

ブラウワーのバー帰納法における基本仮定の理解に向けて

秋吉亮太

1. 序

よく知られているようにオランダの数学者 L・E・J・ブラウワーは、いわゆる数学の危機論争を巡る時代に「直観主義」という独特の立場を考案し、それをもとに数学を再構成しようとした⁽¹⁾。直観主義に含まれる考え方の一部、特に潜在無限といった概念自体はそれ以前からあったとしても、ブラウワーが初めて導入した数学的道具立てがいくつも存在する。ブラウワーの直観主義をそれ以前の構成主義的傾向を持った数学から区別するのは、解析学を十分に展開するための道具立てを導入している点であるとひとまずはいえよう。とりわけ注目すべきなのは、解析学を十分に展開するためにブラウワーが導入した選列の理論 (theory of choice sequence) である。選列とは要するに「際限なく値 (たとえば 0 か 1) を生成する」数列のことで、解析学はこうした選列に関する数学として構築される。中でも実数上の関数がすべて連続になることを主張する「一様連続性定理」 (uniform continuity theorem) は、古典数学と矛盾するといわれる⁽²⁾、直観主義数学に特有の定理である。

選列の理論を展開するにあたって重要なのがファン定理 (fan theorem) と呼ばれる原理⁽³⁾ なのであるが、ブラウワーはファン定理を別のずっと強い定理から導出した (Brouwer, 1927)⁽⁴⁾。それがバー帰納法 (bar induction, 以下 *BI*) であり、*BI* は簡略化すれば、「木が整礎 (well-founded) ならば、木の上の帰納法が成立する」という形をしている。*BI* を正当化するにあたり、ブラウワーはいわゆる BHK 解釈 (Brouwer-Heyting-Kolmogorov interpretation) をここに現れる「ならば ($\rightarrow$)」に適用しており、これは BHK 解釈というアイディアの源泉の一つとなっている。つまり、ブラウワーは「木が整礎である」という前提の任意の証明が与えられたとき、それが結論である「木の上の帰納法が成立する」の証明へと常に変形できることを示そうとした。さらに興味深いことに、ブラウワーが考えている「証明」とは、有限個の前提を持つ推論を含むものだけではなく、無限個の前提を持つ推論までを考察の対象としていた。無限の推論が数理論理学において頻繁に用いられるようになったのは、ブラウワーよりずっと後の 1950 年代にドイツのシュッテによって「 ω 規則」が導入されてからである⁽⁵⁾。このように、ブラウワーの議論は、数理論理学史的にみても興味深い。

ブラウワーは、上で述べたような仕方で *BI* を正当化しようとしたものの、そこには一つの証明されないままに終わっている仮定が存在する。それが本稿が「基本仮定

(Fundamental Assumption, 以下 FA)」と呼ぶものであり、FA は、ある形をした論理式の証明がごく単純ないくつかの推論規則のみから成っていることを主張する。FA を前提にすれば、「木が整礎である」という前提の証明は、ごく限られた単純な推論規則のみから成っていることになる。そして、前提の証明がこれらの単純な推論規則のみから成っているのであれば、それを結論の証明へと変形することは容易である。このように、FA はブラウワーの議論にとって決定的な役割を果たしている。ダメットが詳細に分析したように、FA を導入するにあたってブラウワーはいわゆる「カノニカルな証明」の分析を行っており、このことは概念的、哲学的にも非常に興味深い (Dummett, 2000)。また、ブラウワーが一種の無限的な推論、すなわち無限個の前提を持つ推論を導入したのはまさにこの FA においてであった⁽⁶⁾。いずれにしても、FA のためにブラウワーの議論は *BI* を正当化するには不十分であるとされてきた。

この FA を巡ってはいくつかの態度が存在する。一つは多くの数理論理学者 (クリーネ、トルストラ他) に代表されるように、*BI* を公理として受け入れ FA については不問に付すというものである (Kleene & Vesley, 1965; Troelstra, 1977; Troelstra & van Dalen, 1988; Dummett, 2000)⁽⁷⁾。直観主義数学においては、*BI* が必要なのはファン定理を導出するためであり、それ以後は用いられないため、このような態度は数学者としては首尾一貫しているといえる。もう一つは、ごく最近になって哲学者のファン・アッテンとストホルムによって提唱された、FA をカント的な意味での超越論的要請とみなし、ブラウワーの議論全体を超越論的論証として解釈する試みである (Sundholm & van Atten, 2008)。これは非常に興味深い提案であるものの、ブラウワーが自身の議論をそのようなものとみなしていたという証拠は (彼らが告白するように) 存在しない。ブラウワーはあくまでも数学者であったのだから、やはりカント的な意味での超越論的論証として解釈できる可能性があったとしても、よほど直接的な典拠がない限り無理があるだろう。また、彼らは FA の必要性を端的に証明が心的構成物 (mental construction) であることに求めているが、FA がブラウワーにとって必要であることの理由を、ブラウワーの極めて一般的な哲学的傾向によって与えるよりも、彼の *BI* に対する数学的議論により密着した形で与えられることの方が、ずっと望ましいのではないだろうか。そうでなければ、ブラウワーが様々な証明を行う中で何度も「*A* ならば *B*」という形の定理を証明したにもかかわらず、なぜこの場面でのみ FA のような仮定を置いたのかが理解できなくなってしまう。

以上を背景に、本稿では FA 理解に対する別のアプローチの可能性をスケッチしたい。そのために、ブフホルツの Ω 規則を考察する。 Ω 規則はブフホルツの教授資格論文 (Buchholz, 1977) で 1970 年代末に導入された、無限個の前提を持つ推論規則であ

り、この規則によっていわゆる再帰的定義の理論 (the theory of inductive definitions) を証明論的に分析することが可能となった。その分析とブラウワーの議論を比較し、これらの間には相似性があることを指摘する。いいかえれば、 Ω 規則はブラウワーの議論の、ある意味での数学的モデルになっていることを示したい。このようなフォーマルな手法により、ブラウワーの議論の詳細な検討が可能になるように思われる。そして、両者を比較することで、ブラウワーの議論における FA の役割を明らかにし、その必要性に関する示唆を与えたい。先に結論をいってしまえば、FA の必要性は「 $\rightarrow$ 」の非可述性に由来する。もちろん、 BI 自体がそもそも $A \rightarrow B$ という形をしているため、このように一般的な答えを述べるだけでは空疎であり、本稿で与える回答は「再帰的定義における「 $\rightarrow$ 」の非可述性」というものである。

本稿の構成は以下の通りである。2 節では BI と FA を標準的な説明にしたがって確認し、3 節では Ω 規則を必要な範囲で概説する。最後に 4 節では、ブラウワーの議論における FA の役割と、その必要性に関する説明の概略を与える。

2. バー帰納法とブラウワーの基本仮定

本節では BI の定式化を概観し、ブラウワーによる基本仮定を解説する。選列の理論で考察されるのは選択 (choice) によって生成される木である。通常、空列 $\langle \rangle$ が木の根に貼付けられ、(木を下から見たときの) 後続者は二つあって $\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle$ となる。さらにその後続者は $\langle 00 \rangle, \langle 01 \rangle, \langle 10 \rangle, \langle 11 \rangle$ といった具合である。この木全体が実数全体を表していると思えばよい⁽⁸⁾。そして、木の枝を生成する選択 (法則) を $\alpha, \beta, \dots$ と書く。たとえば、 $\alpha(0) = \langle \rangle, \alpha(1) = \langle 0 \rangle, \dots$ というのも一つの選択である⁽⁹⁾。ここで $\bar{\alpha}(n) = \langle \alpha(0), \alpha(1), \dots, \alpha(n-1) \rangle$ と定義することにする。

まず BI の定式化をみておこう⁽¹⁰⁾。 B を “bar node” のあつまりとする。つまり、木がそこで整礎だとわかる節のあつまりが B である。また、 P を何らかの述語とする。

BI : 以下を仮定する。

$$A1 \quad \forall \alpha \exists x (\bar{\alpha}(x) \in B),$$

$$A2 \quad \forall n \forall y (n \in B \rightarrow n * \langle y \rangle \in B),$$

$$A3 \quad \forall n (n \in B \rightarrow n \in P),$$

$$A4 \quad \forall n (\forall y (n * \langle y \rangle \in P) \rightarrow n \in P).$$

このとき、 $\langle \rangle \in P$ 。

(A1) は要するに、今考えられている木が、 B に属する節の箇所で整礎であることを述べている。一番下に空列 $\langle \rangle$ 、その上に $\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle$ と二つの節、さらにその上に $\langle 00 \rangle, \langle 01 \rangle, \langle 10 \rangle, \langle 11 \rangle$

となっているとすると、これは $\langle \rangle$ からたどっていけば bar node に行き着くことを述べている。これを「 $\langle \rangle$ is barred」と書くことにする。(A2) は B が単調であることを述べ、(A3) は B に入っている節について P が成り立つことを主張する。(A4) は P が帰納的 (inductive) であることを述べている。まとめれば次のようになる。木が B で整礎であり (A1)、 B に属する節が P を持つとする (A3)。さらに、ここから P が下の節々へと「伝わっていく」(A4) とするならば、最終的に $\langle \rangle$ も P を持つ。すなわち、木のすべての節が P を持っていることを意味しているため、 BI は木の上の帰納法を意味していることになる。

さて、 BI の「 $\rightarrow$ 」を BHK 解釈で読めば、(A1) の任意の証明を、(A2) から (A4) の条件のもとで、 $\langle \rangle \in P$ の証明へと変形することによって BI を示すことができる。問題はこの (A1) の証明にどのような推論が用いられているか、である。ブラウワーは次の三つしか用いられていないと主張する。これが基本仮定 (以下 FA) である。

基本仮定 (FA) : (A1) の証明には次の推論規則のみが用いられている。

$$\frac{n \in B}{n \text{ is barred}} \quad \eta\text{-規則} \quad \frac{n * \langle x \rangle \text{ is barred for all } x}{n \text{ is barred}} \quad F\text{-規則}$$

$$\frac{n \text{ is barred}}{n * \langle x \rangle \text{ is barred}} \quad \zeta\text{-規則}$$

一つ目は単に B が bar node のあつまりであることを述べ、三つ目はある節が bar node であるならばその一つ上も bar node であることを述べている。注目すべきは二つ目の F -規則で、ある節 n の任意の (木を下から見たときの) 後続者 $n * \langle x \rangle$ が bar node であれば、 n 自身も bar node であることを述べている。つまり、この規則は、無限個の前提を持つ規則である。

FA が与えられれば (A1) の証明を $\langle \rangle \in P$ の証明に変形することは容易である。ポイントは次の点である。(A1) の証明が与えられたとしても、そこにどのような推論が組み合わさって用いられているかは様々でありえるのだが、いかなる場合でもそれを $\langle \rangle \in P$ の証明に変形できるのだろうか。この解決策は実に容易で “... is barred” を “... $\in P$ ” に置き換えるというものである。後の議論とのつながりから、これを代入と呼ぶことにしよう。すると、代入の結果として η -規則は (A3) になり、 F -規則は (A4) になる⁽¹¹⁾。

$$\frac{n \in B}{n \text{ is barred}} \quad \eta\text{-規則} \quad \Rightarrow \quad \frac{n \in B}{n \in P} \quad (A3)$$

$$\frac{n * \langle x \rangle \text{ is barred for all } x}{n \text{ is barred}} \quad F\text{-規則} \quad \Rightarrow \quad \frac{n * \langle x \rangle \in P \text{ for all } x}{n \in P} \quad (A4)$$

したがって、(A1) の証明とは “ $\langle \rangle$ is barred” のそれであったのだから、 $\langle \rangle \in P$ の証明が得られたことになる。

ここで重要なのはこの代入という操作が、スントホルムとファン・アッテンの言い方を借りれば「推論的つながり」(inferential link) を保存するという点である。つまり、 $A \rightarrow B$ の証明において、 A の証明を B の証明に変形するためにはどのような操作でも許されるという訳ではない。ここで「推論的つながり」がなんであるかを明確に特徴づけるのは難しいが、たとえば A の証明を完全に別の証明に書き換えてしまうような変形は認められていない。推論的つながりが保たれない例としてスントホルムとファン・アッテンが挙げているのは、演繹定理 (Deduction Theorem) である。この証明において、時には $A, \Gamma \vdash B$ の証明が完全に作り替えられて $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ の証明が得られるからである。ブラウワーによる代入操作は、少なくとも証明図の木構造 (the structure of the underlying tree) は保存すると考えられる。この点は、以下で考察するブフホルツの代入操作でも満たされる。

ここでポイントをまとめておくと、ブラウワーの議論には証明への量化が含まれており、その範囲を FA は制限しているという点が肝要である。つまり、BI は「 $(A1) \wedge (A2) \wedge (A3) \wedge (A4) \rightarrow \langle \rangle \in P$ 」という形をしており、ブラウワーは (A1) の任意の証明 q を $\langle \rangle \in P$ のそれへと変形する手続き f があることを示さなければならないのだが、変形の対象となる証明の範囲は FA によって制限されているのである。

3. Ω 規則とは

本節ではブフホルツの Ω 規則を概観し、これがブラウワーの議論と非常によく似ていることを指摘する。ここでの Ω 規則の定式化は Buchholz (1981) を適宜簡略化したものである⁽¹²⁾。以下では Ω 規則による、繰り返しを許さない再帰的定義 (non-iterated inductive definition) の理論 ID_1 の分析を考察する。

Γ を算術的で単調な再帰的定義とする。たとえば、論理式や証明図の定義はすべてこのような形で書ける。 I_Γ をこの定義の不動点を表す述語とすれば、論理式や証明図すべてからなる集合は不動点とみなせる。詳細は省くが、通常の算術の言語に I_Γ を加え、 I_Γ が最小の不動点であることを主張する公理を加えることによって ID_1 は得られる。

$CL: \Gamma(I_\Gamma) \subseteq I_\Gamma,$

$Ind: \Gamma(A) \subseteq A \rightarrow I_\Gamma \subseteq A.$

一つ目の公理は I_Γ が不動点であること、二つ目はそれが最小であることを主張する。

それゆえ、 Ind は再帰的に定義された集合上の帰納法であると考えられる。 ID_1 は非可述的な理論といわれるが、それはその証明論的強さがいわゆるハワード順序数 $\psi_{\Omega+1}$ だからである。このような強さは、カット消去定理を証明する際の困難さに現れるが、その ID_1 のカット消去定理を可能にする道具立てが Ω 規則である。

Ω 規則のアイデアをごく簡単に解説しよう。上の Ind は $\forall x(\Gamma(A, x) \rightarrow A(x)) \rightarrow \forall y(I_\Gamma(y) \rightarrow A(y))$ であるから、この $\rightarrow$ を BHK 解釈で読めば次のようになる。まず、 $\forall x(\Gamma(A, x) \rightarrow A(x))$ の仮定のもとで、任意の自然数 n について、 $I_\Gamma(n)$ のいかなる証明 q も $A(n)$ のそれ $f(q)$ へと変形できる、そのような f が存在するならば、 $I_\Gamma(n) \rightarrow A(n)$ と結論してよい。そして、これらすべてを集めてくれば $\forall y(I_\Gamma(y) \rightarrow A(y))$ を ω 規則によって結論することができる。このことを通常の証明図の形で書けば以下のようになる。

$$\frac{\begin{array}{c} \{q : I_\Gamma(n)\} \\ \vdots \\ \dots A(n) \dots \\ \dots I_\Gamma(n) \rightarrow A(n) \dots \end{array}}{\forall y(I_\Gamma(y) \rightarrow A(y))} \frac{\Omega}{\omega}$$

この図からわかるように Ω 規則は無限個の前提を持つ推論規則であり、 q は ω 規則を持つ PA に CL を加えた体系の証明図である。ということは、 Ω 規則の前提は非加算無限個あって、 q にインデックス付けられている。以下では、このような q のあつまりを Ω 規則のドメインと呼ぶことにする。ここで、前提が証明によってインデックス付けられているということが少々わかりづらいかもしれないので、他の例と比較することにしよう。たとえば

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}$$

といった規則であれば、前提のインデックスのあつまりは（前提が二つあるので） $\{0, 1\}$ である。また、シュッテの ω 規則

$$\frac{\dots A(n) \dots}{\forall x A(x)}$$

であれば、前提のインデックスのあつまりは自然数の集合 ω となる。このように、通常はインデックスは何らかの自然数であるが、 Ω 規則の場合にはインデックスが証明図となっているのである。

さて、 $\Gamma(A) \subseteq A \rightarrow I_\Gamma \subseteq A$ はどのように導かれるのであろうか。特に、 $I_\Gamma(n)$ のいかなる証明も $A(n)$ のそれへと変形するような操作 f とはこの場合なんであろうか。答

えは単純に「代入」である⁽¹³⁾。以下のような $I_\Gamma(n)$ の、 $PA(\omega) + CL$ における証明図 q が与えられたとする。

$$\begin{array}{c} \Gamma(I_\Gamma) \subseteq I_\Gamma \\ \vdots \\ I_\Gamma(n) \end{array}$$

ここで“ I_Γ ”をすべて“ A ”で置き換えてしまうと次が得られる。

$$\begin{array}{c} \Gamma(A) \subseteq A \\ \vdots \\ A(n) \end{array}$$

すると今度は $\Gamma(A) \subseteq A$ が新たな仮定となるが、これはそもそも議論の仮定に他ならないので問題ない。よって、 ω 規則を適用すれば、 $\Gamma(A) \subseteq A \rightarrow I_\Gamma \subseteq A$ が導けたことになる。ここで代入という操作のポイントを簡単にまとめておく。まず、 q は $I_\Gamma(n)$ の任意の証明図なのだから、どのような形をしているのかは事前にはわからない。そのような状況で $I_\Gamma(n)$ の証明 q を $A(n)$ の証明 $f(q)$ に一様 (uniform) に変形しなければならず、これがまさに問題なのであるが、代入という操作はこのことを可能にする。この代入操作も「推論的つながり」を保存するものであると考えられ、特に、証明図の背後にある木構造をすべて保存することが、その定義をみればわかる。

ここまでくれば、ブラウワーの議論と Ω 規則による ID_1 の分析との相似性を見て取れることはそれほど難しくはない。ここで、両者は共に BHK 解釈に基づいており、したがって、このような相似性は初めから明らかではないか、という疑念が湧くかもしれない。しかしながら、 A の証明を B のそれへと変形する際にどのような操作を用いればよいのかについて、 BHK 解釈は何も述べていない。この点に関して本稿の示唆は「代入」という形で一定の回答を与えているのである。さらにいえば、ブラウワーの FA によると、使われている推論規則は三種類のみであった。これらは基本的に ω 算術で解釈できる類いのものである。また、 Ω 規則のドメインも基本的に算術的な証明図から成っており、この点にも両者の分析の相似性をみることができよう。

4.ブラウワーの基本仮定はなぜ必要だったのか

本節では FA がなぜ必要であったのかを明らかにする。そのために、 Ω 規則のドメイン $|\Omega|$ についてまず考察してみよう。なぜならば、 Ω 規則の非可述性はまさにこの $|\Omega|$ の構成に現れるからである。前述のように、 $|\Omega|$ は $PA(\omega) + CL$ の推論規則のみを用いた、 I_Γ を帰結として持つ証明図のあつまりであった。 Ω 規則はこの集合 $|\Omega|$ 上を量化することで定式化される。この量化をはっきりさせるために、 Ω 規則の定式化を

少し別の形でみてみよう。 q がなんらかの証明図のとき、その帰結を $\Gamma(q)$ と書くことにする。また、 $\Omega(\dots h \dots)$ は、無限にたくさんの証明図 h に、 Ω 規則をそれぞれ適用した結果を表すものとする。

1. $q \in |\Omega| \wedge \Gamma(q) = I_\Gamma(n)$ となる任意の q をとる。
2. もしこのような任意の q について $\exists f(\Gamma(f(q)) = A(n))$ ならば、 $\Omega(\dots f(q) \dots)$ は $I_\Gamma(n) \rightarrow A(n)$ の証明図である。

そして、これらを集めてきて ω 規則を適用すれば、 $\forall x(I_\Gamma(x) \rightarrow A(x))$ が導けたことになる。ここで、 $|\Omega|$ が算術的な推論規則以外、たとえば Ω 規則を含んでいるとしてみよう。この定義が破綻していることは次のようにしてわかる。 Ω 規則は $|\Omega|$ 上を量化しているために、いわば $|\Omega|$ の存在を前提している。ところが、 $|\Omega|$ を定義するために Ω 規則に言及するということは、つまりのところ、 Ω 規則を定義するために Ω 規則を用いているということになり、循環である。ここで非可述性に関するダメットの規準を用いることができるだろう。すなわち、あるドメインを定義するのに、そのドメイン上の量化が含まれてはならない、という規準である (Dummett, 1981, p. 531)⁽¹⁴⁾。

ここで $I_\Gamma \subseteq A(x)$ はそもそも $\forall x(I_\Gamma(x) \rightarrow A(x))$ の形をしているのだから、 Ω 規則とはある形をした $\rightarrow$ に関わる推論規則になっていることを思い出しておこう。 $\rightarrow$ の非可述性に関する問題を簡単にまとめるならば次のようになる。いわゆる *BHK* 解釈では、「証明」の範囲を規定する形で $\rightarrow$ などの論理定項の意味が与えられる。たとえば p, q がそれぞれ A, B の証明であるならばそのペア $\langle p, q \rangle$ は $A \wedge B$ の証明であると定義される。 $\rightarrow$ の場合には、 p が $A \rightarrow B$ の証明であるのは、 A の任意の証明 q に対して pq が B の証明であるときである。ところが、ここには「任意の」という形で証明全体に対する量化が行われており、非可述である。これが $\rightarrow$ にまつわる困難であり、この非可述性をなんらかの条件のもとで制限する必要がある⁽¹⁵⁾。そのやり方の一つが $|\Omega|$ のような制限である。つまり、 $A \rightarrow B$ の証明を全く制限せずに考えているから非可述性の問題が生ずるのであり、それを適宜制限してやればよい。さらにいえば Ω 規則は現代の証明論でいうところの「再帰的定義」(inductive definition) で定義されている。そこで、以下では Ω 規則の非可述性を「再帰的定義の非可述性」と呼ぶことにする⁽¹⁶⁾。

ここでもう一度 FA の定式化をみてみよう。

基本仮定 (FA) : $\forall \alpha \exists x(\bar{\alpha}(x) \in B)$ の証明には次の推論規則のみが用いられている。

$$\frac{n \in B}{n \text{ is barred}} \quad \eta\text{-規則} \quad \frac{n * \langle x \rangle \text{ is barred for all } x}{n \text{ is barred}} \quad F\text{-規則}$$

$$\frac{n \text{ is barred}}{n * \langle x \rangle \text{ is barred}} \quad \zeta\text{-規則}$$

以前に述べたように、これら（特に F -規則）は ω 算術によって定式化することが可能であるように思われる。そして、本稿の主張は、FA は要するに $\forall \alpha \exists x (\bar{\alpha}(x) \in B)$ を導出するのに直接必要な規則のみが用いられていなければならないことを述べているのではないか、ということである。つけ加えるならば、FA が制限している範囲はまさに ω 算術、ないしはその類いである。このように考えれば、ブラウワーの議論も Ω 規則に類似した形で理解できることがわかるであろう。

5. 結論と展望

これまでの議論をまとめれば次のようになる。ブラウワーは、バー帰納法の正当化において考察の対象となるカノニカルな証明のある範囲に限る FA を仮定した。そして FA を巡ってはいくつかの態度があるが、どれも FA が必要となる数学的根拠を探求するものではなかった。それに対して本稿は一つの回答を示唆した。つまり、ブラウワーの議論はブフホルツの Ω 規則と酷似しており、FA の必要性も Ω 規則のドメイン $|\Omega|$ に対する制限と同様に考えることができる、というものである。 $\rightarrow$ の非可述性への対処として FA は必要だったのである。さらにいえば、ブラウワーが FA を仮定することで克服しようとしたのは単に $\rightarrow$ の非可述性というわけではなく、再帰的定義の非可述性だったのである。

スントホルムは博士論文 (Sundholm, 1983a) の末尾で次のように述べている⁽¹⁷⁾。この論文のそもそもの動機は、 ω 規則を探求することでブラウワーのバー帰納法の証明と、（時には無限に枝分かれする）カノニカルな証明のアイディアを分析することにあった、と。しかしながら、結局のところ、哲学的に興味深い光を当てることはできなかったとも述べている。本稿の議論にしたがうならば、スントホルムの分析のためには ω 規則だけでは充分ではなく、 Ω 規則が必要だったのではないだろうか。

スントホルムとファン・アッテンの解釈 (Sundholm & van Atten, 2008) によれば、ブラウワーの議論全体が超越論的議論であり、FA は $\forall \alpha \exists x (\bar{\alpha}(x) \in B)$ の証明の形に関する超越論的要請として解釈されるのであった。筆者としてはこのような解釈は確かに可能かもしれないが、それほどの根拠は持っていないと考えているし、事実、彼らも「一つの可能な解釈」として示唆しているように見える。本稿の主張は、FA は再帰的定義の非可述性ゆえに必要だったのだ、というものである。もし、本稿で示唆したアイディアをより厳密な形で展開することが可能であれば、それはブラウワーの議論が数学的なものであることを意味するだろう。それに対して、スントホルムとファン・アッテンの解釈からはブラウワーの議論が数学的ではないことが帰結するように思われる。

最後に、ここでは扱われなかった問いのいくつかを提示して本稿を終えることにする。第一の問題は「推論的つながり」に関するものである。ブラウワーの議論と Ω 規則による分析では代入という手法が共通していたが、ブラウワーにとって大事なのは推論的つながりを保存することであった。それゆえ、 A の証明を B のそれへと変形するときにどんな手法を用いても構わない、ということではない。しかしこの「推論的つながり」とはいったいなんだろうか。

第二の問題は、ブラウワーの議論と記述的集合論、ないしは帰納的関数論との間の歴史的関係である。パーソンズ (Parsons, 1967) によってすでに指摘されているように、ブラウワーの発想は記述集合論や帰納的関数論と深いつながりを持っているように思われる。記述集合論に関していえば、ボレル集合は再帰的定義の典型であるが、このようなトポロジーにおける基本的な概念を、トポロジーの非常に優れた研究者であるブラウワーがよく知っていたことは容易に想像できる。また帰納的関数論の場合であれば、クリーネによる「 Π_1 集合は帰納的である」という古典的な定理 (Moschovakis, 1974, p. 24) の発想もブラウワーのバー帰納法の議論と類似している。これらの歴史的経緯についてもさらなる探求が必要であろう。他にも問われるべき哲学的、数学的問いはいくつも存在するが、とりあえずはここで本稿を閉じることにする⁽¹⁸⁾。

註

- (1) ここで配慮しなければならないのは、ブラウワーはそもそも数学の「基礎付け」を目指してはいなかったのではないか、という問題である。本稿ではこの重要で興味深い問題に立ち入ることはできないが、詳しくは金子 (2007) を参照されたい。
- (2) ここで「いわれる」と譲歩をつけたのは、直観主義数学は（実数ではなくて）「木」について語っているとみなせば矛盾しないと考える余地があるのではないか、と思われるからである。なお、テイトも同様の主張をしている (Tait, 1983, p. 183)。
- (3) ファン定理は、有限に分岐する有限木にはその長さについての一様な上界が存在することを主張し、これはケーニッヒの補題と古典論理上では同値である。詳しくはたとえば Dummett (2000) を参照のこと。
- (4) もう一つの重要な原理は連続性原理であるが、本稿の主題からはそれるためここでは扱わない。
- (5) ω 規則は、通常、一階の算術の証明論のために用いられる。標準的な文献としてはたとえば Schwichtenberg (1977); 新井 (2011) がある。
- (6) ブラウワーは、ヒルベルトのプログラムには直観主義の手法が必要であると述べている (Brouwer, 1928) が、それがこの無限的な推論という道具立てなのかは定かではない。しかしながら、ヒルベルトの正統な後継者であるゲンツェンが、無限的な推論である ω 規則を Gentzen (1936) で暗に用いていたことを考えると、このような推測もありうる筋の一つではある。Gentzen (1936) と ω 規則の関係については Buchholz (1997) が参考になり、より広い視野からゲンツェンの無矛盾性証明を検討したものとして秋吉・高橋 (2013) がある。
- (7) ただし、トルルストラは FA について興味深い考察を与えている (Troelstra, 1977)。トルルストラによると、FA は、 $\forall \alpha A$ のような形をした論理式を帰結として持つ証明図が、何らかの「正規形」に還元できることを主張する。

- (8) もちろん、「木全体」という言い方はブラウワーにとっては御法度である。木は常に「際限なく生成されうる」が、ここでは説明の簡便さのためにこうした言い方を用いることにする。
- (9) 当然ながら、我々の言語によって記述可能な選択は高々加算無限個であるが、実数は非加算無限個あるのだから、無法則 (lawless) な選択もありうる。
- (10) ここでの BI はいわゆる単調 (monotonic) な BI のことである。決定可能 (decidable) な BI でも構わない。 BI の定式化に関する詳しい説明としては Dummett (2000) が参考になる。
- (11) ζ -規則についても考慮が必要であり、この規則は B が単調であることと密接なつながりを持っている。ちなみに、 BI の典型的な適用例 (たとえばファン定理や構成的順序数上の帰納法) において、 B はたいていは単調である。
- (12) 特に、Buchholz (1981) での体系は Ω 規則を繰り返すためのものであり、ここで述べたような規則はそこでの Ω_1 規則に相当する。
- (13) ここですでにブラウワーの議論との類似性がみてとれることに注意されたい。
- (14) なお、この規準は、ダメットが指摘するように、数学的対象が我々の思惟の産物であるかどうか、といった形而上学的な前提とは独立である。
- (15) この点を克服する試みは様々な形で提案されてきた。そのような試みのうち最も古いものはゲンツェンによるもの (Gentzen, 1936) である。他にもゲーデルのディアレクティカ解釈 (Gödel, 1958) や、結局のところうまくはいかなかったがクライゼルによる「構成の理論」 (theory of construction, Kreisel, 1965; Sundholm, 1983b)、さらにはマルティン＝レーフのタイプ理論 (Martin-Löf, 1984) のような解決法もある。
- (16) より正確に言えば「繰り返しを許さない再帰的定義の非可述性」である。現代の証明論における非可述性の一つの基準は、その理論の「強さ」を表す証明論的順序数がフェファーマン＝シュッテの Γ_0 より小さいことである。それに対して、繰り返しを許さない再帰的定義の理論 ID_1 の証明論的順序数は $\psi(\epsilon_{\Omega+1})$ であり、 Γ_0 よりずっと大きい。
- (17) この博士論文にはページ数が記載されていないが、該当の箇所は 8 章の冒頭である。
- (18) 本稿の内容は、2013 年 3 月 1 日に京都大学で開催された “An International Workshop on Constructivism” において発表され、多くの方から有益なコメントを頂いた。特に、出口康夫、黒川英徳、根元多佳子、サム・サンダース、八杉満利子の諸氏に感謝する。また、草稿に関して有益で詳細なコメントを頂いた驚澤徹、高橋優太の両氏にも感謝申し上げる。

文献

- 秋吉亮太・高橋優太 (2013). 「ゲンツェンを読む—三つの無矛盾性証明の統一的解釈—」, 『科学基礎論研究』, 掲載予定, 22 頁.
- 新井敏康 (2011). 『数学基礎論』, 岩波書店.
- Brouwer, L. E. J. (1927). ‘Über Definitionsbereiche von Funktionen,’ *Mathematische Annalen*, 97, 60–75. English translation with introduction by Charles Parsons in van Heijenoort (1967).
- (1928). ‘Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus,’ *KNAW Proceedings*, 31, 374–379. English translation in Mancosu (1998).
- Buchholz, W. (1977). ‘Eine Erweiterung der Schnitteliminationsmethode,’ *Habilitationsschrift*, Ludwig-Maximilians-Universität München.
- (1981). ‘The $\Omega_{\mu+1}$ -Rule,’ in W. Buchholz, S. Feferman, W. Pohlers, & W. Sieg (Eds.), *Iterated Inductive Definitions and Subsystems of Analysis: Recent Proof-Theoretical Studies*, 897 of *Lecture Notes in Mathematics*, Berlin: Springer, 188–233.
- (1997). ‘Explaining Gentzen’s Consistency Proof within Infinitary Proof Theory,’ in G. Gottlob, A. Leitsch, & D. Mundici (Eds.), *Computational Logic and Proof Theory: 5th Kurt Gödel Colloquium, KGC’97*, 1289 of *Lecture Notes in Computer Science*, Berlin: Springer, 4–17.

- Dummett, M. A. E. (1981). *Frege: Philosophy of Language*, 2nd edition, London: Duckworth.
- (2000). *Elements of Intuitionism*, 2nd edition, 39 of Oxford Logic Guides, Oxford: Oxford University Press.
- Feferman, S., Dawson, Jr., J. W., Kleene, S. C., Moore, G. H., Solovay, R. M., & van Heijenoort, J. (Eds.) (1990). *Kurt Gödel Collected Works, Vol. II: Publications 1938–1974*, Oxford: Oxford University Press.
- Gentzen, G. (1936). ‘Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie,’ *Mathematische Annalen*, 112, 494–565. English translation in Szabo (1969).
- Gödel, K. (1958). ‘Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes,’ *Dialectica*, 12, 280–287. Reprinted with English translation in Feferman et al. (1990).
- van Heijenoort, J. (Ed.) (1967). *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931*, Cambridge, Mass.: Harvard University Press.
- 金子洋之 (2007). 「ブラウワー哲学再考」, 専修大学哲学会編, 『生田哲学』, 第 11 卷, 34–45 頁.
- Kleene, S. C. & Vesley, R. E. (1965). *The Foundations of Intuitionistic Mathematics*, 39 of Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Amsterdam: North-Holland.
- Kreisel, G. (1965). ‘Mathematical Logic,’ in T. L. Saaty (Ed.), *Lectures in Modern Mathematics*, Vol.3, New York: Wiley, 95–195.
- Mancosu, P. (Ed.) (1998). *From Brouwer to Hilbert: The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*, Oxford: Oxford University Press.
- Martin-Löf, P. (1984). *Intuitionistic Type Theory*, 1 of Studies in Proof Theory, Lecture Notes, Naples: Bibliopolis. Notes by Giovanni Sambin of a series of lectures given in Padua, June 1980.
- Moschovakis, Y. N. (1974). *Elementary Induction on Abstract Structures*, 77 of Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Amsterdam: North-Holland.
- Parsons, C. D. (1967). ‘An Introductory Note to Brouwer (1927),’ in van Heijenoort (1967), 446–53.
- Schwichtenberg, H. (1977). ‘Proof Theory: Some Applications of Cut-Elimination,’ in J. Barwise (Ed.), *Handbook of Mathematical Logic*, 90 of Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Amsterdam: North-Holland, 867–895.
- Sundholm, G. & van Atten, M. (2008). ‘The Proper Explanation of Intuitionistic Logic: On Brouwer’s Demonstration of the Bar Theorem,’ in M. van Atten, P. Boldini, M. Bourdeau, & G. Heinzmann (Eds.), *One Hundred Years of Intuitionism (1907–2007)*, Basel: Birkhäuser, 60–77.
- Sundholm, G. (1983a). ‘Proof Theory: A Survey of the Omega-Rule,’ D.Phil. thesis, University of Oxford.
- (1983b). ‘Constructions, Proofs and the Meaning of Logical Constants,’ *Journal of Philosophical Logic*, 12, 151–172.
- Szabo, M. (Ed.) (1969). *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, 55 of Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Amsterdam: North-Holland.
- Tait, W. W. (1983). ‘Against Intuitionism: Constructive Mathematics is Part of Classical Mathematics,’ *Journal of Philosophical Logic*, 12, 173–195.
- Troelstra, A. S. (1977). *Choice Sequences: A Chapter of Intuitionistic Mathematics*, 3 of Oxford Logic Guides, Oxford: Oxford University Press.
- Troelstra, A. S. & van Dalen, D. (1988). *Constructivism in Mathematics, Vol. I*, 121 of Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Amsterdam: North-Holland.

〔日本学術振興会特別研究員 (PD)・哲学、論理学〕