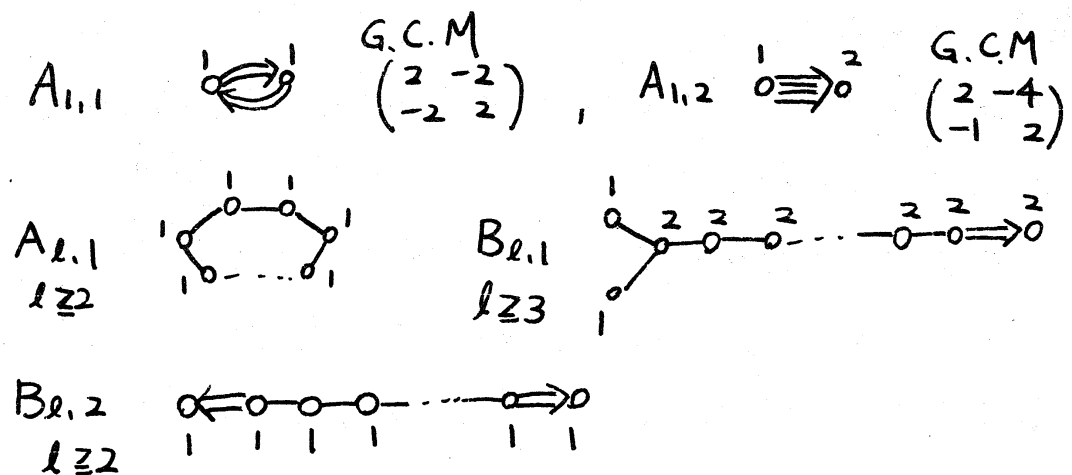
A の固有値半径 $\sigma(A) = 2$

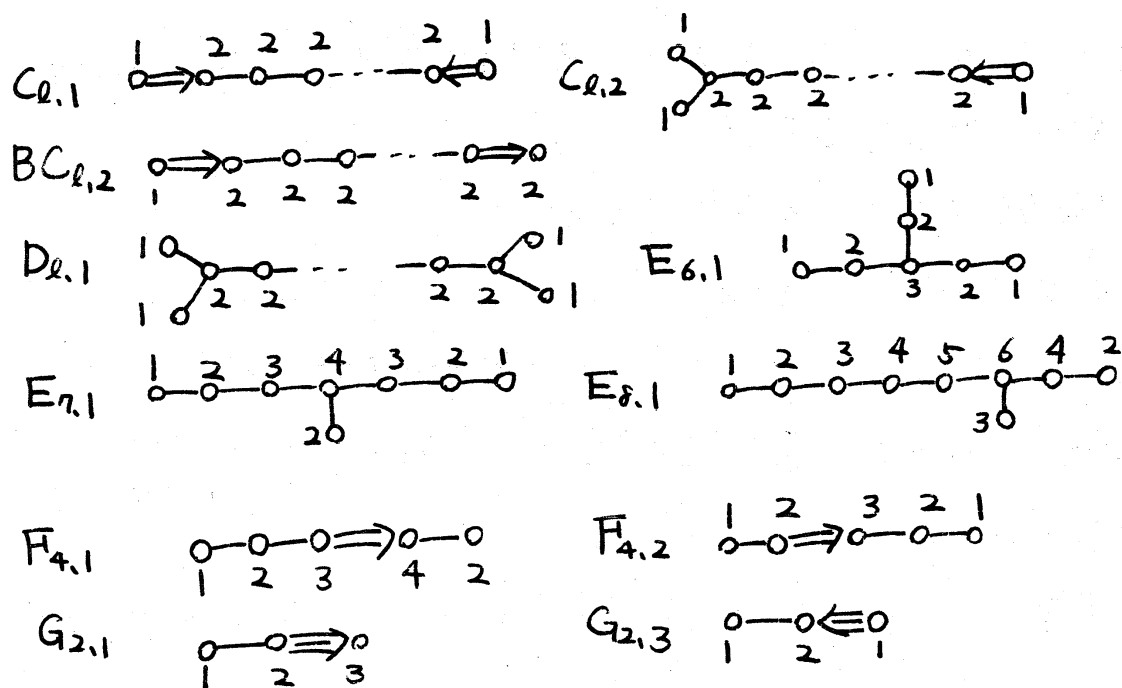
但し A の固有値半径 $\sigma(A)$ は $\sigma(A) := \max_{\lambda \text{ は } A \text{ の固有値}} |\lambda|$ で定義する。

注意 上の行列 A は C が既約な G.C.M より Frobenius 行列になっている。

特に上の定理から $\det C = 0$, かつ $\forall i = 1, 2, \dots, l$ に対して C から i 行 i 列を除いてできる行列 C_i は 有限次元半単純 Lie 環の Cartan 行列になることがわかる。従って

Euclidean type の G.C.M を Dynkin diagram で書いてやると 次の表が得られる。





上の表で label $X_{l,r}$ (例えば $A_{l,1}$, $B_{l,2}$ etc) の図形は頂点数が $l+1$ 個, 従, て size が $l+1$ 次の G.C.M. に対応している。また r は tier number と呼ばれているもので少し後で定義を与える。

各図形に 書き込まれている数 $\vec{n} = (n_0, n_1, \dots, n_l)$ は対応する G.C.M. を C とすると Frobenius 行列 $A := 2I - C$ の固有値 2 に対応する固有 vector である。(Frobenius 行列の議論より) この様な $\vec{n} = (n_0, n_1, \dots, n_l)$ は $1 = \min_{i=0,1,\dots,l} n_i$ という条件の下で 一意的に定まる (ref 岩堀 [1])。

この時 Moody により次の定理が示されている。但し $\vec{n}$ に対応する $(f^e)^*$ の元も 同じ $\vec{n}$ で表すことにする。

定理 (Moody)

L が Euclidean Lie 環の時, その imaginary root Δ_I は

$$\Delta_I = \mathbb{Z}\gamma \quad \text{で与えられる。従って } \Delta = \Delta_R \cup \mathbb{Z}\gamma。$$

そこで tier number r を

$$r := \min \{ n \in \mathbb{N} : n\gamma + \Delta = \Delta \}$$

により 定義する。この時 r は 1, 2, 3 何れかの値をとる。さらに Euclidean Lie 環の場合には imaginary root の重複度まで Moody により 求められている。定理の形で述べると次の通りである。

定理 (Moody [1])

L を Euclidean Lie 環とする。その時

i) $k \neq 0$, $k + nr \neq 0$ を満す任意の整数の組 (k, n) に対し

$$\dim L^{k\gamma} = \dim L^{(k+nr)\gamma}$$

ii) $\dim L^{r\gamma} = \ell$

(但し 上の ℓ は Dynkin 図形の表の $X_{\ell, r}$ (e.g. $A_{\ell, 1}$, $B_{\ell, 2}$, $F_{\ell, 2}$ etc) の ℓ である。即ち このとき L を定義する G.C.M. の size は $\ell+1$ 次である。)

上の定理より tier number 2 以上の Euclidean Lie 環 L に対して $\dim L^{k\gamma}$, 但し k は $1 \leq k < r$ を満す自然数, を求めてやればよい。

各場合について書いてやると 次の通りである。

L	$\dim L^3$	L	$\dim L^3$	$\dim L^{23}$
$A_{l,2}$	1	$BC_{l,2}$	l	1
$B_{l,2}$	1	$F_{4,2}$	2	
$C_{l,2}$	$l-1$	$G_{2,3}$	1	

実は Euclidean Lie 環については ルート系及びその重複度のみならず その構造まで求められている。

特に tier number 1 の Euclidean Lie 環 $X_{l,1}$ は 1次元の中心 $\mathfrak{z}$ を持ち $X_{l,1}/\mathfrak{z}$ は X_l 型の単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ に Laurent polynomial ring $\mathbb{C}[t, \frac{1}{t}]$ を tensor した Lie 環と同型になる。即ち

$$0 \rightarrow \mathfrak{z} \rightarrow X_{l,1} \rightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, \frac{1}{t}] \rightarrow 0 \text{ (exact)}$$

例えば

$$A_{l,1}/\mathfrak{z} \cong \mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[t, \frac{1}{t}] = \mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{C}[t, \frac{1}{t}])$$

$$B_{l,1}/\mathfrak{z} \cong \mathfrak{o}(2l+1, \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[t, \frac{1}{t}] = \mathfrak{o}(2l+1, \mathbb{C}[t, \frac{1}{t}])$$

etc.

が成立する。

§3 Kac-Moody Lie 環の表現論と Macdonald の恒等式

有限次元半単純 Lie 環の表現論との類似を Kac-Moody Lie 環に於ても成立させる為に ここでもう一表現の class をとってくる必要がある。そこで L^e module V ($\dim V \leq \infty$) に対して

有限次元半単純 Lie 環の表現論に於て 成立する条件を 次々課していく。

定義 L^e module V が weight module であるとは

$V = \bigoplus_{\lambda \in (f^e)^*} V_\lambda$ (直和) が 成立すること云う。

ここで $V_\lambda := \{v \in V; \operatorname{ad} h \cdot v = \lambda(h)v \quad \forall h \in f^e\}$ である。

さて $\mathcal{U} := \sum_{\alpha \in \Delta^+} L^\alpha$ とおき L^e の universal enveloping algebra を $U(L^e)$ とおく。このとき

定義 weight module V が 次の条件を満たすとき V を highest weight module (以下 h.w.m と略記) と云う。

或る $\lambda \in (f^e)^*$ と 或る $x \in V_\lambda$ が存在して

$$nx = 0 \quad U(L^e)x = V.$$

この時 $\dim V_\lambda = 1$ で x は scalar 倍を除いて確定する。

この λ を h.w.m V の highest weight, x を h.w.m V の highest weight vector と云う。

さらに Poincaré-Birkhoff-Witt の定理より V の任意の weight μ は $\mu = \lambda - \sum_{i=1}^{\ell} n_i \alpha_i$, 但し $n_i \geq 0$ for $i=1, 2, \dots, \ell$ と書け $\dim V_\mu < \infty$ が成立する。

しかしながら これだけでは また 条件不足で V が有限次元のときには trivial に成立する条件をつける。

定義 L^e module V が standard module とは 次の二条件を満たすとき云う。

- i) V は highest weight vector α を持つ h.w.m
 ii) 任意の $i=1, 2, \dots, l$ に対して 或る $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ が存在して

$$f_i^n = 0 \quad i=1, 2, \dots, l.$$

上の ii) の条件から V は $sl(2, \mathbb{C})$ に同型な $\mathbb{C}$ の部分環

$S_i := \mathbb{C}e_i + \mathbb{C}h_i + \mathbb{C}f_i$ の下で 有限次元既約 S_i module の直和に分解する。そしてこのことが 議論を円滑に推進力となるのである。以下 standard module が Kac-Moody Lie 環の表現論を考える舞台となる。

特に 上のことから V を standard module, μ をその weight とすると $\forall w \in W$ (Weyl 群) に対して $\dim V_\mu = \dim V_{w(\mu)}$ が成立する。

このとき §0 の Elie Cartan の定理 4°) は次の形で成立する。かその前に dominant integral weight の定義を与えておく。

定義 $\mu \in (\mathfrak{g}^e)^*$ が dominant integral weight とは

$\mu(h_i) \in \mathbb{Z}, \mu(h_i) \geq 0 \quad \forall i=1, 2, \dots, l$ が成立するとき 云々。

今 P を “全ての dominant integral weight の集合” とすると

§0 の Elie Cartan の定理は

定理

既約な standard module の同値類と P の元とは 1:1 onto に対応する。この対応は standard module に対して その

highest weight を対応させることにより与えられる。

さて Weyl の指標公式、及び分母公式の拡張を行う。

今 V を weight module で各 weight space は有限次元とする。その時 formal character $\chi(V)$ を

$$\chi(V) := \sum_{\mu \in (\mathfrak{g}^e)^*} (\dim V_\mu) e^\mu$$

で定義する。 $\chi(V)$ は $(\mathfrak{g}^e)^*$ の元の形式的整係数一次結合 (無限和) 全体のなす加群 B の元である。

B は $(\mathfrak{g}^e)^*$ の群環も含み、変数形式的中級数環 A

$A := \mathbb{Z}[[e^{-\alpha_1}, e^{-\alpha_2}, \dots, e^{-\alpha_\ell}]]$ をも含む。 $(A$ の元は

$e^{-(n_1\alpha_1 + \dots + n_\ell\alpha_\ell)}$ $n_i \geq 0, n_i \in \mathbb{Z}$, の形式的一次結合になり その

積は $(\sum x_i e^{-\beta})(\sum y_j e^{-\gamma}) = \sum z_w e^{-w}$, 但し

$z_w = \sum x_i y_{w-i}$ (有限和) で定義される。

今 dominant integral weight $\mu \in P$ を highest weight に持つ standard L^e module V に対しては $e^{-\mu} \chi(V) \in A$ が

成立する。そこで 古典論の時に 正ルートの和の半分に当

る $\rho \in (\mathfrak{g}^e)^*$ を導入する。 $\forall i=1, 2, \dots, \ell$ に対して $\rho(h_i)=1$

となる $\rho \in (\mathfrak{g}^e)^*$ を一つとり固定する。この時 Kac-Moody

Lie 環に於ても 有限次元の場合と同様に $\rho - w\rho = -\langle \Phi_w \rangle$

が成立する。但し $\Phi_w = \Delta^+ \cap w(\Delta^-)$ で $\langle \Phi_w \rangle$ は Φ_w の元

の和, 即ち $\langle \Phi_w \rangle = \sum_{\alpha \in \Phi_w} \alpha$ である。

このとき §0 の Weyl の指標公式の分子, 分母に当る式,

$$N(\mu) = \sum_{w \in W} (\det w) e^{w(\mu+\rho) - (\mu+\rho)} \quad \text{及び}$$

$$D = \sum_{w \in W} (\det w) e^{w\rho - \rho}$$

を Kac-Moody Lie 環に於ても 同じ式で定義すると D 及び $N(\mu)$ は A の元になる。実際 $D \in A$ は $w\rho - \rho = \langle \alpha_w \rangle$ より 明らかで $N(\mu) \in A$ は $\mu + \rho$ が dominant integral weight になり $\mu + \rho$ を highest weight とする standard module V_1 を 考えれば $w(\mu + \rho)$ も V_1 の weight になり 従って

$\mu + \rho - w(\mu + \rho) = \sum_{i=1}^l n_i \alpha_i \quad n_i \in \mathbb{Z}, n_i \geq 0$ が成立するからである。 $(A$ 及び $N(\mu)$ が well defined であることは μ が dominant integral weight の時, $\rho - w\rho = \langle \alpha_w \rangle$, $l(w) = \#|\alpha_w|$ より

$w(\mu + \rho) = \mu + \rho$ なる $w=1$ が 成立することから従う。)

特に D は A の可逆元である。そこで Kac-Moody Lie 環 L , L^e standard module V に対して Weyl の指標公式

$$e^{-\mu} \chi(V) = \frac{N(\mu)}{D} = \frac{\sum_{w \in W} (\det w) e^{w(\mu+\rho) - (\mu+\rho)}}{\sum_{w \in W} (\det w) e^{w\rho - \rho}}$$

が A 中で 成立することを期待したいが 残念なから 今のところ 一般の G.C.M から構成された Kac-Moody Lie 環 に対しては Conjecture に過ぎない。

定義 G.C.M.C が "対称化可能" とは 正の有理数 $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r$ を対角成分にもつ対角行列 Λ が存在して ΛC が対称行列 になることを云う。

例えば Euclidean type の G.C.M は 全て 対称化可能である
 V, tree 型の Dynkin diagram を持つ G.C.M は 全て 対称化可能である。そこで Weyl の指標公式は

定理 (Kac [3])

対称化可能な G.C.M から構成された Kac-Moody Lie 環 L と highest weight μ をもつ standard L^e module V に対して

$$(3.1) \quad e^{-\mu} \chi(V) = \frac{N(\mu)}{D} = \frac{\sum_{w \in W} (\det w) e^{w(\mu+\rho) - (\mu+\rho)}}{\sum_{w \in W} (\det w) e^{w\rho - \rho}}$$

が A に於て 成立する。

Weyl の分母公式については

定理

対称化可能な G.C.M から構成された Kac-Moody Lie 環 L に対して

$$(3.2) \quad D = \prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^{-\alpha})^{\dim L^\alpha}$$

が成立する。

特に 上の分母公式を L が Euclidean type の時に 書き下したものが Macdonald Identity である。

G.C.M が対称化可能な時には L^e 上に Killing form に似た不変な内積が入り それが 議論を円滑に推し進めるのである。この (3.1) 及び (3.2) を用いて 古典的関数等式を出すには (3.1) 及び (3.2) の両辺に

$$A \longrightarrow \mathbb{Z}[[\delta]] \quad \text{但し } \mathbb{Z}[[\delta]] \text{ は一変数形式的中級数環,}$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$e^{-\alpha_i} \longmapsto q^{\alpha_i} \quad i=1,2,\dots,l$$

$(\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ は非負整数の l 個の組, という homomorphism を施せばよい。これを $(\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ 型の特殊化と云う。

例えば $A_{l,1}$ 型の Euclidean Lie 環の分母公式に うまい特殊化を施してやると Jacobi の triple product identity が出てくる。

文献表

[1] 岩堀長慶 「線型不等式とその応用」 岩波講座
基礎数学 8

[2] J. Lepowsky "Lectures on Kac-Moody Lie algebra"
Paris VI 1978

[3] V. Kac "Simple irreducible graded Lie algebras of
finite growth" Izv Akad Nauk SSSR, 32, 1968 pp 1323~1367

[4] V. Kac "Infinite dimensional Lie algebras, Dedekind's η -
function, Classical Möbius function---" Adv. Math 30, 1978
pp 85~136

[5] I. Macdonald "Affine root systems and Dedekind's η -function"
Inventiones Math 15 1972 pp 91~143

[6] R. Moody "A New class of Lie algebra" J. Alg 10 1968
pp 211~230

[7] R. Moody "Euclidean Lie algebras" Canad. J. Math 21 1969
pp 1432~1454

[8] R. Moody "Macdonald Identities and Euclidean Lie algebras"

Proc A.M.S 48 1975 pp43~52

[4] Moody - Teo "Tits' System with crystallographic
Weyl groups" J. Alg 21, 1972 pp178~190