

修正キュムラント打ち切り理論とその性格

京大 理学部 筧 友正
木田 重雄
水島 二郎

§1. Introduction

修正キュムラント打ち切り理論を Burgers 乱流に適用し、数値計算を行なったところ、エネルギー・スペクトルに負エネルギーは発生せず、Burgers 方程式の厳密解の漸近形によく一致し、エネルギー減衰法則も漸近理論と良く一致することを前に報告した。今回はこの修正キュムラント打ち切り理論の性格をさらにくわしく検討した。特に速度微分の skewness が時間と共にあるいは Reynolds 数と共にどう変わるかを調べた。この速度微分の skewness という量は乱流の微細構造に関係する量で、近似理論の最も厳しいテストになると考えられる。

Burgers 乱流に対する修正 0-4 次キュムラント理論について簡単に述べておく。Burgers 方程式を次の形に書く。

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (1)$$

修正 0-4 次キュムラント理論での Burgers 乱流に対する入ペクトル方程式は無次元量を用いて次のように書くことができる。

$$\text{波数} : s = k/k_0$$

$$\text{時間} : \tau = \nu k_0^2 t$$

$$\text{Reynolds 数} : R = (E_0 / \nu^2 k_0)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{2 次のスペクトル関数} : \phi(s, \tau) = E(k, t) / E_0$$

$$\frac{\partial \phi(s, \tau)}{\partial \tau} + 2s^2 \phi(s, \tau) = -\frac{R^2}{2} s \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-2(s^2 + s'^2 + ss')}}{(s^2 + s'^2 + ss')} ds'$$

$$\times \{ (s + s') \phi(s, \tau) \phi(s', \tau) - s \phi(s', \tau) \phi(s + s', \tau)$$

$$- s' \phi(s, \tau) \phi(s + s', \tau) \} ds' \equiv R \psi(s, \tau) \quad (2)$$

この式は 0-4 次キュムラント近似を用い、"3 次のキュムラントは 2 次のキュムラントに比べ短い relaxation time をもつ。" という仮定、すなわち "3 次のキュムラントは 2 次のキュムラントに比べて急速に変化するという仮定を用いて導かれる。

§ 2. 修正 0-4 次キュムラント理論によるエネルギー・スペクトルの漸近解

②式で与えられるエネルギー・スペクトル方程式の $R \gg 1$, $\tau \gg 1$ における漸近解を求めてみよう。 $R \gg 1$ であるから左辺の時間微分項, 粘性項は無視することができ, 右辺 = 0 の解を求めればよい。また $\tau \gg 1$ より積分の中の $\exp$ の項も無視できる。エネルギー・スペクトル $\phi(s)$ をべきの形

$$\phi(s) \propto |s|^{-\alpha}$$

に仮定すると,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds'}{(s^2 + s'^2 + ss')} \left\{ (s+s')s^{-\alpha}|s'|^{-\alpha} - s|s'|^{-\alpha} \cdot |s+s'|^{-\alpha} - s's^{-\alpha}|s+s'|^{-\alpha} \right\} = 0$$

が得られる。この式が任意の s に対して成立するという条件から指数 α が決定される。この積分が収束するためには α は $-1 < \alpha < 3$ の範囲の値でなければならない。簡単な計算で、上の方程式の解は $\alpha = 0, 1$ であることがわかる。またそれ以外の α は解とはならないということを数値計算で確かめた。したがって、エネルギー・スペクトルの漸近解は

$$\phi(s) = \text{const or } s^{-1}$$

でなければならない。

§3. Skewnessの数値計算

速度の空間微分の skewness は次式で定義される。

$$S_0 \equiv - \frac{\langle (\frac{\partial u}{\partial x})^3 \rangle}{\langle (\frac{\partial u}{\partial x})^2 \rangle^{\frac{3}{2}}}$$

S_0 は②式に含まれる量 $\phi(s, \tau)$, $\psi(s, \tau)$ を用いて次のように書くことができる。

$$S_0 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} s^2 \psi(s) ds}{\left(\int_{-\infty}^{\infty} s^2 \phi(s) ds \right)^{\frac{3}{2}}}$$

②式を次の初期条件の下に数値計算し、 S_0 のふるまいを調べた。

$$\text{Case (I)} \quad \phi(s, 0) = e^{-s^2}$$

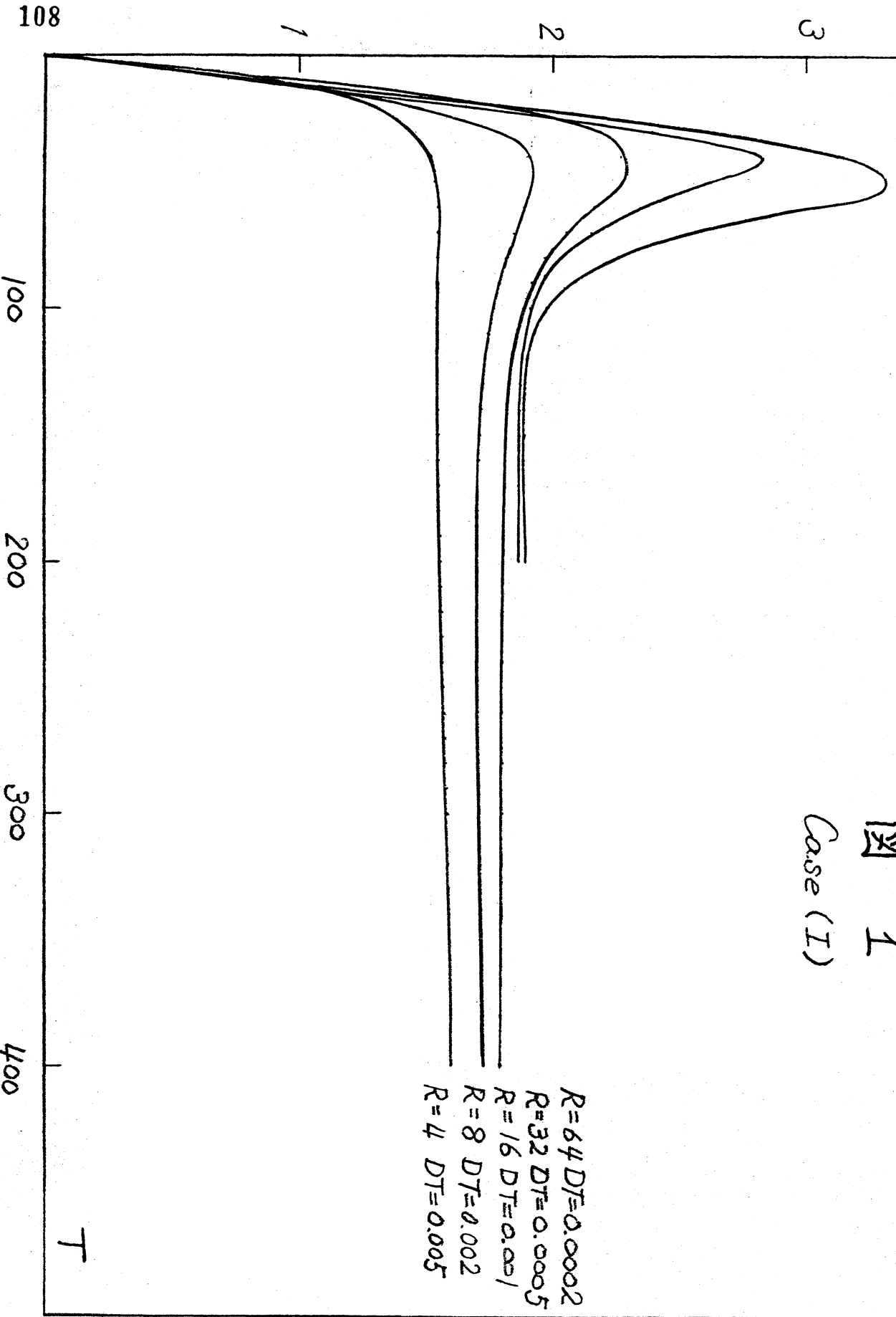
$$\text{Case (II)} \quad \phi(s, 0) = s^2 e^{-s^2}$$

計算の結果は図1, 図2で示す。 S_0 の $\tau \rightarrow \infty$ での漸近的な値と Reynolds 数との関係を図3で示す。図1を見ると S_0 は Case (I) の場合には1度ピークをもったのち減少し、ふたたびわずかながら時間と共に増加する傾向が見られる。Case (II) の場合には図2より S_0 は1度ピークをもち減少するところまで

Skewness

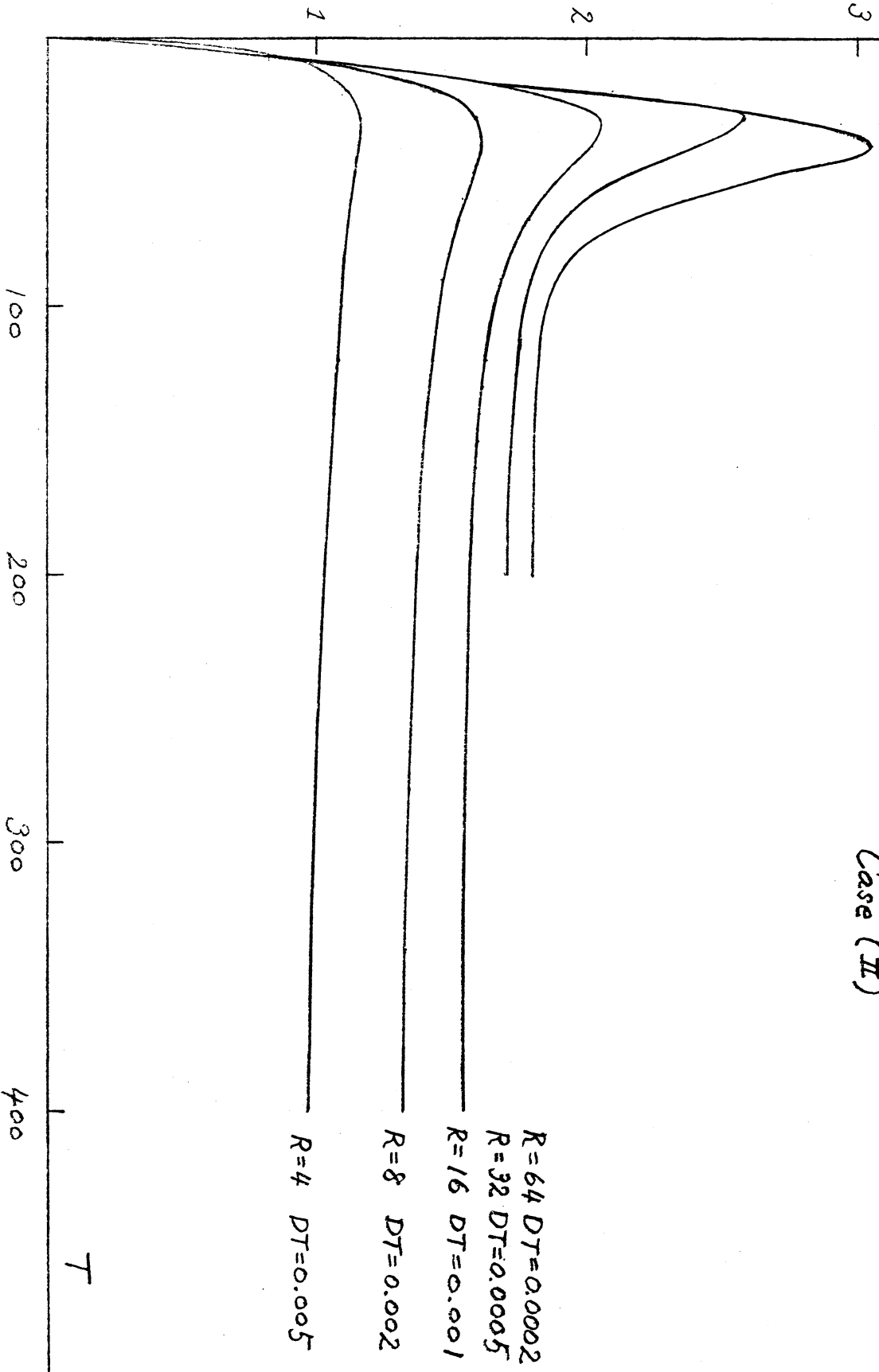
图 1

Case (I)



Skewness

图 2
Case (II)



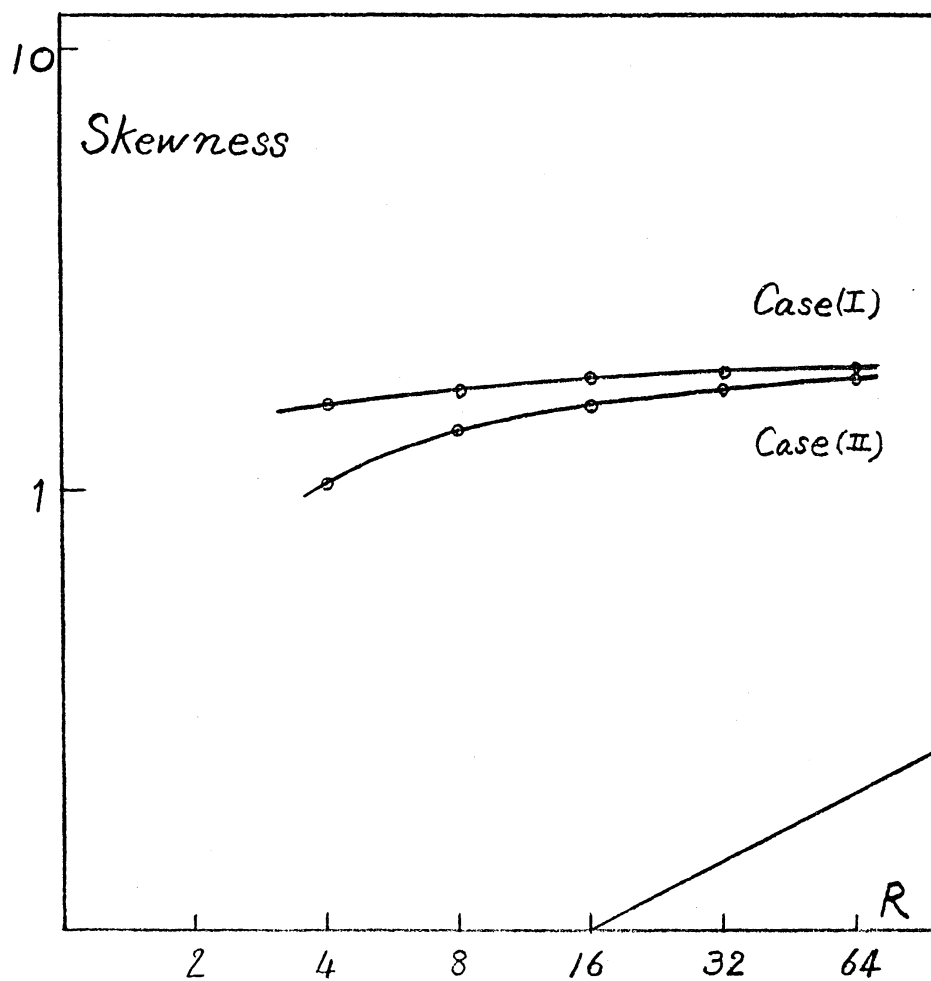


圖 3

は Case (I)と同じであるが、その後時間と共にわずかづつ減少する傾向にあることがわかる。また、図3より Case (I), Case (II)はともに S_0 の $t \rightarrow \infty$ での漸近的な値が R を増加していくとある値に近づく傾向にあることがわかる。

これらの数値計算の結果はどのように解釈すればよいのかを考えてみよう。まず Case (I), Case (II)はともに1度ピークをもったのちに減少するが、これはどういう意味をもつのか。このことを調べるために次のような数値実験を行なった。1つのショックだけが形成され、減衰するとき S_0 はどのように変化するかを調べた。すなわち、Burgers方程式①を $u(x, 0) = \sin x$, $(-\pi \leq x \leq \pi)$ の初期条件の下に数値計算し S_0 を求めた。結果を図4, 図5で示す。図5からわかるように S_0 が1度ピークをもったのちに減少するという性質は Burgers 乱流を構成している1つ1つのショックが形成され、減衰することの反映であることがわかった。次に、時間 t がさらに大きくなったときの S_0 のふるまいはどのように理解すればよいだろうか。そのために Burgers 方程式の厳密解の漸近形を用いて S_0 の漸近的なふるまいを調べる。

§4. 三角波展開による速度微分の skewness と flatness の計算

Burgers 方程式に従う速度場の、Reynolds 数および時間

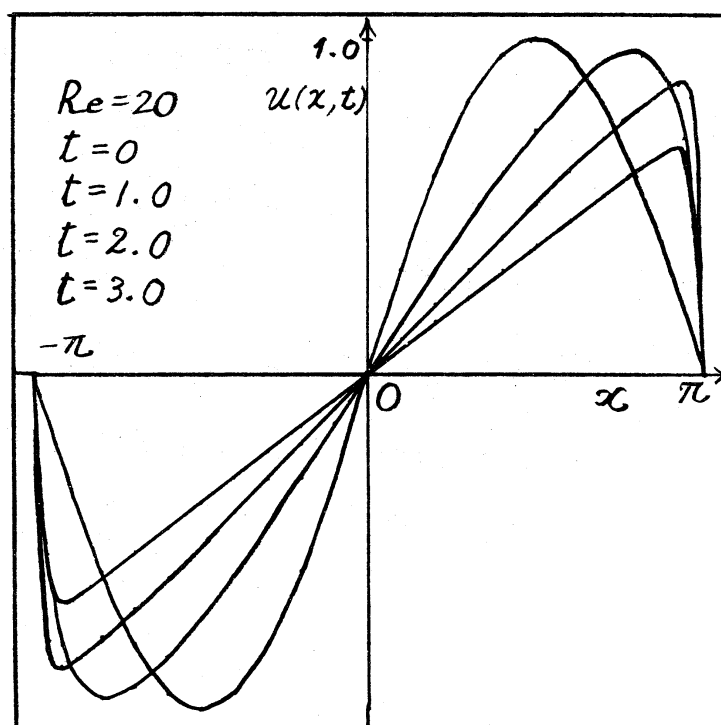


图 4

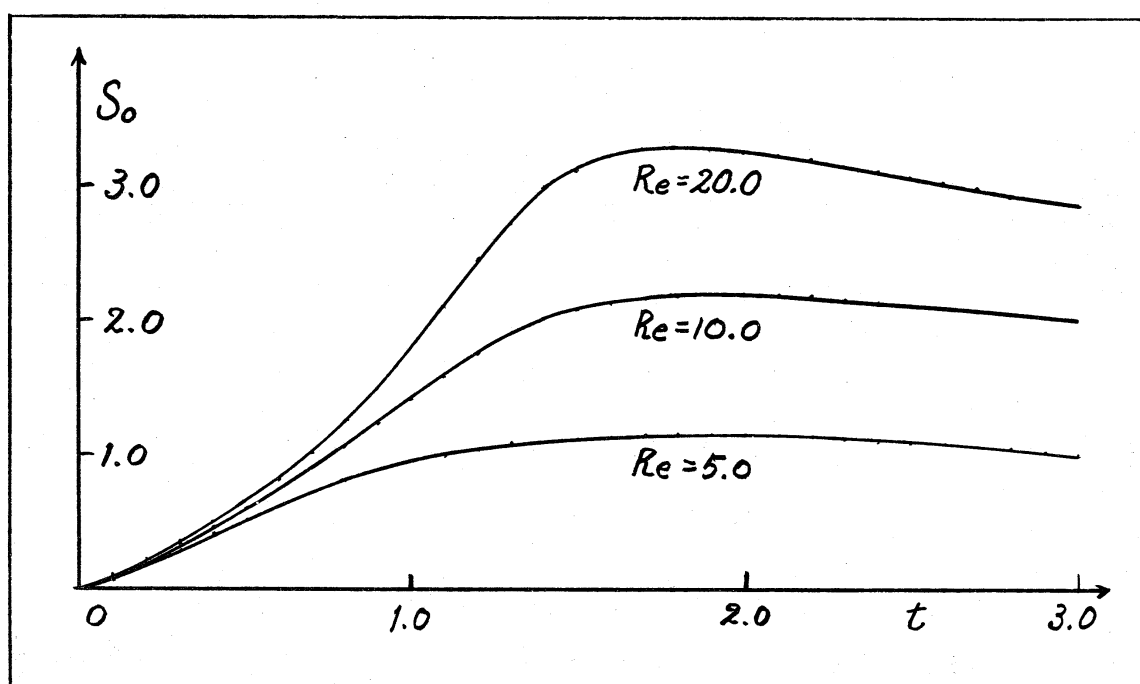


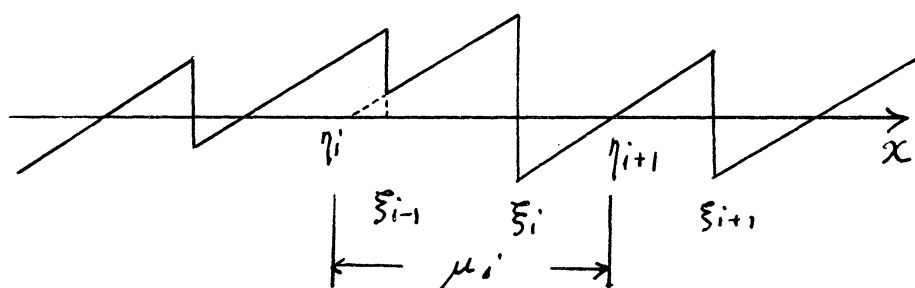
图 5

t がじゅうぶん大きいときのふるまいについては次のことが知られている⁽¹⁾。どのような初期条件から出発しても、速度場は $R \gg 1$, $t \gg 1$ では次式で表わされる“三角波の集まり”とみなすことができる。

$$u(x, t) = \frac{1}{t} \left[x - \frac{1}{2}(\eta_i + \eta_{i+1}) \right] - \frac{1}{2t} (\eta_{i+1} - \eta_i) \tanh \left[\frac{1}{4\sqrt{t}} (\eta_{i+1} - \eta_i) (x - \xi_i) \right],$$

$$\frac{1}{2}(\xi_{i-1} + \xi_i) \leq x \leq \frac{1}{2}(\xi_i + \xi_{i+1}) \quad (3)$$

ここで、 $\{\xi_i\}$, $\{\eta_i\}$ は初期条件から決定される定数である。



$\mu_i = \eta_{i+1} - \eta_i$ の確率分布 $P(\mu)$ は指数型

$$P(\mu) = \frac{1}{l(t)} e^{-\frac{\mu}{l(t)}}$$

である。また $l(t)$ の時間依存性は次の不変量

$$J = \int_0^\infty \langle u(x, t) u(x+r, t) \rangle dr$$

の値によって異なり、

$$\text{Case (I)} \quad J \neq 0 \text{ のとき} \quad l(t) = l_0 (t/t_0)^{2/3}$$

Case (II) $J=0$ のとき $l(t) = l_0 (t/t_0)^{1/2}$ 与えられる。

これらのことを使って、速度微分 $\frac{\partial u}{\partial x}$ の skewness

$$S_0 = - \frac{\langle (\partial u / \partial x)^3 \rangle}{\langle (\partial u / \partial x)^2 \rangle^{3/2}}$$

および, flatness

$$F_0 = \frac{\langle (\partial u / \partial x)^4 \rangle}{\langle (\partial u / \partial x)^2 \rangle^2}$$

を求める。速度微分は各 shock の近傍で特に大きな値をもつので、その平均量を計算するときには、これら shock 近傍からの寄与だけを考えればよい。i 番目の shock 近傍での速度微分は③式から

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx - \frac{\mu_i^2}{8\sqrt{t^2}} \cosh^{-2} \left\{ \frac{\mu_i}{4\sqrt{t}} (x - \xi_i) \right\}$$

となることがわかる。今、速度場が周期 L で周期的であるとし、領域 $0 \leq x \leq L$ (この中の shock の数を $N(t)$ 個とする。) 内で平均量を計算し、のちに $L \rightarrow \infty$ の極限をとる。

$$\begin{aligned} \langle \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \rangle &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{N(t)} \left(\frac{\mu_i^2}{8\sqrt{t^2}} \right)^2 \int_{\xi_i - \epsilon}^{\xi_i + \epsilon} \cosh^{-4} \left\{ \frac{\mu_i}{4\sqrt{t}} (x - \xi_i) \right\} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{L} \frac{1}{16} \frac{\langle \mu^3 \rangle}{\nu t^3} \int_{-\infty}^{\infty} \coth^{-4} s \, ds \\
&= \frac{1}{l(t)} \frac{1}{16} \frac{6 l^3(t)}{\nu t^3} \frac{4}{3} \\
&= \frac{l(t)^2}{2 \nu t^3}
\end{aligned}$$

同様にして

$$\left\langle \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^3 \right\rangle = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^3 dx = - \frac{l^4(t)}{\nu^2 t^5}$$

$$\left\langle \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^4 \right\rangle = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^4 dx = \frac{9}{2} \frac{l^6(t)}{\nu^3 t^7}$$

が得られる。これらの結果を用いて, skewness, flatness を計算すると次のようになる。

$$S_0 = \sqrt{8} R_l(t)^{\frac{1}{2}}$$

$$F_0 = 18 R_l(t)$$

ただし

$$R_l(t) \equiv \frac{l(t)^2}{\nu t} \quad \begin{cases} \propto t^{\frac{1}{3}} & (\text{Case (I)}) \\ = \text{const. in time} & (\text{Case (II)}) \end{cases}$$

である。skewness, flatness は R_l と共にそれぞれ $R_l^{\frac{1}{2}}$, R_l に比例して増大することがわかる。また skewness S_0 は

Case (I) の場合 $\epsilon^{\frac{1}{2}}$ に比例し、Case (II) の場合、定数であることがわかる。これらの結果は §2 で示した数値計算と定量的に一致しているとは言えないまでも、少なくとも定性的には良く一致している。

§5. Discussion

修正0-4次キュムラント近似を Burgers 乱流に適用し、その性格を調べた。前に発表したエネルギー・スペクトル、エネルギー減衰則は完全に Burgers 方程式の厳密解を用いた漸近理論と一致していた。今回調べた速度微分の skewness も良く Burgers 方程式の性質を反映している。これらの結果を総合すれば、修正キュムラント打ち切り理論は空間的にかなり小さく Burgers 乱流の構造までも正しく表わすことができるといえる。

Reference

- (1) T. Tatsumi and S. Kida : J. F. M. 55(1972) 659