

Prandtl 境界層理論の数学的基礎について

北大, 理, 数, 松井伸也

(Shinya Matsui)

平面壁に沿う境界層に対する定常 Prandtl 方程式は,
次で与えられる.

$$(P) \begin{cases} u u_x + v u_y = \nu u_{yy} - p_x, \\ u_x + v_y = 0, \end{cases} \quad \text{for } 0 \leq x \leq A, 0 \leq y < \infty,$$

及び境界条件;

$$\begin{aligned} u|_{y=0} &= v|_{y=0} = 0, \\ u|_{y \rightarrow \infty} &= U(x), \end{aligned}$$

と初期位置 ($x=0$) に於ける条件;

$$u|_{x=0} = u_0(y) \quad ; \text{ given.}$$

ここに、 x は壁の長土、 y は法線方向、 $(u, v) = (u(x, y), v(x, y))$ は、未知速度ベクトル場であり、 $p(x)$ 及び $U(x)$ は、それぞれ圧力関数、外の流れの速度

であり次のベルヌーイの法則を満たす；

$$U(x) U_x(x) + P_x(x) = 0.$$

更に定数 $\nu > 0$ は、動粘性係数、添文字 x, y は、それぞれの変数についての偏微分をあらわす。

さて Prandtl 境界層理論はその創始より、はや 80 年を過ぎるがまだその有意さを失っていない様である。流体力学の分野では、剥離境界層の数値解析や、その理論的研究に、Prandtl 方程式が使われている様である ([12], [13])。そこで我々、数学(純粋数学)の立場から、素朴な疑問が起る。Prandtl 方程式に、剥離をともなう解(剥離解)が存在するか否か？ Prandtl 方程式の解は、Navier-Stokes 方程式の解の 1 次近似となり得るか？ ここでは Prandtl の理論へ、我々の立場から基礎礎を与えることを、目的としてこれらの問題へ解答を与える。具体的には次の 2 つを示めす；

- 1) 剥離解の存在。
- 2) Navier-Stokes 方程式の非剥離層流解を近似する Prandtl 方程式の解の存在。

尚、詳細は、論文 [3], [4] を、参考のこと。

1. 剥離解.

我々は、次で剥離点 $x = s$ を定めた；

$$u_y(x, 0) > 0 \quad \text{for } 0 \leq x < s,$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (s,0)} u_y(x, y) = 0.$$

方程式 (P) の剥離解の存在を示めすために、我々は次の事を仮定する (重要なもののみ示めす)。

- (i) $\frac{du_0}{dy}(0) > 0$,
- (ii) $\forall \frac{d^2 u_0}{dy^2}(y) - p_x(0) = O(y^2)$ as $y \rightarrow 0$,
- (iii) $U(x) > 0$ for $0 \leq x < 1$, $U(1) = 0$,
- (iv) $p_x(x)$ は、 $x=1$ のすぐ手前で単調非増大且正。

定理 1. $\exists s (0 < s < 1) \quad \exists (u(x, y), v(x, y))$
 such that (u, v) は、 $0 \leq x < s$, $0 \leq y < \infty$ に於いて、
 (P) の解であり $x=s$ は剥離点である。さらに initial
 profile $u_0(y)$ をいろいろ変えた時、解 (u, v) と剥離点
 $x=s$ はいろいろと変わるが、次の不等式が成立する；

$$\sup S < 1,$$

尚 $\sup$ は、仮定をみたすすべての $u_0(y)$ に対して決まるすべての剥離点についてとる。即ち、仮定をみたす $u_0(y)$ を、いろいろ変えても $s \rightarrow 1$ となる様には出来ない。

さらに、(iii), (iv) より弱い条件の $U(x)$, $p(x)$ について

ても次の様な剥離解の存在が言える。

定理 2. (iii), (iv) のかわりに

$$(iii)' \quad U(x) > 0 \quad \text{for } 0 \leq x < \infty,$$

$$(iv)' \quad p_x(X) > 0 \quad \text{for some } x = X,$$

を仮定する。もし $\frac{dU_0}{dy}(0)$ が十分小さいならば剥離点 $x=s$ を有する $0 \leq x < s, 0 \leq y < \infty$ での方程式 (P) の解 $(u(x, y), v(x, y))$ が存在する。

2. Navier - Stokes 方程式との関係

Navier - Stokes 方程式;

$$(N.S.) \begin{cases} \bar{u} \bar{u}_x + \bar{v} \bar{u}_y = \nu \Delta \bar{u} - \bar{p}_x, \\ \bar{u} \bar{v}_x + \bar{v} \bar{v}_y = \nu \Delta \bar{v} - \bar{p}_y, \\ \bar{u}_x + \bar{v}_y = 0, \end{cases} \quad \text{for } 0 \leq x \leq A, 0 \leq y < \infty,$$

の解 $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{p})$ について、もし $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{p})$ が非剥離層流解ならば、方程式 (P) の解 (u, v) で $\bar{u}$ を近似する解が存在することを示したい。

我々は、動粘性係数 ν に対する方程式 (N.S.) の解 $(\bar{u}^\nu, \bar{v}^\nu, \bar{p}^\nu)$ 達が、非剥離層流解 であるという事

を次に定めた (c.f. [1]).

1) $(\bar{u}^\nu, \bar{v}^\nu, \bar{p}^\nu)$ が境界条件 $\bar{u}^\nu|_{y=0} = \bar{v}^\nu|_{y=0} = 0$ を満たす (N.S.) の解である.

2) $D := \{0 \leq x \leq A, 0 \leq y \leq 2\}$ としとき,
 $0 \leq \bar{u}^\nu \leq 1$ on D .

3) $\bar{u}^\nu, \bar{u}_x^\nu, \bar{u}_{xx}^\nu$ 及び $\bar{v}^\nu, \bar{v}_x^\nu, \bar{v}_{xx}^\nu$ は, D に於いて, ν について一様有界.

4) $\nu \Delta \bar{u}^\nu, \nu \Delta \bar{v}^\nu$ 及び $\nu (\Delta \bar{v}^\nu)_x$ は, D に於いて, ν について一様有界.

5) $\text{const.} \times \min\{1, \nu^{-1/2} y\}$
 $\leq \bar{u}^\nu(x, y)$
 $\leq \text{const.} \times \min\{1, \nu^{-1/2} y\}$
on D .

定理 3. (N.S.) 方程式の非剥離層流解 $(\bar{u}^\nu, \bar{v}^\nu, \bar{p}^\nu)$ 達に対して, $0 \leq x \leq A, 0 \leq y < \infty$ で剥離しない方程式 (P) の解 (u^ν, v^ν) が存在して次を満たす;

$$|u^\nu(x, y) - \bar{u}^\nu(x, y)| \leq \text{const.} \cdot \nu^{1/2},$$

$$\text{for } 0 \leq x \leq A, 0 \leq y \leq \nu^{1/2}, 0 < \nu \ll 1,$$

尚, constant は, ν に無関係.

References

- [1] Fife, P.C. Considerations regarding the mathematical basis for Prandtl's boundary layer theory, Arch. Rat. Mech. Anal., 28(1968), 184-216.
 _____ Corrigendum, Considerations regarding the mathematical basis for Prandtl's boundary layer theory, Arch. Rat. Mech. Anal., 46(1972), 389-393.
- [2] Glimm, J. Singularities in fluid dynamics, Math. Prob. in Theoretical Phys., ed. R. Schrader, R. Seiler and D.A. Uhlenbrock, Springer Verlag (1981), 86-97.
- [3] Matsui, S. and Shiota, T. On separation points of solutions to Prandtl's boundary layer problems, Hokkaido Math. J. Vol.13, No.1 (1984), 92-108.
- [4] _____ On Prandtl boundary layer problem, Recent Topics in Nonlinear PDE II, ed. by Masuda, K. and Mimura, M., Kinokunia/North-Holland, (1986) 81-105.
- [5] Von Mises, R. and Friedrichs, K.O. Fluid Dynamics, Appl. Math. Sci. 5, Springer Verlag (1971).
- [6] Nickel, K. Parabolic equations with applications to boundary layer theory, P.D.E. and Conti. Mech., ed. R. Langer, The Univ. Wisconsin Press, Madison Wisconsin (1961), 319-330.
- [7] Oleinik, O.A. On a system of equations in boundary layer theory, U.S.S.R. Comp. Math. Phys., 3 (1963), 650-673
- [8] _____ Mathematical problems of boundary layer theory, Uspehi Mat. Nauk, Vol.23, No.3 (1968), 3-65.
- [9] _____ Weak solutions in Sobolev sense for a system of boundary layer equations, Amer. Math. Soc. Trans. (2), 105 (1976), 247-264.
- [10] _____ and Kruzhkov, S.N. Quasi-linear second-order parabolic equation with many independent variables, Russian Math. Surv., Vol.16 n.5 (1961), 106-146.

- [11] Serrin, J. Asymptotic behavior of velocity profiles in the Prandtl boundary layer theory, Proc. London Math. Soc. A 299 (1967), 491-507.
- [12] Hydrodynamics Instabilities and the Transition to Turblence, ed. by H.L. Swinney and J.P.Gollub, Topics in applied physics vol.45, Springer-Verlag(1985).
- [13] Hughes, J.T. and Marsden, J.E. A Short Course in Fluid Mechanics, Mathematical Lecture Series 6, Publish or Perish, Inc. (1976).