

Resolution graph が一点であるような weighted homogeneous singularity の分類

東工大・理 田中 幹大 (Mikio Tanaka)

$f(z_0, z_1, \dots, z_n)$ を $f(0) = 0$ であり、かつ原点に isolated singularity をもつような analytic function とするとき、そのテイラー展開 $\sum_{\nu} a_{\nu} z^{\nu}$ ($z^{\nu} = z_0^{\nu_0} z_1^{\nu_1} \dots z_n^{\nu_n}$) に対し $\Gamma_+(f)$ を $\bigcup_{\nu: a_{\nu} \neq 0} \{\nu + (\mathbb{R}_+)^{n+1}\}$ の convex hull で定義する。
(但し、 $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$)

さらに、 $\Gamma_+(f)$ の compact faces 全体を $\Gamma(f)$ とかき、 f の Newton boundary という。

ここでは、3変数の擬斉次多項式によって定義される曲面 $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid f(x, y, z) = 0\}$ の non-degenerate な isolated singularity に着目し、Newton boundary とそれから定義される dual Newton diagram を使って resolution の状況を調べ、resolution graph が一点になるような定義多項式 f を分類することと考える。

まず、Newton boundary $\Gamma(f)$ から dual Newton diagram を定義する。

定義 dual space $\hat{\mathbb{R}}^{n+1}$ の positive vectors 全体を N^+ で表すとき、 $\forall A = {}^t(a_0, a_1, \dots, a_n) \in N^+$ に対し、 $\Gamma_+(f)$ 上の線型関数 $A(x)$ と $d(A)$, $\Delta(A)$ をそれぞれ次のように定義する。

$$A(x) := \sum_{i=0}^n a_i x_i, \quad d(A) := \min_{x \in \Gamma_+(f)} A(x),$$

$$\Delta(A) := \{x \in \Gamma_+(f) \mid A(x) = d(A)\}$$

ここで、 N^+ に $A \sim B \stackrel{\text{def.}}{\iff} \Delta(A) = \Delta(B)$ という同値関係 $\sim$ を入れる。また、 $\Gamma_+(f)$ の $\dim k$ の face Δ に対し、同値類 Δ^* を次で定義する。

$$\Delta^* := \{A \in N^+ \mid \Delta(A) = \Delta\}$$

このとき、 $\dim \Delta^* = n - k$, $\dim \text{Cone}(\Delta^*) = n - k + 1$ となる。

この Δ^* たちが与える N^+ の polyhedral decomposition $\Gamma^*(f)$ を f の dual Newton diagram という。

$\Gamma^*(f)$ は、hyperplane $L = \{x_0 + x_1 + \dots + x_n = 1\}$ への射影と同一視できるの故、 $\Gamma^*(f)$ の vertex $P = {}^t(p_0, p_1, \dots, p_n)$ は primitive integral vector (i.e. $\det(p_0, \dots, p_n) = 1$) と仮定してよい。

また、 P が strictly positive (i.e. $p_i > 0$ for $\forall i$) であるとき、 $\Delta(P)$ は $\Gamma(f)$ の compact face となる。

次に、 $\Gamma^*(f)$ から resolution graph を得るための準備をする。

定義 $P_i = (p_{0i}, p_{1i}, \dots, p_{ni})$ ($i = 1, \dots, k$) を N^+ の integral vectors とするとき、 $P_1, \dots, P_k$ の determinant を matrix (p_{ji}) の全 2 の $k \times k$ minors の最大公約数で定義する。

すなわち、 $C = \det(P, Q) > 1$ であるような integral vectors $P, Q \in N^+$ が与えられたとき、 $\forall P_1 \in \overline{PQ}$ (s.t.) $\det(P, P_1) = 1$ に対し、 $0 < \exists! C_1 < C$ (s.t.) $P_1 = \frac{Q + C_1 P}{C}$ であることが知られる。

これより、 $C = \det(P, Q) > 1$ のとき

$$\exists C_i (\geq 0) \quad (i = 0, 1, \dots, k+1)$$

$$(s.t.) \quad C = C_0 > C_1 > \dots > C_k = 1 > C_{k+1} = 0$$

$$P_{i+1} = \frac{Q + C_{i+1} P_i}{C_i} \quad \left(\begin{array}{l} i = 0, \dots, k \\ P_0 = P, P_{k+1} = Q \end{array} \right)$$

であり、 $\overline{PQ}$ の canonical primitive sequence とよばれる integral vectors の列 $P_1, \dots, P_k$ を得る。

ここから準備すれば、 $n = 2$ のとき C/C_1 を連分教展開することにより、resolution を次のような systematic な方法で説明することができる。

c/c_1 を次のように連分数展開する。

$$\frac{c}{c_1} = m_1 - \frac{1}{m_2 - \frac{1}{m_3 - \frac{1}{\ddots - \frac{1}{m_k}}}} \quad (m_i \geq 2)$$

もし 2 、 P と Q の間に $r(\Delta(P) \cap \Delta(Q)) + 1$ 本の rational curves の chain $\overset{\bullet}{\text{---}} \overset{\bullet}{\text{---}} \cdots \overset{\bullet}{\text{---}}$ を挿入することにより resolution graph が得られる。ここぞ、 $r(\)$ はその face の内部の格子点の数を表すものとする。

また、strictly positive vertex は $\bullet$ ぞ、not strictly positive vertex は $\circ$ ぞ表すものとし、 $\circ$ は resolution graph として考えるときには無視する。

系 $E(P)$ の自己交点数と種数は次のように計算できる。

① $\dim \Delta(P) = 2$ とする。 $P = {}^t(p_0, p_1, p_2)$ に隣接する

$Q_i = {}^t(q_{0i}, q_{1i}, q_{2i})$ ($i = 1, \dots, s$) に対し、

$$E(P)^2 = - \frac{\sum_{i=1}^s (r(\Delta(P) \cap \Delta(Q_i)) + 1) g_{ji}}{p_j} \quad (j=0,1,2)$$

② P : strictly positive vertex (s.t.) $\dim \Delta(P) = 2$

$$\Rightarrow 2 - 2g(E(P)) = \frac{-6}{d(P)} \text{vol } C(0, \Delta(P)) + \sum_{i=0}^k (r(\Delta_i) + 1)$$

$$\circ \circ \circ, \quad \partial \Delta(P) = \Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_k$$

その零点集合が原点 $\vec{0}$ に non-degenerate な孤立特異点をもつような3変数の擬斉次多項式は Orlik らによって次のように分類されている。([1], [3])

- (I) $x^a + y^b + z^c$: Brieskorn type
- (II) $x^a + y^b + yz^c + t_1 x^d z^e$ ($t_1 \in \mathbb{C}$)
- (III) $x^a + y^b z + yz^c + t_1 x^d z^e + t_2 x^f y^g$ ($t_1, t_2 \in \mathbb{C}$)
- (IV) $x^a + xy^b + yz^c + t_1 y^d z^e + t_2 x^f z^g$ ($t_1, t_2 \in \mathbb{C}$)
- (V) $zx^a + xy^b + yz^c + t_1 y^d z^e + t_2 x^f z^g + t_3 x^h y^i$ ($t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{C}$)
- (VI) $x^a + xy^b + xz^c + t_1 y^d z^e + t_2 y^f z^g$ ($t_1 \in \mathbb{C}^*, t_2 \in \mathbb{C}$)
- (VII) $x^a y + xy^b + xz^c + t_1 y^d z^e + t_2 x^f z^g + t_3 y^h z^i$ ($t_1 \in \mathbb{C}^*, t_2, t_3 \in \mathbb{C}$)
- (VIII) $x^a + yz$

(但し、各項の次数は2以上)

このそれぞれについて、dual Newton diagram $\Gamma^*(f)$ の positive vertex が一点のみになるための必要十分条件を求めたい。

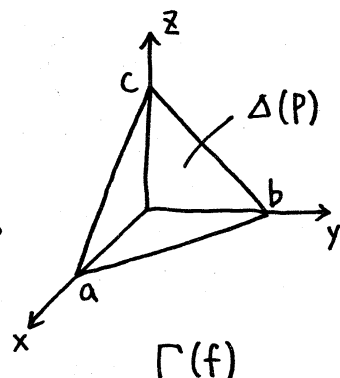
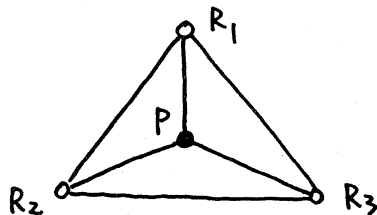
ここでは紙面の都合もあるので、具体的な計算については一例を挙げて説明することにする。

(I) $x^a + y^b + z^c = 0$: Brieskorn type の場合

$\Delta(P)$ の方程式を $lx + my + nz = d(P)$

とすると、 $P = {}^t(l, m, n)$ であり、dual

Newton diagram $\Gamma^*(f)$ は次のようになる。



$$R_1 = {}^t(1, 0, 0), \quad R_2 = {}^t(0, 1, 0), \quad R_3 = {}^t(0, 0, 1)$$

$\Gamma^*(f)$ の positive vertex が一点のみであるためには、これ以上 subdivision がないようにする必要があるので、

$$\det(P, R_1) = (m, n) = 1, \quad \det(P, R_2) = (l, n) = 1, \quad \det(P, R_3) = (l, m) = 1$$

一方、weighted homogeneous であるので $d(P) = al = bm = cn$

以上より、 $d(P) = lms$, $a = mns$, $b = lns$, $c = lms$ を得る。

言い換えれば、任意に与えられた3つの互いに素な自然数 l, m, n に対し、 $x^{mns} + y^{lns} + z^{lms} = 0$ の resolution graph は一点のみである。

また、 $\pm(\Delta(P) \cap \Delta(R_1)) + 1 = (b, c) = (lns, lms) = ls$ であることを留意して自己交点数を計算すると、

$$\begin{aligned} j=0 \quad ; \quad E(P)^2 &= - \frac{ls \times 1 + ms \times 0 + ns \times 0}{l} \\ &= -s \end{aligned}$$

種数についてのは次の通り。

$$\begin{aligned} 2 - 2g(E(P)) &= \frac{-6}{lmns} \times \frac{mns \cdot lns \cdot lms}{6} + (ls + ms + ns) \\ &= -lmns^2 + (l+m+n)s \end{aligned}$$

したがって、 $g(E(P)) = \frac{lmns^2 - (l+m+n)s + 2}{2}$

他のタイプについても同様の計算を行った結果は次の通り。

	f	$E(P)^2$	$g(E(P))$
(II)	$x^{ms} + y^{ls} + yz^{m(ls-1)}$ (l, m は互いに素)	$-s$	$\frac{lm s^2 - (l+m+1)s + 2}{2}$
(III)	$x^a + y^{a-1}z + yz^{a-1}$ ($a \geq 2$)	$-a$	$\frac{(a-2)(a-1)}{2}$
(IV)	$x^a + xy^{(a-1)l} + yz^{a-1}$ ($a \geq 2$)	$-a$	$\frac{(a-2)(a-1)}{2}$
(V)	$zx^a + xy^a + yz^a$	$-(a+1)$	$\frac{a(a-1)}{2}$
(VI)	$x^a + xy^{(a-1)l} + xz^{(a-1)l} + y^d z^{a-1-d}$ ($a \geq 2$)	$-a$	$\frac{(a-2)(a-1)}{2}$
(VII)	$x^a y + xy^a + xz^a + y^d z^{a-d+1}$	$-(a+1)$	$\frac{a(a-1)}{2}$
(VIII)	$x^2 + yz$	-2	0

補足 singularity が isolated のままであれば、5 ページの表において $t_i = 0$ とし Newton boundary を切り取ると、 $\Delta(P)$ が三角形でないときは初めの3頂だけ $\Delta(P)$ は isolated にならない次の2つだけを考えればよい。

$$(VI) \quad x^a + xy^b + xz^c + y^d z^e = 0$$

$$(VII) \quad x^a y + xy^b + xz^c + y^d z^e = 0$$

さて、今までは dual Newton diagram $\Gamma^*(f)$ の positive vertex が最初から一点だけあるものについて考察したが、初めから一点でなく2も blow-down の結果 resolution graph が一点になるものを見落とさないよう注意しなければならない。

これも一例を挙げて説明することにする。

$$(IV) \quad x^a + xy^b + yz^c = 0$$

$\Delta(P)$ の方程式を $lx + my + nz = d(P)$

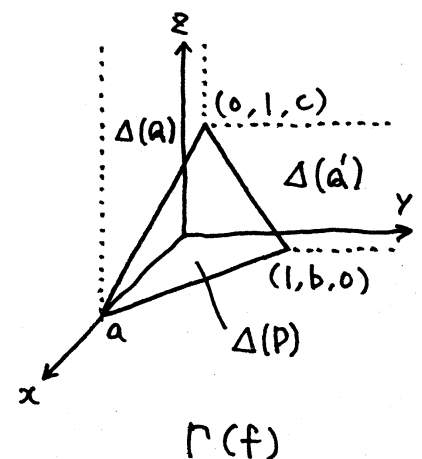
とすれば、 $P = {}^t(l, m, n)$ であり、

また $\Delta(Q)$, $\Delta(Q')$ の方程式はそれぞれ

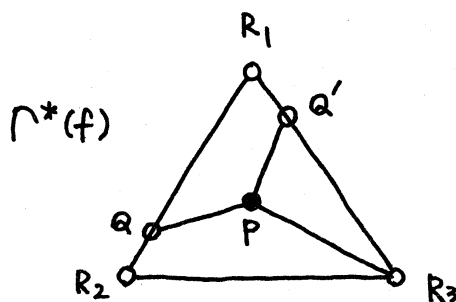
$$x + ay = a, \quad cx + z = c$$

$$Q = {}^t(1, a, 0), \quad Q' = {}^t(c, 0, 1)$$

となる。



これより、dual Newton diagram は次のようになる。



ここより、 $\Gamma^*(f)$ の positive vertex が一点でないとする。

$\overline{PQ}$ においてだけ subdivision があると仮定する。(結論
 だけという、これ以外の仮定は全て矛盾が生じる。)

$$\text{すなわち、} \det(P, R_3) = (l, m) = 1$$

$$\det(P, Q) = \text{g.c.d.}(al-m, n, an) \neq 1$$

$$\det(P, Q') = \text{g.c.d.}(l-cn, m, cm) = 1$$

f は weighted homogeneous であるから $al = l + bm = m + cn$

$$\text{より、} al - m = cn, \quad l - cn = (1-b)m \quad \text{であり、} n \neq 1$$

$m = 1$ を得る。

$$\text{また、} al = l + b \quad \text{より} \quad b = (a-1)l \quad \text{となる。}$$

ここより、 $E(P)$ の種数を求めよう。

$$\mathbb{P}(\Delta(P) \cap \Delta(R_3)) + 1 = (a-1, b) = (a-1, (a-1)l) = a-1$$

$$\text{vol } C(\Delta(P)) = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = \frac{1}{6} abc$$

$$\text{よって、} \quad 2 - 2g(E(P)) = \frac{-b}{al} \times \frac{abc}{6} + (1+1+(a-1))$$

$$= -\frac{(a-1)lc}{l} + (a+1)$$

$$= -ac + c + a + 1$$

$$L \models a'', 2, \quad g(E(P)) = \frac{(a-1)(c-1)}{2}$$

P が第 1 種例外曲線でないならば blow-down できないので、
 $g(E(P)) = 0$ である。

ところが、 $a \geq 2$ であるので $c = 1$ を得る。

また、このとき $n = al - 1$ であるので

$$\begin{cases} x^a + xy^{(a-1)l} + yz = 0 \\ \Delta(P): lx + y + (al-1)z = al \end{cases} \text{ を考えればよい。}$$

P が第 1 種例外曲線であるためには、 $E(P)^2 = -1$ でない
 なければならない。

P に一番近い $\overline{PQ}$ の分点を求めると、

$$S_1 = \frac{1}{al-1} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} l \\ 1 \\ al-1 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ c_1 \end{pmatrix}$$

であるから、 $r(\Delta(P) \cap \Delta(R_3)) + 1 = a - 1$ に注意すれば

$$j=2; \quad E(P)^2 = -\frac{c_1 + 1 + (a-1)}{al-1} = -1$$

このとき、 $c_1 + a = al - 1$ より $c_1 = al - a - 1$ を得る。

また、
$$S_1 = \begin{pmatrix} l-1 \\ 1 \\ al-a-1 \end{pmatrix} \quad \text{となる。}$$

blow-downが続いて起こり、その resolution graph が一点になるには、

$$\begin{array}{ccccccc} P & S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_{k-1} & S_k \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \\ -1 & -2 & -2 & -2 & & -2 & -m_k \end{array} \quad (m_k \geq 3)$$

となつていなければならないので、

$$\frac{c}{c_1} = 2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{\ddots 2 - \frac{1}{m_k}}}}}$$

すなわち、 $\frac{c}{c_1} = \frac{al-1}{al-a-1} = \frac{2(al-a-1) - (al-2a-1)}{al-a-1}$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{al-a-1}{al-2a-1} = \frac{2(al-2a-1) - (al-3a-1)}{al-2a-1}$$

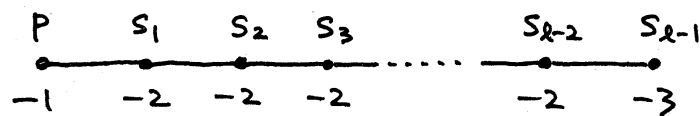
.....

$$\frac{c_{l-2}}{c_{l-1}} = \frac{2a-1}{a-1} = 2 + \frac{1}{a-1} \in \mathbb{Z}$$

これより、 $a=2$ 、 $k=l-1$ 、 $m_{l-1}=3$ を得る。

また、 $n=al-1 \neq 1$ より $l \neq 1$

$l \neq 4$ 、 $x^2 + xy^l + y^2 = 0$ ($l \geq 2$) の resolution graph は



があり、blow-down 2 つぶせば一点になる。

また、その weight は -2 、種数は 0 ($\Gamma^*(f)$ の P と Q の間に挿入するのは有理曲線だから) である。

他のタイプについても同様の計算を行うと、(IV) 以外どのように blow-down の結果 resolution graph が一点になるのは、(II) の $x^2 + xy^2 + yz = 0$ だけで、それ以外には存在しない。

以上で、3変数の weighted homogeneous singularity のうち resolution graph が一点になるものを全2分類できた。

参 考 文 献

- [1] Oka, M. : On the Resolution of the Hypersurface Singularities, Advanced Studies in Pure Mathematics 8 (1986), 405 — 436
- [2] ——— : Non-degenerate complete intersection singularity, preprint
- [3] Orlik, P. & Wagreich, P. : Isolated singularities of algebraic surfaces with $\mathbb{C}^*$ action, Ann. of Math. 93 (1971), 205 — 228