

Gauss 確率場に対する確率変分解析

愛知教育大学 野田明男 (Akio Noda)

§ 1. 序

確率過程 $X(t)$ に対する Lévy の基本的アプローチとなる確率変分方程式 ([7], 特に pp. 187-244) を思い起こそう:

$$(1.1) \quad \delta X(t) = X(t+dt) - X(t) = \Xi(\{X(u); u \leq t\}, Y_t, t, dt).$$

ここで、過去の σ -field $\mathcal{F}_t = \sigma\{X(u); u \leq t\}$ と独立な Y_t は、微少区間 $(t, t+dt)$ の間に X が新たに獲得する random element (innovation) である。

この Lévy のアプローチを確率場 $X(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, に拡張したい。多次元パラメータの場合、一次元の $t \in \mathbb{R}^1$ のように単純に一方方向に沿って進むというわけに行かず、 $x \in \mathbb{R}^n$ の動きの自由度は次元 n と共に増す; それに伴って変分解析の困難さも十分な手応えが予想される。

飛田 ([5]) が近年提唱する Gauss 確率場に対する variational approach は、Lévy の精神を受け継ぐ一つの試みであろう。我々

follower はこの線に沿って歩みを進め、white noise 表現 (この巻の別稿で詳述)

$$(1.2) \quad X(x) = \int_H F(x, h) dW(h)$$

と許す Gauss 確率場 $X(x)$ と対象に選んで、その性質を解明したいという宿望をもつ。

張田の idea をここでは $n=2$ に限って述べる; R^2 内の曲線 C を任意に選り、パラメータ $x \in R^2$ の動きを C に沿う方向と法線方向に分けて取り扱う。具体的には、次の i), ii) を研究する:

- i) パラメータを C 上に制限して得られる Gauss 過程 $X_C(t) = X(x(t))$, $x(t) \in C$, の確率変分方程式と標準表現;
- ii) 条件付平均値 $Y(C) = E[X(x_0) | X(x(t)); x(t) \in C]$ を曲線 C の random functional とみなしたときの変分 $\delta Y(C) = Y(C + \delta C) - Y(C)$ 。

この小論の目的は、手始めに二つの基本的な確率場 — Lévy の Brown 運動 $B(xy), (xy) \in R^2$, と Wiener 過程 $W(t_1, t_2), (t_1, t_2) \in [0, \infty)^2$, を取り上げて、上記 i) について研究した結果を報告することである。

我々がここで取り扱う $W_C(t)$ (§3) 及び $B_C(t)$ (§4) の基本的特徴を前もって述べておく; 曲線は、 $C = C_1 \cup C_2$ と分解できて、各 $X_{C_i}(t)$ は単独に考えればそれぞれ簡明な Markov 過程となる。しかしながら、 X_{C_1} と X_{C_2} との間には弱く近い相関関係があり、二つの Markov 過程を合わせて一本の過程 $X_C(t)$ を作ると、

その確率変分方程式は、なにより深い正規形 (§2 定義 1) になる
とは限らず、新しいタイプの非正規形が生じ十分注目に値し
よう。

最後に ii) に関して一言。種々の曲線 C に対して、 $Y(C)$ は
explicit に書くことができる (得られた式は興味ある事実を内
包している; 関連する結果として [2], [3], [10] を挙げる)。し
かしながら、曲線の random functional $Y(C)$ の研究には、越え難い
困難さか付まるとい、現時点で ii) についてまとめる事は断念
せざるを得ぬ。

§2. 確率変分方程式

確率過程を調べるための基本的手法である変分方程式
(1.1) について、平均 0 の Gauss 過程に話を限定して、若干の観
察結果を述べると共に次節以降の準備となる。

共分散 $P(t, t')$ をもつ Gauss 過程 $X(t)$ の場合、(1.1) は次のよ
うな簡明な形をとる:

$$(2.1) \quad \begin{cases} \delta X(t) = \mu_t(dt) + \sigma_t(dt) \xi, \\ \mu_t(dt) = E[\delta X(t) | \mathcal{F}_t], \quad \sigma_t^2(dt) = E[(\delta X(t) - \mu_t(dt))^2]. \end{cases}$$

ここで、過去の σ -field $\mathcal{F}_t$ と独立な ξ は、 $N(0, 1)$ に従う random
element であり、

$$(2.2) \quad \sqrt{dt} = dB(t) = \dot{B}(t) dt$$

を通じて標準 Brown 運動 $B(t)$ 、あるいは white noise $\dot{B}(t)$ に置き換えられる。

我々のこの節での興味は、 $\mu_t(dt)$ と $\sigma_t(dt)$ の微少変量 dt に関する主要項に集中する。 $E[\mu_t^2(dt)] = S_t^2(dt)$ とおくと、(2.1) の両項は互いに独立故、

$$S_t^2(dt) + \sigma_t^2(dt) = E[(\delta X(t))^2] = \Gamma(t+dt, t+dt) - 2\Gamma(t+dt, t) + \Gamma(t, t).$$

多くの場合、 $S_t(dt)$ と $\sigma_t(dt)$ の主要項は次の形に書かれる：

$$(2.3) \quad S_t(dt) = s(t)(dt)^{p_1} + o((dt)^{p_1}), \quad \sigma_t(dt) = \sigma(t)(dt)^{p_2} + o((dt)^{p_2}),$$

$0 < s(t), \sigma(t) < \infty$, $0 < p_1, p_2 < \infty$. 指数 p_1 と p_2 の間に一般的な大小関係を規定することはできない。比 p_1/p_2 が小さい程、変分 $\delta X(t)$ は過去の $\mathcal{F}_t$ に強い dependency を有する。

定義 1. $p_1=1, p_2=1/2$ の場合、つまり、(2.1) が

$$(2.4) \quad \delta X(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dB(t), \quad \mu(t) = \mu_t(dt)/dt \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$$

と書き換えられるとき、 X の確率変分方程式は正規形であるという。

§3, 4 においては、確率微分方程式論でなじみの正規形 (2.4) 以外に、 $p_1=p_2=1/2$ となる著しい例が論じられる。我々は以下、興味深い $X(t)$ の例の中から、 $1 \leq p_1/p_2 \leq 2$ となる非正規形の確率変分方程式を若干選んで論じる。

例 1. 非正規形の第一の例として、正規形 (2.4) に準ずる次のような場合 ($p_2=1/2 < p_1 < 1$) を挙げる：確かに $E[\mu(t)^2] = \infty$

であるが、 $\mu(t)$ は generalized Gaussian process として well-defined.

岡部 [9] に従って、reflection-positivity を有する定常過程 $X(t)$, $-\infty < t < \infty$, の中からこのような例を探る。 $X(t)$ は標準表現

$$(2.5) \quad X(t) = \int_{-\infty}^t E(t-u) dB(u), \quad E(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\lambda} d\nu(\lambda), \quad s > 0,$$

によって $[0, \infty)$ 上の測度 ν を用いて書かれる。 ν の分布関数は適当な指数 $1 < p < 3/2$ によって、

$$(2.6) \quad \nu(\lambda) = \int_0^{\lambda} d\nu(\lambda) \underset{(\lambda \rightarrow \infty)}{\sim} c \lambda^{1-p} / \Gamma(2-p), \quad c > 0,$$

と書けると仮定する。(2.5) から直ちに、

$$\begin{aligned} \mu_t(dt) &= \int_{-\infty}^t \{E(t+dt-u) - E(t-u)\} dB(u), \\ \sigma_t^2(dt) &= E\left[\left(\int_t^{t+dt} E(t+dt-u) dB(u)\right)^2\right] = \int_0^{dt} E(s)^2 ds \end{aligned}$$

が従う。

まず、 $\sigma_t^2(dt) = E(0) (dt)^{1/2}$ がわかる。そして、 $-E'(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\lambda} \lambda d\nu(\lambda)$ に Tauber 型定理 (cf. [1]) が適用される。

$$S_t^2(dt) = \int_0^{\infty} ds \left\{ \int_0^{dt} E'(h+s) dh \right\}^2 \sim (\text{const.}) (dt)^{2p-1}$$

と計算できる。つまり、 $p_2 = 1/2 < p_1 = p - 1/2 < 1$ が示される。そ

の上、generalized な定常過程 $\mu(t) = \int_{-\infty}^t E'(t-u) dB(u)$ の共分散は、

次の漸近挙動をもつ：

$$\int_0^{\infty} E'(h+s) E'(s) ds \underset{(h \rightarrow 0)}{\sim} (\text{const.}) h^{-(3-2p)}.$$

(2.6) の指数が $p > 3/2$ になると、 $\mu(t) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ がわかり正規形 (2.4) が従う。その上、 $\mu(t)$ は X 自身の言葉で書けて、

(2.4) は KMO-Langevin 方程式 ([9]) の形と一致する：

$$(2.7) \quad \delta X(t) = -\left(\rho X(t) + \int_0^t \gamma(t-u) dX(u)\right) dt + E(0) dB(t).$$

ここで、 $\rho \geq 0$ と $\gamma(s) = \int_0^\infty e^{-s\lambda} d\mu(\lambda)$ は μ から Stieltjes 変換の表現定理を通して一意に定まる。

又 $1/2 < \rho < 1$ の場合は、 $p_1 = p_2 = \rho - 1/2 < 1/2$ となって、ちょうど例 2 として取り上げる fractional Brown 運動 $B_{\rho-1/2}(t)$ と同じ型の確率変分方程式が生じる。

例 2. index $\alpha \in \mathbb{R}$ の fractional Brown 運動 $B_\alpha(t)$, $t \geq 0$, に対しては、 $o((dt)^\alpha)$ の誤差項なしに、 $E[(\delta X(t))^\alpha] = (dt)^\alpha$ となる。ここで、 $0 < \alpha < 1$ と $1 < \alpha < 2$ とに分けて扱う。

I) $0 < \alpha < 1$ の場合: $B_\alpha(t)$ の標準表現は、

$$(2.8) \quad \begin{cases} B_\alpha(t) = C_\alpha \int_0^t f_\alpha(u/t) u^{\frac{\alpha-1}{2}} dB(u), & C_\alpha^2 = \frac{\alpha(1-\alpha)}{4B(1-\alpha, \frac{\alpha+1}{2})}, \\ f_\alpha(x) = \int_0^x \frac{y^{\frac{\alpha-3}{2}}}{(1-y)^{\frac{\alpha-1}{2}}} y^{-\alpha} dy + B(1-\alpha, \frac{\alpha+1}{2}), \end{cases}$$

で与えられる。これから、

$$\begin{aligned} \sigma_t^2(dt) &\sim C_\alpha^2 t^\alpha \int_{1-dt/t}^1 f_\alpha^2(u) u^{\alpha-1} du \sim C_\alpha^2 t^\alpha \frac{4}{(1-\alpha)^2} \int_{1-dt/t}^1 (1-u)^{\alpha-1} du \\ &= (dt)^\alpha / (1-\alpha) B(1-\alpha, \frac{\alpha+1}{2}), \end{aligned}$$

$$S_t^2(dt) = \{1 - 1/(1-\alpha) B(1-\alpha, \frac{\alpha+1}{2})\} (dt)^\alpha + o((dt)^\alpha),$$

が従い、 $0 < p_1 = p_2 = \alpha/2 < 1/2$ がわかる。

II) $1 < \alpha < 2$ の場合: 標準表現 (2.8) は、

$$C_\alpha^2 = \sin(\frac{\pi\alpha}{2}) \Gamma(\alpha+1) / \Gamma^2(\frac{\alpha-1}{2}), \quad f_\alpha(x) = \int_x^1 \frac{y^{\frac{\alpha-3}{2}}}{(1-y)^{\frac{\alpha-1}{2}}} y^{-\alpha} dy,$$

に変更すれば、 $\sigma_t^2(dt) \sim \{\sin(\frac{\pi\alpha}{2}) \Gamma(\alpha) / \Gamma^2(\frac{\alpha+1}{2})\} (dt)^\alpha$ と得る。従って、

$$1/2 < p_1 = p_2 = \alpha/2 < 1.$$

例3. 例2の $B_\alpha(t)$ に関連して、次式の標準表現をもつ

Gauss 過程 $X_\alpha(t)$ ([7], p. 213~214) と最後に取り上げる:

$$(2.9) \quad X_\alpha(t) = \int_0^t (t-u)^{\frac{\alpha-1}{2}} dB(u), \quad t \geq 0.$$

容易に、 $E[X_\alpha^2(t)] = t^\alpha/\alpha$, $\sigma_t^2(dt) = (dt)^\alpha/\alpha$ を得、

$$\begin{aligned} S_t^2(dt) &= E[X_\alpha^2(t+dt) - X_\alpha^2(t)] - 2E[(\delta X_\alpha(t))X_\alpha(t)] - \sigma_t^2(dt) \\ &\sim t^{\alpha-1} \cdot dt - (dt)^\alpha/\alpha - 2E[\mu_t(dt)X_\alpha(t)] \end{aligned}$$

が従う。こうして、 $\mu_t(dt) = \tilde{\mu}(t) \cdot (dt)^{\alpha \wedge 1} + o((dt)^{\alpha \wedge 1})$, $\tilde{\mu}(t) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$

とおけて、 $p_1 = \alpha \wedge 1$, $p_2 = \alpha/2$ がわかる。 $0 < \alpha < 1$ のとき、 $p_1/p_2 = 2$ となる点は、正規形と変わらぬことに注意。

この節を閉じるに当たって open problem を述べたい; 周期的な Gauss 過程 $X(t)$, $X(0) = X(l)$, を確率変分方程式の立場から特徴付けよ。これの典型として pinned Brownian motion ($B(0) = B(l) = 0$) があり、又 Gauss 確率場 $X(x)$ を閉曲線 C 上に制限すれば、自然にこのような周期性が生じる。

§3. 2-parameter の Wiener 過程

この節は、Wiener 過程 $W(t_1, t_2)$, $t_1, t_2 \geq 0$, を種々の曲線 $C_\varphi = \{(t, \varphi(t)); t \geq 0\}$ 上に制限して得られる Gauss 過程 $W_\varphi(t) = W(t, \varphi(t))$ の研究に当てられる; $W_\varphi(t)$ の確率変分方程式と、それから導かれる標準表現を求める。

この巻の別稿で述べた如く、単調増加な φ に対し、 W の

2-parameter white noise $\dot{W}(p_1, p_2)$ による表現

$$(3.1) \quad W(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \dot{W}(p_1, p_2) dp_1 dp_2$$

の直接の産物として、 $W_\varphi(t)$ は加法過程となる。そして、別稿の補題 2 に留意する。

単調な曲線の次に考えべきものとして、 C_φ が 一つの谷 をもつ場合とこの節で論じる。 C_φ の山や谷の数が多くなるとなると、なるほど $W_\varphi(t)$ の解析は複雑で実行し難くなるけれども、注目すべき確率変分方程式の非正規形は、既に谷（又は山）が一つだけの曲線の場合に生じる。従って、このような unimodal な φ に対する $W_\varphi(t)$ の変分解析は、十分述べる価値ありと思われる。

以上の理由に対称性を加味して、次のような C^1 -関数 $\varphi(t) \geq 0$ を考える； $\varphi(t)$ は $[1, \infty)$ 上で単調増加、 φ の $[0, 1]$ の部分は $[1, 2]$ の部分と $t=1$ で折り返したもので、i.e., $\varphi(t_x) = \varphi(t)$, $t_x = 2-t$ ($1 < t \leq 2$)。このとき、 $W_\varphi(t)$ の確率変分方程式

$$(3.2) \quad \delta W_\varphi(t) = \mu_t(dt) + \sigma(t) dB(t),$$

及び標準表現

$$(3.3) \quad W_\varphi(t) = \int_0^t F(t, u) \sigma(u) dB(u)$$

は、explicit に次表のように与えられる； $h(u) = -u\varphi'(u)(\varphi(u) - u\varphi'(u))^{-1/2}$, $0 < u < 1$, とおく。

定理 1. 上記 φ に関する仮定の下、次の結果を得る：

t の範囲	$\mu_t(dt)$	$\sigma(t)$	$F(t, u)$
$0 \leq t \leq 1$	$\{\varphi'(t) W_\varphi(t)/\varphi(t)\} dt$	$\varphi(t) \sqrt{(t/\varphi(t))'}$	$\varphi(t)/\varphi(u)$
$1 \leq t \leq 2$	$-\{\varphi'(t_*) W_\varphi(t_*)/\varphi(t_*)\} dt$ $+ h(t_*) dB(t_*-)$	$\sqrt{(t\varphi(t))' - h^2(t_*)}$	$F(t_*, u) + \{1 - u\varphi(u)/\varphi(u)\}^{-1} \times$ $\times 1_{(t_*, 1)}(u) + 1_{(1, t)}(u)$
$t > 2$	0	$\sqrt{(t\varphi(t))'}$	$F(2, u) + 1_{(2, t)}(u)$

$W_\varphi(t)$ の確率変分方程式 (3.2) の特徴は、 $1 \leq t \leq 2$ の範囲にあり、過去の時点 t_* における white noise $dB(t_*-) = B(t_*-dt) - B(t_*)$ が再び $\mu_t(dt)$ の主要項として現われてくる。

問題の $1 \leq t \leq 2$ の範囲に限定して、定理 1 の証明の筋道を辿ろう。次の補題から出発する。

補題 2. $1 < t < t' \leq 2$ のとき、 $\mathcal{F}_t = \sigma\{W_\varphi(u); 0 \leq u \leq t\}$ と書いて、

$$i) \quad E[W_\varphi(t') | \mathcal{F}_t] - W_\varphi(t) = - \int_{t_*}^{t'} u (1 - \varphi(u)/u\varphi'(u))^{-1} d[W_\varphi(u)/u];$$

$$ii) \quad E[(W_\varphi(t') - E[W_\varphi(t') | \mathcal{F}_t])^2] = t'\varphi(t') - t\varphi(t) - \int_{t_*}^{t'} h^2(u) du.$$

補題 2 の証明の key point は、

$$(3.4) \quad E[\{i) \text{ の右辺} \} W_\varphi(v)] = E[\{W_\varphi(t') - W_\varphi(t)\} W_\varphi(v)], \quad t_* <^{\downarrow} v < t_*,$$

を示すことにある。 $W_\varphi(u)$ の変分散を計算して (3.4) は示される。

補題 2 に、 $t' = t + dt$ を代入して、

$$\begin{aligned} \mu_t(dt) &= - \int_{(t+dt)_*}^{t_*} u (1 - \varphi(u)/u\varphi'(u))^{-1} d\left[\frac{\varphi(u)}{u} \int_0^u \sqrt{(v/\varphi(v))'} dB(v)\right] \\ &= - \int_{t_*-dt}^{t_*} \varphi'(u) du \int_0^u \sqrt{(v/\varphi(v))'} dB(v) - \int_{t_*-dt}^{t_*} h(u) dB(u) \\ &\sim - \{\varphi'(t_*) \int_0^{t_*} \sqrt{(v/\varphi(v))'} dB(v)\} dt - h(t_*) \{B(t_*) - B(t_*-dt)\} \\ &= - \{\varphi'(t_*) W_\varphi(t_*)/\varphi(t_*)\} dt + h(t_*) dB(t_*-), \end{aligned}$$

及び、

$$\sigma_t^2(dt) = (t+dt)\varphi(t+dt) - t\varphi(t) - \int_{t_*-dt}^{t_*} h^2(u) du = \{ (t\varphi(t))' - h^2(t_*) \} dt$$

を得る。こうして、(3.2)が explicit に求められる。

$W_\varphi(t)$ の標準表現 (3.3) における核 $F(t, u)$ は、(3.2) を 1 から t まで積分することによって導き出される：

$$\begin{aligned} W_\varphi(t) &= W_\varphi(1) + \int_1^t \delta W_\varphi(\tau) = \varphi(1) \int_0^1 \sqrt{(u/\varphi(u))'} dB(u) - \int_0^1 \left\{ \int_{t_* \vee u}^1 \varphi'(v) dv \right\} \times \\ &\quad \times \sqrt{(u/\varphi(u))'} dB(u) + \int_1^{t_*} h(u) dB(u) + \int_1^t \sigma(u) dB(u) \\ &= \varphi(t_*) \int_0^{t_*} \sqrt{(u/\varphi(u))'} dB(u) + \int_{t_*}^1 \{ \varphi(u) \sqrt{(u/\varphi(u))'} - h(u) \} dB(u) + \\ &\quad + \int_1^t \sigma(u) dB(u) \\ &= W_\varphi(t_*) + \int_{t_*}^1 \{ 1 - u\varphi'(u)/\varphi(u) \}^{-1} \sigma(u) dB(u) + \int_1^t \sigma(u) dB(u). \end{aligned}$$

こうして、定理 1 の表の結果が確立される。

§ 4. Lévy の Brown 運動

定義 Lévy の Brown 運動 $B(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, は直線上にパラメータを制限すると、加法過程になるという著しい特性をもつ。では、パラメータが直線から逸れて動き出すと、どのような過程を描くかという問題に取り組みたい。その第一歩として、直線の小さな変形として、折れ線 $C_\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = \tan \Delta \cdot |x|\}$ ($0 < \Delta < \pi/2$) をとり、 C_Δ 上の制限 $B_{C_\Delta}(t) \equiv B_\Delta(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, がどんな確率変分方程式をもつかという問題を考察する。 C_Δ を選択するもう一つの動機として、reflection positivity に関する研究 [8] が

あることを付言する。

記述を簡単にするため、最初から、対象とする $B(x, y)$ のクラスを限定する；平均 0 の Gauss 確率場 $B(x, y)$, $B(0, 0) = 0$, は、 R^2 上の l_p -norm $\|(x, y)\|_p = \{|x|^p + |y|^p\}^{1/p}$ ($1 \leq p \leq \infty$) に増分の分散にまつ，ie.,

$$(4.1) \quad E[(B(x, y) - B(x', y'))^2] = \|(x - x', y - y')\|_p.$$

$e = (\cos \Delta, \sin \Delta) / \|(\cos \Delta, \sin \Delta)\|_p$, $e' = Re$, R は y 軸に関する

reflection, と記して、折れ線 $C_\Delta \in C_\Delta^+ \cup C_\Delta^-$, $C_\Delta^+ = \{re; r \geq 0\}$,

$C_\Delta^- = \{se'; s \geq 0\}$, と分ければ、半直線上の過程 $B_+(r) = B(re)$

と $B_-(s) = B(se')$ は、それぞれ標準 Brown 運動と一致する。 $0 < l < \infty$

を任意に選ぶ。 B_+ と B_- を合わせて一本の過程

$$B_\Delta(t) = B_+(t) \quad (0 < t \leq l), \quad = 0 \quad (t=0), \quad = B_-(-t) \quad (-l \leq t < 0)$$

を作ると、 R -positivity をもつ非定常過程 $B_\Delta(t)$ を得る。

さて、二本の Brown 運動 $B_\pm$ は、互分散

$$(4.2) \quad K(r, s) = E[B_+(r) B_-(s)] = \{r + s - \|re - se'\|_p\} / 2$$

で関係付けられている。 norm の表現式

$$\|(x, y)\|_p = \int_{-\pi}^{\pi} |x \cos \theta + y \sin \theta| d\sigma_p(\theta)$$

によって、 S^1 上の両軸対称な有界測度 $d\sigma_p(\theta)$ を導入すると、

(4.2) は、

$$(4.3) \quad K(r, s) = \int_{-\Delta}^{\Delta} \{r \sin(\Delta - \alpha) \wedge s \sin(\Delta + \alpha)\} d\sigma_p(\alpha + \frac{\pi}{2}) / \int_{\Delta - \pi}^{\Delta} \sin(\Delta - \alpha) d\sigma_p(\alpha + \frac{\pi}{2})$$

と書き直される。(l_p -norm に結びつく σ_p から一般の σ に対象

と名付たいときには、この(4.3)が key expression となる。) 実際、次式が成立:

$$(4.4) \quad d\sigma_p(d+\pi/2) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{j=0}^3 \delta_{d-j\frac{\pi}{2}}(dd) & (p=1) \\ \frac{p-1}{4} \frac{|\sin d \cos d|^{p-2}}{(|\sin d|^p + |\cos d|^p)^{2-1/p}} & (1 < p < \infty) \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{j=0}^3 \delta_{d-j\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}}(dd) & (p=\infty) \end{cases}$$

以下、測度 σ_p が、I) discrete な場合 ($p=1, \infty$) と II) 絶対連続な場合 ($1 < p < \infty$) に分けて、 $B_\Delta(t)$ の確率変分方程式を述べる。

くわしい証明、及び標準表現を導く手順については、紙数に余裕がないため、割愛せざるを得ぬ。

I) $p=1, \infty$ の場合: 両者をまとめて書くため、(4.3)における σ_p を、 $\alpha=0$ で point mass $a \geq 0$ ともち、 $\alpha=\pm\delta$ ($0 < \delta < \Delta$) で point mass $b/2 \geq 0$ ともちの測度 σ に置き換える。さらに、 $\int_{\Delta-\pi}^{\Delta} \sin(\Delta-d)$ $d\sigma(d+\pi/2) = 1$ と正規化を施し、 $\beta = \sin(\Delta+\delta)/\sin(\Delta-\delta) > 1$, $a \sin \Delta = A$, $b \sin(\Delta-\delta) = B$ とおく。(4.4)を見ればちょうど、 $p=1$ の場合は $a > 0 = b$, $p=\infty$ の場合は $\delta = \pi/4 < \Delta$ として、 $a=0 < b$ に相当する。記法

$$(4.5) \quad \delta B_\Delta(t; cdt) = B_\Delta(t+cdt) - B_\Delta(t), \quad -l < t < l, \quad -\infty < c < \infty,$$

を用いる。

定理3. 上記 σ に関する仮定の下に、

$$\delta B_\Delta(t; dt) = \sqrt{dt} \quad (t \leq 0);$$

$$\begin{aligned} \delta B_{\Delta}(t; dt) = & g_4 1_{(0, l/\beta)}(t) \delta B_{\Delta}(-\beta t; -\beta dt) + g_3 \delta B_{\Delta}(-t; -dt) \\ & + g_2 \delta B_{\Delta}(-t/\beta; -dt/\beta) + g_1 \delta B_{\Delta}(-t/\beta^2; -dt/\beta^2) \\ & - f_1 \delta B_{\Delta}(t/\beta^2; dt/\beta^2) - f_2 \delta B_{\Delta}(t/\beta; dt/\beta) \\ & + \left\{ 1 - \frac{B}{2} g_2 - A g_3 - \frac{\beta B}{2} g_4 1_{(0, l/\beta)}(t) \right\}^{\frac{1}{2}} \sqrt{dt} \quad (t > 0) \end{aligned}$$

を得る。ここで $z = z^*$ 、係数 f_1, f_2, g_1, g_4 は、 (A, B, β) による式で定まる：

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{\beta B^2 \{ 1 + (4\beta - 1)A^2 - \frac{\beta}{2}B^2 \}}{4(1-A^2)^2 - \beta B^2(3+A^2 - \frac{\beta}{2}B^2)}, \quad f_2 = \frac{\beta AB \{ 4(1-A^2) - (\beta-1)B^2 \}}{4(1-A^2)^2 - \beta B^2(3+A^2 - \frac{\beta}{2}B^2)}, \\ g_1 &= Af_1 + \frac{\beta}{2}Bf_2, \quad g_2 = \frac{\beta}{2}B + \frac{B}{2}f_1 + Af_2, \quad g_3 = A + \frac{B}{2}f_2, \quad g_4 = \frac{B}{2}. \end{aligned}$$

II) $1 < p < \infty$ の場合： この場合、 $K(r, s)$ よりもむしろ、対称・正値・正定値な二次核

$$(4.6) \quad J(r, s) = \frac{\partial^2}{\partial r \partial s} K(r, s) = C_p(\Delta) \frac{rs|r^2 - s^2|^{p-2}}{\{(\cos \Delta)^p(r+s)^p + (\sin \Delta)^p|r-s|^p\}^{2-1/p}} (r \neq s),$$

$$C_p(\Delta) = 2(p-1)(\sin \Delta \cos \Delta)^p / \{(\sin \Delta)^p + (\cos \Delta)^p\}^{1/p},$$

が主要な役割を果たす。 $r > 0$ を固定すると、 $J(r, s) \in L^{8(p)}((0, l), ds)$

となることに注意する。ここで、 $g(p) = \infty$ ($p \geq 2$)、 $1 < g(p) < (2-p)^{-1}$

($1 < p < 2$)。

補題 4. 核 $J(r, s)$ は、任意の $1 \leq p \leq \infty$ に対し、 $L^{g(p)}((0, l), ds)$ から $L^{g(p)}((0, t), dr)$ への有界な積分変換を induce し、その operator

norm は、 $\|J\|_{p \rightarrow g} \leq \int_0^l J(r, s) ds = (\sin \Delta)^p / \{(\sin \Delta)^p + (\cos \Delta)^p\} < 1$ となる。

この補題から、次の積分方程式系は、解 $F_t(r) \in L^{8(p)}((0, t), dr)$ と $G_t(s) \in L^{8(p)}((0, l), ds)$ をもつことが従う：

$$(4.7) \quad \begin{cases} F_t(r) = \int_0^l J(r,s) G_t(s) ds, & 0 < r < t, \\ G_t(s) - \int_0^t F_t(r) J(r,s) dr = J(t,s), & 0 < s < l, s \neq t. \end{cases}$$

正值核 $F_t(r)$, $G_t(s)$ を手に入れた今、 $B_\Delta(t)$, $-l \leq t \leq l$, の確率変分方程式を述べることができる。

定理 5. $3/2 < p < \infty$ の場合、 $B_\Delta(t)$ の確率変分方程式は正規形となる：

$$\delta B_\Delta(t) = \xi \sqrt{dt} \quad (t \leq 0), \quad = \mu(t) dt + \xi \sqrt{dt} \quad (t \geq 0),$$

$$\text{ここで、} \quad \mu(t) = \int_{-l}^0 G_t(-v) dB_\Delta(v) - \int_0^t F_t(u) dB_\Delta(u).$$

他方、 $1 < p \leq 3/2$ の場合は、 $\mu(t) \notin L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ で、正規形とはなり得ない。

課題. $1 < p \leq 3/2$ の場合、§2, 例 1 の状況に似て、定理 5 の $\mu(t)$, $t \geq 0$, は、generalized Gaussian process とみれば well-defined になると期待される。 $\mu(t)$ の共分散の $h \downarrow 0$ における singularity を調べて、この予想を正当化するには、(4.7) の解 $F_t(r)$, $G_t(s)$ の挙動をくわしく知る必要がある。この仕事は残された課題である。

References

- [1] N. H. Bingham, C. M. Goldie and J. L. Teugels, Regular variation, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

- [2] L. Carraro, Problèmes de prediction pour le processus de Wiener a deux parametres, *Probab. Th. Rel. Fields* 72 (1986), 617-635.
- [3] A. Goldman, Techniques biharmoniques pour l'étude du mouvement brownien de P. Lévy a trois parametres, preprint.
- [4] 飛田武幸・櫃田倍之, ガウス過程, 紀伊国屋, 1976 (第2刷 1987).
- [5] 飛田武幸, ブラウン運動とレヴィの関数解析, 上・中・下, 数学セミナー 3, 4, 5月号 (1988), 日本評論社.
- [6] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1976 (第2版).
- [7] P. Lévy, *Oeuvres de Paul Lévy*, IV, Gauthier-Villars, Paris, 1980.
- [8] 野田明男, Lévy's Brownian motion and reflection positivity, Second P. Lévy Seminar in Nagoya 報告集, 1987.
- [9] Y. Okabe, On KMO-Langevin equations for stationary Gaussian processes with T-positivity, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo IA* 33 (1986), 1-56.
- [10] SiSi, A note on Lévy's Brownian motion, *Nagoya Math. J.* 108 (1987), 121-130; Part II, 114 (to appear in 1989).