

近可積分系としての高粘性液膜流

鳥取大・工 大信田 丈志 (OOSHIDA Takeshi)

渡辺 誠司 (Seiji WATANABE)

川添 博光 (Hiromitsu KAWAZOE)

Faculty of Engineering, Tottori Univ.

1 はじめに

波動現象の多くは慣性と復元力の組み合わせとして理解できる。しかし、世の中には、それとは異なる基本原理に基づく波動現象 [1, 2] が存在し、そこでは、エネルギーや運動量とは全く無縁の保存則が成り立っている場合がある [3]。本稿の目的は、このような保存則の存在の証拠として、壁面上の液膜流 [4] で粘性が非常に大きい場合に可積分に近い挙動が見られるという実例を提示することにある。

液膜流の波を記述する一連の方程式 [4, Chap.3] のうち最も単純な Kuramoto-Sivashinsky (KS) 方程式

$$\partial_\tau H + H \partial_\xi H + \alpha \partial_\xi^2 H + \beta \partial_\xi^4 H = 0 \quad (1)$$

について考えよう。ここで α および β は 正の定数であり、 $H = H(\xi, \tau)$ は 液膜厚さに相当する変数、 (ξ, τ) は 時間および空間変数 (x, t) を適当に変換したものである。

KS 方程式 (1) を線形近似し、(複素) 分散関係式を求める: たとえば $H = H_0 + \hat{H} \exp[i(k\xi - \omega\tau)]$ と置いて式 (1) に代入し、 $\hat{H}$ の 2 次の項を無視すればよい。波数 k を実数とすると、結果は

$$\omega = \omega_r + i\omega_i; \quad \omega_r = H_0 k, \quad \omega_i = \alpha k^2 - \beta k^4 \quad (2)$$

となる。これから、 α の項 (2 階微分項) は波の振幅が時間とともに増大する成長効果をもち、逆に β の項 (4 階微分項) は波の振幅が時間とともに減少する減衰効果をもつことが分かる。

KS 方程式 (1) の次に単純な液膜流のモデル方程式は、Benney-Kawahara 方程式

$$\partial_\tau H + H \partial_\xi H + \alpha \partial_\xi^2 H + \beta \partial_\xi^4 H + \gamma \partial_\xi^3 H = 0 \quad (3)$$

である¹。なお、式 (3) は、3 階微分項の係数が 1 になるように変数変換して、Korteweg-de Vries (KdV) 方程式からの摂動の形で書くことも可能である。いずれにしても、KS 方程式 (1) と同じく、式 (3) を線形化して複素分散関係式を求めると、偶数階微分項が波の振幅の増大や減少をもたらすことが分かる。

上記の線形解析の結果を非線形の場合に拡張するには、たとえば、式 (1) または式 (3) に H を掛け、適当な範囲で積分すればよい。境界で H が消えるなどの適切な条件を設定すれば、これから

$$\partial_\tau \int \frac{H^2}{2} d\xi = \alpha \int (\partial_\xi H)^2 d\xi - \beta \int (\partial_\xi^2 H)^2 d\xi \quad (4)$$

という式が得られる。左辺は $H^2/2$ の積分量の時間変化である。右辺の各項はそれぞれ定符号であり、 α の項は左辺の積分量の増大に、 β の項は左辺の積分量の減少に寄与することが分かる。しばしば、このことを称して、式 (1) の 4 階微分項は散逸 (dissipation) をあらわす、などと言う。これはもちろん、 $H^2/2$ をエネルギーに、また式 (4) をエネルギー積分に見立てた場合に、右辺第 1 項がエネルギー供給、第 2 項がエネルギー散逸と解釈できるからである。

しかし、実際のところ、4 階微分項をエネルギー散逸に見立てることは妥当なのだろうか。基礎方程式から式 (1) を導出する過程を丁寧にたどってみると、液膜流のモデルとしての式 (1) や式 (3) の 4 階微分項

¹式 (3) を単に Benney 方程式と呼ぶこともあるが [5]、Benney 方程式という名称は、あとで出てくる別の方程式 (10) を指すことも多い。Chang & Demekhin の本 [4] では、式 (3) を「Kawahara 方程式」または「一般化 KS 方程式」と呼び、式 (10) を Benney 方程式と呼んでいる。

は、決して基礎方程式におけるエネルギー散逸項とは対応していないことが分かる。むしろ、出発点となる基本流 (Nusselt 解) そのものがエネルギー散逸のうえに成り立っている。したがって、式 (1) の 4 階微分項を“散逸”と呼ぶ場合、それは、何かエネルギーとは異なるものが散逸していることを意味する。

Benney-Kawahara 方程式 (3) を KdV 方程式からの摂動と見た場合、偶数階微分項 (ω_i に寄与する項) を「非保存項」あるいは「非保存的摂動」[5, §5.2] と呼ぶ。これらの非保存項が消失する極限 (保存極限) では²、式 (4) の右辺がゼロになり、 $H^2/2$ の積分が一定値となる。左辺の積分は、KdV 方程式の第 2 保存量にほかならない。そこで、式 (4) の β の項をエネルギー散逸と見なして良いかどうかは、

系が KdV 方程式 (またはそれに似た方程式) で記述されるような極限で、物理的にどのような量が保存されるのか?

という問題に帰着する。答えは質量と運動量とエネルギーに決まっているのではないか、と思ったら間違いである。なぜなら、Benney-Kawahara 方程式 (3) の KdV 極限は、液膜流の非粘性極限ではなく、高粘性極限に対応するからだ。

本稿の構成は以下のとおりである。まず、第 2 章で、斜面上の液膜流に生じる表面波と、それを記述する方程式について述べる。第 3 章で、液膜流の表面波が高粘性極限 (!) でソリトンの挙動を示すことを説明する。ここで「ソリトン」と言っているのは、「弾性衝突またはそれに近い相互作用をおこなう孤立波」という意味である。すなわち、単なる孤立波よりは狭い意味であるが、必ずしも厳密に可積分な場合に限定せず、やや広い意味で用いる。たとえば、Benjamin-Bona-Mahony (BBM) 方程式

$$(1 - \partial_x^2) \partial_t \eta + (c_0 + c_1 \eta) \partial_x \eta = 0 \quad (5)$$

の孤立波解は完全には弾性的ではないけれども、これも「ソリトン」に含めて考えることにする。

ソリトンの背後には保存則が存在する。第 4 章で、高粘性液膜流の背後にある保存則について述べ、これと非粘性の浅水波の保存則を比較する。いま考えている極限では、液膜流の方程式は「修正 BBM 方程式」とでも呼ぶべき方程式に帰着し、この方程式は 3 つの保存則をもつ。第 5 章で、高粘性液膜流におけるソリトンの現象を実験の実験でとらえる可能性について検討する。

2 斜面上の液膜流

2.1 系の設定

物理的な系としての斜面上の液膜流の概要を説明する [4, §2.1]。流れは、重力を受ける粘性流体の自由表面流である。座標系の設定については、Landau & Lifshitz [6, p.63] に従い、斜面を下る方向に x 軸をとり、法線方向に z 軸をとる。斜面が水平面に対してなす角度を α とすると³、重力加速度ベクトルは $\mathbf{g} = (g \sin \alpha) \mathbf{e}_x - (g \cos \alpha) \mathbf{e}_z$ とあらわされる。

系を特徴づけるパラメータとしては、傾斜角 α のほかに、重力 g 、動粘性率 $\nu = \tilde{\mu}/\rho$ 、表面張力 σ/ρ の 3 つがある (ここで ρ は密度)。これらは次元的に独立でないため、

$$K = \frac{\sigma}{\rho g} \left(\frac{g}{\nu^2} \right)^{2/3} \quad (6)$$

のような無次元パラメータ (Kapitza 数) が構成できる⁴。

一様な厚さ $h = h_0$ をもつ定常な液膜をあらわす解 (Nusselt 解) は

$$u = U_N \left\{ \frac{2z}{h_0} - \left(\frac{z}{h_0} \right)^2 \right\}, \quad U_N = \frac{g_x h_0^2}{2\nu}, \quad g_x = g \sin \alpha \quad (7)$$

²なお、解を定常解に限定すると、無限小の非保存項が定性的な差を生じる [4, §3.1]。非保存項が無視できるか否かは、着目する時間スケールに依存するのだが、定常解では無限大の時間スケールを考えることになるので、特異な事象が生じるのは当然である (この意味で、“幽霊効果”は気体論の特許特許ではなく、特異振動論の一般論に含まれると考えるべきだ)。実験では有限の時間スケールを相手にするのだから、定常解に限定することに物理的意味があるかどうかは場合に応じて適切に判断する必要がある。

³式 (1) の係数 α と記号が重複するが、文脈で区別する。

⁴Chang & Demekhin [4] では式 (2.24) の γ に対応する。

であることが容易に示される。液膜厚さ h_0 に関する無次元パラメータとして、Reynolds 数 R を導入する。さらに、習慣に従い、 (R, K) の代わりに、次のように定義される (R, W) を用いる：

$$R = \frac{U_N h_0}{\nu} = \frac{(g \sin \alpha) h_0^3}{2\nu^2}, \quad W = \frac{\sigma h_0^{-1}}{\rho g \sin \alpha} = \frac{\sigma}{(\rho g \sin \alpha) h_0^2} \quad (8)$$

ここで W は Weber 数であり、表面張力 σ の相対的な大きさをあらわす⁵。

液膜流は散逸系である。運動エネルギー $K = \rho u^2/2$ に対して釣り合いの式を書くと

$$\partial_t K + \operatorname{div}[(K+p)\mathbf{u} - \nu \nabla K] = \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} - \tilde{\mu}(|\nabla u|^2 + |\nabla w|^2) \quad (9)$$

のようになる（ここで $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_x + w\mathbf{e}_z = (u, 0, w)$ とした）。右辺第1項は重力によるエネルギーの供給を、第2項は粘性による散逸をあらわす。この式と、KS 方程式の非保存項の釣り合いの式 (4) との本質的な相違に注意しよう。式 (4) の右辺の各項は、一様定常解では両方ともゼロになるが、式 (9) では右辺の各項はゼロにならない。第1項と第2項の非自明な釣り合いのうえに Nusselt 解 (7) が成り立っている。

2.2 表面波の方程式

慣性の効果により、一様な液膜は長波攪乱に対して不安定となり、表面波が発生する。この不安定性が発生する条件は、Reynolds 数 R が臨界値 $R_* = (5/4) \cot \alpha$ よりも大きいことである⁶。実験によれば、波の成長・飽和・合体などが観察され、孤立波の相互作用は非弾性的である [7]。また、かなりの程度まで、流れは2次元的であると見なしてよい。

このような表面波を記述する近似方程式を得る方法として、いわゆる Benney の長波展開法 [8] が知られている。この方法では、長波パラメータ μ を導入して Navier-Stokes 方程式を展開し、速度の自由度を消去して、表面（液膜厚さ h ）の自由度だけを含む方程式に帰着させる。結果は、

$$\partial_t h + \partial_x \left[\frac{2}{3} h^3 + \left(\frac{8}{15} R h^6 - \frac{2}{3} (\cot \alpha) h^3 \right) \partial_x h + \frac{2}{3} W h^3 \partial_x^3 h \right] = 0 \quad (10)$$

のようになる [9]。式 (10) を、ここでは Benney-Gjevik 方程式と呼ぶことにする。

Benney の長波展開には、収束性に問題がある [10]。そのため、慣性が少し大きくなると、Benney-Gjevik 方程式は破綻する。この場合には、 h だけを変数とする記述をあきらめ、Shkadov モデル [11] あるいは改良 Shkadov モデル [12] のように、自由度を増やして対応する必要がある。他方、 h だけによる記述の枠内で Benney-Gjevik 方程式 (10) を改良したものとして、正則化方程式 [10]

$$\partial_t h - \frac{4}{21} R \partial_x \partial_t (h^5) - \partial_x (h^2 \partial_x \partial_t h) + \frac{2}{3} \partial_x \left[h^3 - \partial_x \left(\frac{\cot \alpha}{4} h^4 + \frac{72}{245} R h^7 \right) + W h^3 \partial_x^3 h \right] = 0 \quad (11)$$

を挙げることができる。これは、Benney-Gjevik 方程式に対する高次の項を Padé 近似によって足しあげた方程式である。この方法の有効範囲は $R \lesssim W^{1/3}$ に限られるので、 $R \gg 1$ に対する改良としては定量的に満足できるものではないが、それでも Benney-Gjevik 方程式 (10) よりも近似が高いことは確かである。また、 $R \lesssim 1$ での定量的妥当性は間違いないものと考えられる。

他方、Benney-Gjevik 方程式 (10) で $h = 1 + \eta$ とおき、 $|\eta| \ll 1$ とすると、KS 方程式 (1) に帰着する。さらに、式 (10) に対応する高次の方程式を考えると、たとえば文献 [13] の式 (25) が得られる。高次項のうち最も特徴的な項として $\partial_x^3 \eta$ のみを加えたのが、Benney-Kawahara 方程式 (3) にほかならない。

3 高粘性ソリトン

液膜流で粘性無限大 ($R \rightarrow +\infty$) の極限を考える。このとき、表面波の方程式において、Benney-Kawahara 方程式 (3) に見られるような非保存項が消え、KdV 方程式に似たソリトンの方程式が得られることを説明する。すなわち、エネルギー散逸が支配的な系が、保存系としての挙動を示す。

⁵式 (6) および (8) から、 $W \sim K R^{-2/3}$ であることが容易に分かる。ただし、文献によっては W の定義が異なる場合がある。

⁶ただし、傾斜角が水平に近いような場合は、表面波の発生よりも流れ自体の不安定性が先に生じる。

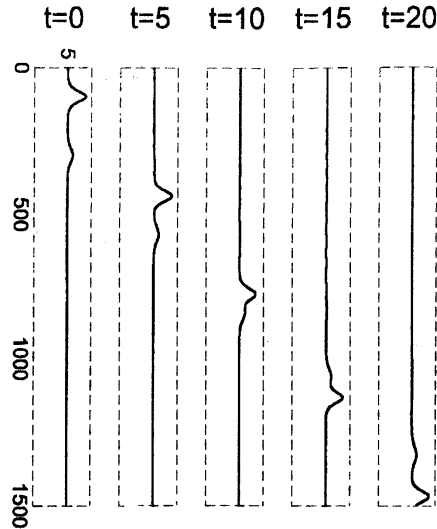


図 1: 「はちみつソリトン」の衝突 (数値計算)

このような「高粘性ソリトン」は、マグマソリトン [1, 14] という形で以前から知られていたが、これと液膜流の関係が明確に述べられている文献は見ることがない。液膜流の高粘性極限はマグマソリトンと本質的に同じ現象を示すはずだというのが我々の主張である。

3.1 液膜流の両極限: 非粘性極限と高粘性極限

本稿の主題は高粘性極限であるが、その前に、非粘性極限 ($R \rightarrow \infty$) について簡単に述べる。この場合、一様定常状態を実現するには、壁は水平 ($\alpha = 0$) でなければならない。すなわち、水面重力波 [15, Chap.13] に帰着する。これは、ソリトン発祥の地とでも呼ぶべき分野であり、KdV 方程式・BBM 方程式・Boussinesq 方程式などの一連の有名な方程式がここから産み出された [16]。しかし、この極限は、Benney-Kawahara 方程式 (3) の KdV 極限とは関係ない。Nusselt 解 (7) との結びつきが切れているからである。

これとは逆の、高粘性 ($R \rightarrow 0$) かつ垂直壁 ($\alpha = \pi/2$) の極限に着目しよう。このとき、さらに表面張力を無視すると、系は BBM 方程式 (5) に似た方程式で記述される⁷。この方程式は、3つの保存量を持ち、ほとんど弾性的なソリトンの衝突現象を示す。この意味で、高粘性液膜流は近可積分である。

3.2 慣性の効果

簡単化のため、垂直壁 ($\alpha = \pi/2$) の場合を考える。Benney-Gjevik 方程式 (10) の複素分散関係を $h = 1 + \hat{\eta} \exp[i(kx - \omega t)]$ として求めると、 $\omega_1 = (8/15)Rk^2 - (2/3)Wk^4$ となり、慣性の存在 ($R \neq 0$) は波を成長させる効果をもつことが分かる。また、表面張力 ($W \neq 0$) は波を安定化させる効果をもつ。正則化方程式 (11) でも、基本的な状況は同じである。

非線形波に対する慣性の影響を見るため、正則化方程式 (11) を用いて、孤立波の相互作用の様子を数値的に調べる。まず、慣性が有限の場合については、文献 [10] の Fig.9 に計算例がある。この場合、孤立波が成長し衝突して合体するという、非弾性的な挙動が見られる。

他方、慣性が非常に小さい場合の例を考える。ここで、 $R \rightarrow +0$ かつ $W \lesssim 1$ とするために、液膜の厚さを比較的大きな値に保ったまま、流体そのものの粘性を非常に大きな値にする。具体的な物質として、はちみつを想定し、正則化方程式 (11) の数値解を求めてみる。表面張力は水と同じ値 ($\sigma = 0.069 \text{ N/m}$) を仮

⁷なお、 R が有限であっても、臨界点ちょうど ($R = R_*$) の場合には、Chang & Demekhin [4] の式 (3.1)–(3.8) にあるように、長波展開と振幅展開により KdV 方程式が得られる。しかし、一般には高次の非保存項が残るので、KdV 的な挙動は実現困難である。高次の非保存項をゼロにするには、 $R = R_*$ とするだけではだめで、 R そのものをゼロにする必要がある。

定し、液膜厚さを $h_0 = 5 \text{ mm}$ とした。このときの Reynolds 数の値は およそ $R = 0.02$ である。

予備的な計算として、 $h = 1 + A \text{sech}^2((x - x_0)/\lambda)$ の形の初期条件を与え、余計な放射波 (radiation) がなるべく出ないように A および λ を調整する。こうして得られた孤立波を 2 つ並べて「衝突用」の初期条件を作る。結果を図 1 に示す。ふたつの孤立波のソリトンの相互作用の様子を見ることができる。

3.3 正則化方程式の保存極限: 修正 BBM 方程式

慣性の効果が小さい場合の方程式を求めよう。通常の液膜では、高階微分を含む項として表面張力項が重要になる。実際、Benney-Gjevik 方程式 (10) で垂直壁の場合に $R \rightarrow +0$ とすると、

$$\partial_t h + \partial_x \left(\frac{2}{3} h^3 + \frac{2}{3} W h^3 \partial_x^2 h \right) = 0 \quad (12)$$

という式が得られる。これは、高木 [17] の結果と完全に一致する⁸。式 (12) は本質的には 4 階 Burgers 方程式であり、 $h = 1 + \eta$ として振幅展開をおこなうと、KS 方程式 (1) で $\alpha = 0$ とした場合に帰着する。

さらに、慣性だけでなく表面張力も抑えることを考える。式 (10) あるいは式 (12) で $W = 0$ とすると

$$\partial_t h + \partial_x Q = 0, \quad Q = \frac{2}{3} h^3 \quad (13)$$

となり、非線形効果によって有限時間で破綻してしまう。この場合、高次の項まで含めて考えるべきで、実際には粘性の高次効果が分散項の役割をするため、KdV 方程式に似たソリトンの挙動が期待される。

本来ならば、もとの Navier-Stokes 方程式系に戻って擾動計算をやりなおすのが筋であるが、ここでは、その代わりに、正則化長波方程式 (11) に基づく解析を示す。まず、高粘性極限を考えて $R \rightarrow 0$ とし、同時に $\cot \alpha \rightarrow 0$ とする。さらに、表面張力を抑えるため、 $W \lesssim 1$ を要請する。また、もともと式 (11) が長波展開に基づくことを考慮すると $\mu (\sim \partial_x) \ll 1$ であり、さらに振幅について $|\eta| \lesssim \mu$ とする。以上の要請をおくことにより、正則化方程式 (11) は

$$\partial_t \eta + \partial_x \left[\frac{2}{3} (1 + \eta)^3 \right] - \partial_x^2 \partial_t \eta = 0 \quad (14)$$

のように簡単化される。式 (14) は、非線形項に η^3 が現れることを除いて、BBM 方程式 (5) と同じ形をしている。ここでは、この式を「修正 BBM 方程式」と呼ぶことにする。

4 保存量

4.1 修正 BBM 方程式における保存則

修正 BBM 方程式 (14) は、BBM 方程式 (5) と同じく、3 つの保存則をもつ。まず、当然のことであるが、式 (14) は、体積流量保存則の形で

$$\partial_t \eta + \partial_x Q = 0, \quad Q = \frac{2}{3} (1 + \eta)^3 - \partial_x \partial_t \eta \quad (15)$$

のように書ける⁹。第 2 保存量を得るために、式 (14) に $h (= 1 + \eta)$ をかけて変形すると

$$\partial_t \left[\frac{1}{2} (1 + \eta)^2 + \frac{1}{2} (\partial_x \eta)^2 \right] + \partial_x [\dots] = 0 \quad (16)$$

という式が得られる。また、式 (14) に Q をかけて変形し、第 3 の保存量が

$$\partial_t \left[\frac{1}{6} (1 + \eta)^4 \right] + \partial_x [\dots] = 0 \quad (17)$$

⁸講演時に「1970 年の『ソリトンの研究会』で既に KdV 方程式への帰着が示されているのではないかと」のコメントがあったが、文献 [17] を見る限り、そういうわけではないようだ。

⁹もちろん Q の式から ∂_t を追い出すことも可能である。

のように得られる。なお、修正 BBM 方程式をもう少し一般化し、 F を h の任意関数として

$$\partial_t h + \partial_x [F(h) - \partial_x \partial_t h] = 0 \quad (18)$$

のような方程式を考えた場合にも、式 (18) には 3 つの保存量があることが容易に示される。

さらに、式 (14) あるいは式 (18) を、式 (13) すなわち分散項が全くない場合と比較してみよう。式 (13) は、特性線の方法で解けるという意味では可積分である。もちろん初期条件によっては有限時間で破綻するが、それまでは、無限個の保存量が存在する (h^n をかけて積分すればよい)。これは、非粘性の浅水重力波に関して Whitham [15] の §13.10 の末尾に注記されているのと同様な状況である。方程式 (14) あるいは (18) では、これらの保存量のうち 3 つが生き残ることになる。

4.2 保存量とエネルギーの関係

多くの場合、近似方程式における低次の保存量は、もとの系のエネルギー保存則あるいは運動量保存則に対応すると考えるのが自然である。しかし、今の例では状況は異なっており、式 (16) や式 (17) の保存則は、エネルギーや運動量とは全く関係がない。なぜなら、修正 BBM 方程式 (14) は、慣性ゼロの極限で導かれた方程式だからである。これは、運動エネルギー K のつりあいの式 (9) で左辺の各項が消失する極限であって、決して右辺が消失するわけではない。式 (9) は 右辺だけの釣り合いの式と見るべきであり、左辺を修正 BBM 方程式 (14) の保存則と関係づけるのは無理である。このことを納得してもらうための一つの手段として、以下では、浅水波 (非粘性) の近似方程式の導出と液膜流における修正 BBM 方程式の導出を比較し、両者がいかに異なっているかを説明する。

非粘性の浅水波の近似方程式に対して、もとの系の物理的な保存則との対応を示すには、Lagrangian を経由した導出過程を見るのが便利である。流体の速度場を $\mathbf{u} = (u, 0, w)$ とし、また、深さ方向に u を平均したものを $\bar{u}$ とする。流量に関する連続の式は、 $\bar{u}$ を用いて

$$\partial_t h + \partial_x (h\bar{u}) = 0, \quad \bar{u} = \frac{1}{h} \int_0^h u \, dz \quad (19)$$

のように書ける。速度場 $\mathbf{u}$ は非圧縮かつ非回転なので、Laplace 方程式に支配され、 $h(x, t)$ および $\bar{u}(x, t)$ が与えられれば完全に決定される。長波近似を用いて速度場を具体的に求め、Lagrangian 密度を

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, t) = \frac{1}{2} \rho \int_0^h u^2 \, dz - \rho g \int_0^h z \, dz = \frac{1}{2} \rho h \left(\bar{u}^2 + \frac{1}{3} (\partial_t h)^2 \right) - \frac{1}{2} \rho g h^2 \quad (20)$$

のように書き下す。ここで、連続の式 (19) の解として、“物質座標” $a = a(x, t)$ を導入し¹⁰、 h および $\bar{u}$ を

$$h = \left(\frac{\partial a}{\partial x} \right)_t = \frac{\partial a(x, t)}{\partial x}, \quad \bar{u} = \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_a = \frac{\partial x(a, t)}{\partial t} \quad (21)$$

のようにあらわす。これを用いて、Lagrangian 密度 (20) を a で書き直す。結果は

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho \left[\frac{(\partial_t a)^2}{\partial_x a} + \frac{1}{2} (\partial_x a) (\partial_t \partial_x a)^2 - g (\partial_x a)^2 \right] \quad (22)$$

となり、その変分から Boussinesq 方程式が得られる。さらに、一方向の波に着目して Lagrangian を近似することにより、BBM 方程式あるいは KdV 方程式が導かれる。こうして得られた Lagrangian を通じて、もとの系の保存量と Boussinesq 方程式や KdV 方程式の保存量のあいだに直接的な対応を見いだすことができる。よく知られているように、Lagrangian の対称性は保存則を意味するからである (Noether の定理)。

他方、高粘性の液膜流においては、運動エネルギーがそもそもゼロであり、また粘性が本質的なので、このような方法で Lagrangian を構成することはできない。もし正則化方程式 (11) を経由せずに直接 Navier-Stokes 方程式から式 (14) を導出するとしたら、その概要は次のようになるだろう：まず、運動方程式の x

¹⁰Miles [16] によれば、Boussinesq は保存則を導出する過程で σ という変数を用いている。これは、実質的に a と同等である。

成分で、 $R \rightarrow 0$ として慣性項を無視する（つまり Stokes 方程式に置き換える）。これに、式 (7) で h_0 を $h = h(x, t)$ で置き換えたもの（局所 Nusselt 解）を代入し、さらに $p \simeq p_{\text{atm}} = \text{const.}$ を代入して整理すればよい。こうして得られる方程式が運動エネルギーとは全く関係ないことは、ほとんど自明である。

奇妙なことは、高粘性液膜流では運動エネルギーと位置エネルギーから Lagrangian 密度を構成するのは不可能であるにもかかわらず、修正 BBM 方程式 (14) から Lagrangian 密度を逆算できることである。BBM 方程式の Lagrangian [18] を参考にして、修正 BBM 方程式 (14) に対する

$$\mathcal{L} = \frac{1}{6}(\partial_x a)^4 + \frac{1}{2}(\partial_x a)(\partial_t a - \partial_x^2 \partial_t a) \quad (23)$$

のような Lagrangian を構成するのは難しくない。保存則は、この Lagrangian の 3 つの対称性に対応する。つまり、運動エネルギーとは何の関係もない Lagrangian 密度と、それに対応する保存則が存在する。

5 高粘性ソリトンの実現可能性

高粘性ソリトンが実際に存在することを示すために、我々は、水ガラス ($\text{SiO}_2/\text{Na}_2\text{O}$ 溶液) を用いた実験をおこなうことにした。以下では、実験の状況および今後の見通しについて簡単に説明する。

5.1 次元解析

液体の物性値で決まる特徴的な長さについて検討する。まず、重力と動粘性から決まる長さ l_v が存在する。もうひとつ、重力と表面張力から、長さ l_s が決まる。これらの長さは、

$$l_v^3 = \frac{\nu^2}{g} \quad \left(R = \frac{h^3}{2l_v^3}\right); \quad l_s^2 = \frac{\sigma}{\rho g} \quad \left(K = \frac{l_s^2}{l_v^2}\right) \quad (24)$$

のように見積もることができる。

水 (H_2O) の場合、 $l_v = 0.05 \text{ mm}$, $l_s = 2.7 \text{ mm}$ であり、したがって $l_v \ll l_s$ が成り立つ。実際、Kapitza 数は $K = l_s^2/l_v^2 = 3000$ で、これは 1 よりもかなり大きい。

水ガラスの粘性は、温度によって異なるが、だいたい $\bar{\mu} \sim 10^3 \text{ poise} = 10^2 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ 程度である。動粘性係数に直すと $\nu = \bar{\mu}/\rho \simeq 0.7 \times 10^5 \text{ mm}^2/\text{s}$ で、水の数万倍以上となる。これから l_v を見積もると、 $l_v = 8 \text{ cm}$ 程度となる。表面張力は不明であるが、仮に水と同程度だとすると、 $l_s = 2.7 \text{ mm}$ であるから l_v のほうが l_s よりもずっと大きい（すなわち Kapitza 数が小さい）。したがって、波の波長を λ として、 $l_s < h \ll \lambda < l_v$ となるように実験条件を設定することが可能である。

5.2 実験の現状および今後の課題

まず、流路の最大幅を 10 cm とし、流路の長さを 150 cm とした実験装置を製作して、2003 年 9 月に予備実験をおこなった。また、流入部から供給される液膜の幅は流路幅よりも小さく、したがって、いわゆる接触線（自由表面と固体壁の交わる線）が、流路の底面 ($z = 0$) に生じることになる。

予備実験の結果、この実験装置には問題があることが分かった。液膜が空間的に一様にならず、 x 方向に進むにつれて幅が減少し、厚さが増加するのである。そのため、孤立波の伝播が妨げられる結果となった。また、厚さは y 方向にも非一様であり、2 次元的な理論が適用できないように思われた。

液膜の幅がしだいに減少する原因として、表面張力が、接触線を引っ張って近づける力として作用していることが考えられる。これを防ぐためには、流路幅を狭くして、接触線が底面ではなく側面に来るようにすればよい。この考えに基づいて、流路幅を 3.5 cm に縮小し、また、流路の幅全体を流体が占めるように、十分な量の流体を供給することにした。その結果、ほぼ定常な孤立波の伝播が確認された。

現時点での実験の状況を示すものとして、単一の孤立波の伝播の様子を図 2 に示す。振幅は多少減衰しており、また完全に 2 次元的とも言えないが、とにかく孤立波が相当な距離を伝播する様子が確認できる。

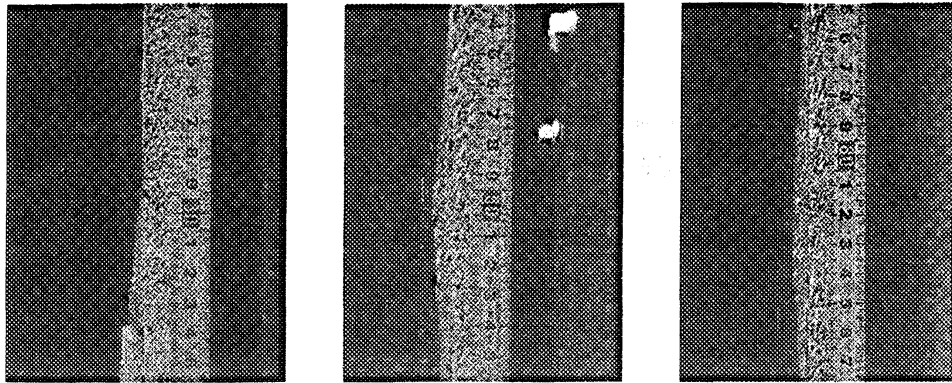


図 2: 孤立波の伝播 (実験の写真)

さらに、孤立波の位置を時刻に対してプロットすると、ほぼ等速直線運動になる。基本となる液膜厚さが同じでも、孤立波の進む速度が異なる場合があるので、攪乱をうまく制御すれば、図 1 に対応するような衝突実験が可能である。実際、最近になって、いわゆる「高さ入れ換え型」の弾性衝突と思われる過程が観測された。詳細については、別の機会 [19] に報告する予定である。

理論的には、修正 BBM 方程式 (14) の解の挙動 (たとえば非弾性衝突の程度) を系統的に調べることも、また Navier-Stokes 方程式からの直接的な導出をおこない、補正項の評価をすることなどが考えられる。また、実験との対応を考えると、3 次元性を考慮した理論を作ることが重要な課題となる (ただし、側壁上の接触線の運動を考えると、これは非常に厄介な問題である)。

参考文献

- [1] 井田 喜明. マグマ・ソリトン. ながれ (日本流体力学会誌), Vol. 6, p. 150, 1987.
- [2] H. Hayakawa & K. Nakanishi. Universal behavior in granular flows and traffic flows. *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, Vol. 130, pp. 57-75, 1998.
- [3] 大信田 丈志. 散逸系の運動学的波動と正則化長波展開. 永井 敦 (編), 可積分系研究の新展開 — 連続・離散・超離散, 数理解析研究所 (RIMS) 講究録, No. 1302, pp. 38-59, 2003.
- [4] H.-C. Chang & E. Demekhin. *Complex Wave Dynamics on Thin Films*. Elsevier, 2002.
- [5] 川原 琢治. ソリトンからカオスへ. 朝倉書店, 東京, 1993.
- [6] L. Landau & Y. Lifshitz. 流体力学 1. 東京図書, 1970. 竹内 均 訳.
- [7] J. Liu & J. P. Gollub. Solitary wave dynamics of film flows. *Physics of Fluids*, Vol. 6, p. 1702, 1994.
- [8] D. J. Benney. Long waves on liquid films. *J. Math. Phys.*, Vol. 45, p. 150, 1966.
- [9] B. Gjevik. Occurrence of finite-amplitude surface waves on falling liquid films. *Physics of Fluids*, Vol. 13, p. 1918, 1970.
- [10] Ooshida Takeshi. Surface equation of falling film flows with moderate Reynolds number and large but finite Weber number. *Physics of Fluids*, Vol. 11, pp. 3247-3269, 1999.
- [11] V. Ya. Shkadov. Wave conditions of a flow in a thin viscous liquid layer under the action of gravitational force. *Izv. Akad. Nauk. SSSR, Mekh. Zhid. i Gaza*, Vol. 1, p. 43, 1967.
- [12] C. Ruyer-Quil & P. Manneville. Modeling film flows down inclined planes. *Eur. Phys. J. B*, Vol. 6, p. 277, 1998.
- [13] S. P. Lin. Finite amplitude sideband stability of a viscous film. *J. Fluid Mech.*, Vol. 63, p. 417, 1974.
- [14] D. R. Scott & D. J. Stevenson. Magma solitons. *Geophys. Res. Lett.*, Vol. 11, p. 1161, 1984.
- [15] G. B. Whitham. *Linear and nonlinear waves*. Wiley, 1974.
- [16] J. W. Miles. The Korteweg-de Vries equation: a historical essay. *J. Fluid Mech.*, Vol. 106, pp. 131-147, 1981.
- [17] 高木 隆司. 垂直壁に沿って流れる層の上の波について. 斎藤 信彦 (編), ソリトンの研究会報告集, 数理解析研究所 (RIMS) 講究録, No. 83, p. 136, 1970.
- [18] P. J. Morrison, J. D. Meiss & J. R. Cary. Scattering of regularized long-wave solitary waves. *Physica D*, Vol. 11, p. 324, 1984.
- [19] 大信田 丈志, 渡辺 誠司, 川添 博光. ふたつの高粘性ソリトンの相互作用. 日本物理学会 講演概要集 (第 59 回年次大会), 九州大学, 2004. 日本物理学会. 講演番号 29pWD-10 (領域 11).